KAPITOLA VII

VARIAČNÍ PRINCIPY

Vyvrcholením teoretického rozvoje Newtonovy mechaniky a Maxwellovy-Lorentzovy elektrodynamiky bylo vyjádření jejich základních zákonů ve formě variačního principu d'Alembertova, popř. Hamiltonova. V této kapitole ukážeme, že v relativistické mechanice hmotných částic a v teorii pole mají analogické formulace jejich základních zákonů ještě jasnější smysl teoretický a hlubší význam fyzikální i podstatně větší cenu praktickou. Uvidíme, že ve spojení s požadavkem invariance vůči Lorentzovým transformacím se tyto principy stávají důležitou pomůckou metodicko-heuristickou, která velmi usnadňuje hledání možných forem neznámých zákonů skutečných, konkrétních fyzikálních jevů.

1. VAZBOVÉ SÍLY. RELATIVISTICKÁ FORMULACE d'ALEMBERTOVA PRINCIPU A LAGRANGEOVÝCH ROVNIC 1. DRUHU

Mějme Minkowského systém S prostoročasových souřadnic $x_\mu \equiv (\boldsymbol{x}, ict)$. Hmotná částice nechť je v daném čase t v určitém místě $\boldsymbol{x}$, má klidovou hmotu $m_0(x)$ a je pod vlivem vtištěné Minkowského čtyřsíly $F_\mu(x)$ odvozené z daného vnějšího pole. Částice nechť je dále vázána na určitou, s časem se měnící plochu $\sigma_{(t)}$, jejíž rovnice zní

$$\mathrm{G}(\boldsymbol{x}, x_4) \equiv \mathrm{G}(x) = 0\,. \tag{1}$$

Přitom G je *daná skalární funkce souřadnic* x_μ, takže v systému S' souřadnic x'_μ má rovnice plochy σ tvar $\mathrm{G}'(x') = \mathrm{G}(x(x')) = 0$. V prostoročase ovšem rovnice (1) určuje nějakou trojrozměrnou nadplochu Σ, v níž leží světočára Γ naší částice. Souřadnice $x_\mu(\tau)$ světobodů na světočáře Γ splňují rovnici (1) a proto posuv $\mathrm{d}x_\mu \equiv (\mathrm{d}x_j, ic\,\mathrm{d}t)$ po světočáře Γ splňuje rovnici

$$\partial_\nu\, \mathrm{G}(x)\, \mathrm{d}x_\nu = 0\,. \tag{1a}$$

Prostoročasový posuv $\mathrm{d}x_\nu$ budeme nazývat *skutečným posuvem*, poněvadž odpovídá skutečně nastalému pohybu částice z místa $\boldsymbol{x}$ v čase t do místa $\boldsymbol{x} + \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ v čase

$t + \mathrm{d}t$. Podmínka (1a) omezuje posuv $\mathrm{d}x_\nu$, ale sama jej jednoznačně neurčuje. V newtonovské mechanice se zavádějí tzv. *izochronní (bezčasové) virtuální posuvy* $\bar{\delta}x_j$ $(\bar{\delta}t = 0)$, které splňují podmínku

$$\partial_j\, \mathrm{G}(\boldsymbol{x}, t)\, \bar{\delta}x_j = 0\,. \tag{$\bar{2}$}$$

Skutečný pohyb částice, popř. časová změna její hybnosti $\dot{p}_j \equiv \mathrm{d}p_j/\mathrm{d}t$ při jejím skutečném pohybu je pak určena podmínkou, aby vektor $\dot{p}_j - f_j$ byl kolmý ke všem virtuálním posuvům $\bar{\delta}x_j$, tj. rovnicí

$$(\dot{p}_j - f_j)\, \bar{\delta}x_j = 0\,. \tag{$\bar{3}$}$$

Rovnice $(\bar{3})$ vyjadřuje známý *d'Alembertův princip newtonovské mechaniky hmotné částice.*

Pro teorii relativity se tato formulace d'Alembertova principu nehodí, protože podmínka $\bar{\delta}t = 0$ a tedy ani podmínky $(\bar{2})$ a $(\bar{3})$ nejsou invariantní vůči Lorentzovým transformacím. Abychom dospěli k relativisticky invariantní formulaci d'Alembertova principu, musíme nejprve zobecnit klasický pojem virtuálního posuvu. *Virtuálním posuvem* δx_ν *budeme rozumět libovolný prostoročasový posuv slučitelný s vazbovou podmínkou* (1), tj. splňující podmínku

$$\partial_\nu\, \mathrm{G}(x)\, \delta x_\nu = 0\,. \tag{2}$$

Relativisticky invariantní zobecnění zobecnění d'Alembertovy rovnice $(\bar{3})$ je nyní nasnadě:

$$(\mathrm{d}P_\nu/\mathrm{d}\tau - F_\nu)\, \delta x_\nu = 0\,. \tag{3}$$

Srovnáním podmínky (2) s (1a) vidíme, že *skutečný posuv* $\mathrm{d}x_\nu$ *je nyní jedním z virtuálních posuvů* δx_ν. Za virtuální posuv δx_ν můžeme ovšem zvolit také bezčasový posuv $\bar{\delta}x_\nu \equiv (\bar{\delta}x_j, 0)$. V tom případě dostáváme z rovnice (3) rovnice $(\bar{3})$, neboť

$$\mathrm{d}P_j/\mathrm{d}\tau = \gamma_{(u)}\dot{p}_j\,, \quad F_j = \gamma_{(u)}f_j\,,$$

a $\gamma_{(u)} \neq 0$. Rovnice (2) se při $\delta x_\nu = \bar{\delta}x_\nu$ redukuje na rovnici $(\bar{2})$. *Rovnice* $(\bar{2})$ a $(\bar{3})$ *tedy představují speciální, neinvariantní tvar relativistických rovnic* (2) a (3).

Je známo, že z rovnic $(\bar{3})$ *neplynou obecně pohybové rovnice* $\dot{p}_j = f_j$, poněvadž vzhledem k podmínce $(\bar{2})$ složky $\bar{\delta}x_j$ nejsou vzájemně nezávislé. Při odvození správných pohybových rovnic se postupuje tak, že rovnici $(\bar{2})$ násobíme libovolným parametrem $\bar{\lambda}$ a přičteme k $(\bar{3})$. V rovnici

$$(\dot{p}_j - f_j + \bar{\lambda}\, \partial_j\, \mathrm{G}(\boldsymbol{x}, t))\, \bar{\delta}x_j = 0 \tag{$\bar{4}$}$$

nyní určíme $\bar{\lambda}$ tak, aby výraz v jedné ze (tří) závorek vymizel. Ve zbylých dvou členech rovnice jsou pak už $\bar{\delta}x_j$ nezávislé, a proto musí i obě zbývající „závorky" vymizet. Máme tedy celkem rovnice

$$\dot{p}_j = f_j - \bar{\lambda}\, \partial_j\, \mathrm{G}(\boldsymbol{x}, t) \quad (j = 1, 2, 3)\,, \tag{$\bar{5}$}$$

známé to *Lagrangeovy rovnice* 1. *druhu*. Druhé členy na pravých stranách jsou složky *vazbové síly*.

Zcela podobně postupujeme při odvození relativistických pohybových rovnic z rovnic (2) a (3). Rovnici (2) násobíme libovolným parametrem λ a přičteme k (3). V rovnici

$$(\mathrm{d}P_\nu/\mathrm{d}\tau - F_\nu + \lambda\,\partial_\nu \mathrm{G})\,\delta x_\nu = 0 \tag{4}$$

určíme λ tak, aby bylo např.

$$\mathrm{d}P_4/\mathrm{d}\tau - F_4 + \lambda\,\partial_4 \mathrm{G} = 0\,. \tag{5a}$$

Poněvadž složky δx_j jsou už nezávislé, musí platit i rovnice

$$\mathrm{d}P_j/\mathrm{d}\tau - F_j + \lambda\,\partial_j \mathrm{G} = 0\,. \tag{5b}$$

Rovnice (5a, b) lze zapsat souhrnně ve tvaru

$$\mathrm{d}P_\nu/\mathrm{d}\tau = F_\nu - \lambda\partial_\nu \mathrm{G} \tag{6}$$

představujícím relativistické, invariantní zobecnění rovnic $(\bar{5})$. Násobíme-li rovnice $(\bar{5})$ faktorem $\gamma_{(u)}$, dostaneme rovnice (5b) s $\lambda = \bar{\lambda}\gamma_{(u)}$. Rovnice $(\bar{5})$ jsou tedy k rovnicím (6) v tomtéž poměru jako Lorentzovy pohybové rovnice (VI 66) k Minkowského rovnicím (VI 68). Druhé členy na pravých stranách rovnic (6) jsou složky *vazbové čtyřsíly*. Vzhledem k podmínce (2) je vazbová čtyřsíla ortogonální ke všem virtuálním posuvům:

$$\lambda\,\partial_\nu\,\mathrm{G}(x)\,\delta x_\nu = 0\,. \tag{7}$$

Při bezčasovém posuvu $\bar{\delta} x_\mu$ žádá podmínka (7) totéž co nerelativistická podmínka pro vazbovou sílu, tj.

$$\bar{\lambda}\,\partial_j\,\mathrm{G}(\boldsymbol{x}, t)\,\bar{\delta} x_j = 0\,. \tag{$\bar{7}$}$$

Podmínka (7) je tedy přirozeným zobecněním podmínky $(\bar{7})$.

Fyzikální smysl podmínky (7) lze objasnit takto: Poněvadž skutečný posuv je nyní jedním z virtuálních posuvů, platí podmínka (7) (na rozdíl od $(\bar{7})$) i pro skutečný posuv. To znamená, že vazbová čtyřsíla je ortogonální i ke čtyřrychlosti $U_\nu \equiv \mathrm{d}x_\nu/\mathrm{d}\tau$ skutečného pohybu částice a tedy nepřispívá ke změně klidové hmoty m_0. V tom ohledu se tedy podobá Lorentzově čtyřsíle. Lorentzova čtyřsíla je však ortogonální jenom ke skutečnému posuvu $\mathrm{d}x_\mu$, nikoliv ke každému virtuálnímu posuvu δx_μ.

Dosadíme-li do rovnic (6) $P_\nu = m_0 U_\nu$, vidíme, že při daných výrazech $\mathrm{G}(x)$ a $F_\nu(x, U)$ poskytují jen čtyři podmínky pro šest hledaných funkcí $x_\nu(\tau)$, $m_0(\tau)$ a $\lambda(\tau)$. K rovnicím (6) ovšem přistupuje ještě podmínka (1) a podmínka

$$U_\mu U_\mu = -c^2\,. \tag{8}$$

Máme tedy celkem právě správný počet rovnic (šest).

Závěrem je zajisté možno konstatovat, že vyjádření d'Alembertova principu ve tvaru relativisticky invariantních rovnic (3) a (2) je formálně jednotnější a přirozenější než v Newtonově mechanice používané vyjádření (rovnicemi $(\bar{3})$ a $(\bar{2})$), neboť není nutně vázáno na dosti uměle vytvořený pojem bezčasového virtuálního posuvu.

2. HAMILTONŮV PRINCIP V RELATIVISTICKÉ MECHANICE HMOTNÉ ČÁSTICE

2,1. SKUTEČNÁ A VARIOVANÁ SVĚTOČÁRA. OBECNÉ VYJÁDŘENÍ HAMILTONOVA PRINCIPU

Při d'Alembertově principu jsme uvažovali pouze o virtuálních posuvech δx_μ a skutečném posuvu $\mathrm{d}x_\mu$ z jediného (sice libovolně, ale pevně zvoleného) světobodu (x) na světočáře částice. Představme si nyní světočáru Γ znázorňující skutečný pohyb částice mezi světobodem (I) o souřadnicích $x_\mu^{(\mathrm{I})} = x_\mu(\tau_\mathrm{I})$ a světobodem (II) o souřadnicích $x_\mu^{(\mathrm{II})} = x_\mu(\tau_\mathrm{II})$, $\tau_\mathrm{I} < \tau_\mathrm{II}$. V každém jejím světobodě $(x(\tau))$, $\tau_\mathrm{I} \leqq \tau \leqq \tau_\mathrm{II}$, je definován skutečný posuv $\mathrm{d}x_\mu(\tau)$ příslušný k přírůstku vlastního času $\mathrm{d}\tau$. Kromě toho si v každém světobodě $(x(\tau))$ zvolíme virtuální posuv $\delta x_\mu(\tau)$.

Virtuální posuv je sice až na případnou vazbovou podmínku ve tvaru (2) libovolný, ale volíme jej tak, aby veličiny $\delta x_\mu(\tau)$ byly spojitými funkcemi parametru τ se všemi potřebnými derivacemi a aby bylo $\delta x_\mu(\tau_\mathrm{I}) = \delta x_\mu(\tau_\mathrm{II}) = 0$. Světobody o souřadnicích $x_\mu^\star(\tau) = x_\mu(\tau) + \delta x_\mu(\tau)$ pak vyplňují novou spojitou světočáru $\Gamma^\star$ (variovanou), která prochází pevně zvolenými světobody (I), (II), tak jako světočára „skutečného pohybu".

Skutečnému posuvu

$$\mathrm{d}x_\mu(\tau) = x_\mu(\tau + \mathrm{d}\tau) - x_\mu(\tau) = U_\mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

odpovídá na variované světočáře posuv

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_\mu^\star(\tau) &= x_\mu^\star(\tau + \mathrm{d}\tau) - x_\mu^\star(\tau) = \\ &= x_\mu(\tau + \mathrm{d}\tau) + \delta x_\mu(\tau + \mathrm{d}\tau) - \\ &\quad - (x_\mu(\tau) + \delta x_\mu(\tau))\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Tento výraz je možno uspořádat dvojím způsobem: Za prvé lze psát

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_\mu^\star(\tau) &= [x_\mu(\tau + \mathrm{d}\tau) - x_\mu(\tau)] + \\ &+ \delta[x_\mu(\tau + \mathrm{d}\tau) - x_\mu(\tau)] = \mathrm{d}x_\mu(\tau) + \delta\mathrm{d}x_\mu(\tau)\,. \end{aligned} \tag{10a}$$

Ale poněvadž také platí

$$\delta x_\mu(\tau + \mathrm{d}\tau) - \delta x_\mu(\tau) = \mathrm{d}\delta x_\mu(\tau)\,,$$

můžeme, za druhé, psát rovněž

$$dx^{\star}_{\mu}(\tau) = dx_{\mu}(\tau) + d\delta x_{\mu}(\tau)\,. \tag{10b}$$

Porovnáním (10b) s (10a) získáme obvyklý vztah

$$\delta dx_{\mu}(\tau) = d\delta x_{\mu}(\tau)\,. \tag{11}$$

Přírůstku vlastního času $d\tau = c^{-1}(-dx_\nu\, dx_\nu)^{\frac{1}{2}}$ na světočáře skutečného pohybu odpovídá na variované světočáře veličina

$$d\tau^{\star} = c^{-1}(-dx^{\star}_{\nu}\, dx^{\star}_{\nu})^{\frac{1}{2}}\,.$$

Užitím (10b) dostáváme pro $d\tau^{\star}$ (až na malé veličiny vyššího řádu) vyjádření

$$d\tau^{\star} \doteq d\tau[1 - (c\, d\tau)^{-2}\, dx_\nu\, d\delta x_\nu]\,, \tag{12}$$

takže

$$\delta d\tau \equiv d\tau^{\star} - d\tau \doteq -c^{-2} U_\nu\, d\delta x_\nu\,. \tag{13}$$

Vzorec (13) lze odvodit též přímo ze vzorce pro $d\tau^2$, neboť platí

$$\delta(d\tau^2) = 2\, d\tau\, \delta d\tau = -c^{-2}\, \delta(dx_\nu\, dx_\nu) = -2c^{-2}\, dx_\nu\, \delta dx_\nu\,,$$

a tedy opět, s použitím vztahu (11),

$$\delta d\tau = -c^{-2} U_\nu\, \delta dx_\nu = -c^{-2} U_\nu\, d\delta x_\nu\,.$$

Volíme-li $\tau^{\star}_{\mathrm{I}} = \tau_{\mathrm{I}}$, dostáváme z rovnice (12) integrací

$$\tau^{\star} = \tau_{\mathrm{I}} + \int_{\tau_{\mathrm{I}}}^{\tau} [1 - c^{-2}\, U_\nu(\tau)\, d\delta x_\nu(\tau)/d\tau]\, d\tau = \tau^{\star}(\tau)\,.$$

Vypočteme-li odtud obráceně $\tau = \tau(\tau^{\star})$, můžeme vyjádřit souřadnice $x^{\star}_{\mu}$ světobodů na variované světočáře i jako funkce „vlastního času“ $\tau^{\star}$, dále definovat složky čtyřrychlosti $U^{\star}_{\mu} = dx^{\star}_{\mu}/d\tau^{\star}$ ve světobodech $x^{\star}_{\mu}(\tau^{\star})$, atp. Použitím (10b) a (12) dostáváme vyjádření

$$U^{\star}_{\mu} \doteq U_\mu + d\delta x_\mu/d\tau + c^{-2} U_\mu U_\nu\, d\delta x_\nu/d\tau\,,$$

takže

$$\delta U_\mu(\tau) \equiv U^{\star}_{\mu}(\tau^{\star}) - U_\mu(\tau) = (\delta_{\mu\nu} + c^{-2} U_\mu U_\nu)\, d\delta x_\nu/d\tau\,. \tag{14}$$

Platí tedy $U_\mu\, \delta U_\mu = 0$, jak je třeba, aby i pro $U^{\star}_{\mu} \equiv U_\mu + \delta U_\mu$ byla do veličin 1. řádu splněna podmínka $U^{\star}_{\mu} U^{\star}_{\mu} = U_\mu U_\mu = -c^2$. Formuli (14) lze získat též přímo variací U_μ, neboť máme

$$\delta U_\mu = \delta(dx_\mu/d\tau) = \delta dx_\mu/d\tau + dx_\mu\, \delta(1/d\tau) =$$

$$= d\delta x_\mu/d\tau - (d\tau)^{-2}\, dx_\mu\, \delta d\tau\,; \tag{14a}$$

po dosazení z (13) plyne již opět (14).

V dalším výkladu si ukážeme, že skutečný pohyb částice mezi světobody (I) a (II) je charakterizován tím, že jistý integrál, který má obecně tvar

$$\mathscr{S}_{(\mathrm{I},\mathrm{II})} = \int_{(\mathrm{I})}^{(\mathrm{II})} \Lambda(x, U)\, d\tau\,, \tag{15}$$

je stacionární při popsaných variacích světočáry Γ, tj. platí rovnice

$$\delta\mathscr{S}_{(\mathrm{I},\mathrm{II})} \equiv \delta \int_{(\mathrm{I})}^{(\mathrm{II})} \Lambda(x, U)\, d\tau = \int_{(\mathrm{I})}^{(\mathrm{II})} \Lambda(x^{\star}, U^{\star})\, d\tau^{\star} - \int_{(\mathrm{I})}^{(\mathrm{II})} \Lambda(x, U)\, d\tau \doteq$$

$$\doteq \int_{(\mathrm{I})}^{(\mathrm{II})} (\delta\Lambda\, d\tau + \Lambda\, \delta d\tau) = 0\,. \tag{16}$$

Přitom $\Lambda(x, U)$ je jistý invariantní výraz utvořený ze složek čtyřrychlosti $U_\mu(\tau)$ a z veličin charakterizujících vnější pole ve světobodech $x(\tau)$.

Rovnice (16) vyjadřuje *relativisticky invariantní Hamiltonův princip* a výraz Λ je invariantní *Lagrangeova funkce.* Konkrétní tvar Lagrangeovy funkce závisí na tvaru výrazů definujících složky Minkowského čtyřsíly F_μ. V důležitých speciálních případech jej explicite určíme. Nyní si z variačního principu (16) ještě odvodíme Lagrangeovy pohybové rovnice 2. druhu pro souřadnice $x_\mu(\tau)$.

Variaci $\delta\Lambda(x, U)$ v posledním integrálu v (16) je možno vyjádřit posuvy δx_μ a variacemi δU_μ takto:

$$\delta\Lambda = (\partial\Lambda/\partial x_\mu)\, \delta x_\mu + (\partial\Lambda/\partial U_\mu)\, \delta U_\mu\,.$$

Dosadíme-li ještě za δU_μ a $\delta d\tau$ výrazy (14) a (13), nabude rovnice (16) tvaru

$$\int_{(\mathrm{I})}^{(\mathrm{II})} \left\{\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\nu}\, \delta x_\nu + \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial U_\mu}\,(\delta_{\mu\nu} + c^{-2} U_\mu U_\nu) - c^{-2}\Lambda U_\nu\right] \frac{d\delta x_\nu}{d\tau}\right\} dt = 0\,.$$

Druhý člen ve svorce integrujeme per partes. Poněvadž $\delta x_\nu(\tau_{\mathrm{I}}) = \delta x_\nu(\tau_{\mathrm{II}}) = 0$, dostáváme

$$\int_{(\mathrm{I})}^{(\mathrm{II})} \left\{\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\nu} - \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial U_\nu} + c^{-2}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial U_\mu}\, U_\mu - \Lambda\right) U_\nu\right]\right\} \delta x_\nu\, d\tau = 0\,. \tag{16a}$$

Nejsou-li předepsány žádné vazby, jsou variace $\delta x_\nu(\tau)$ libovolné a nezávislé funkce τ, a proto musí výrazy ve svorkách v integrálu na levé straně (16a) vymizet (pro všecka τ). Z variačního principu (16) tedy plynou rovnice

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\nu} - \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial U_\nu} + c^{-2}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial U_\mu}\, U_\mu - \Lambda\right) U_\nu\right] = 0\,. \tag{17}$$

Při invariantní Lagrangeově funkci Λ jsou i rovnice (17) invariantní vůči Lorentzovým transformacím (jejich levé strany tvoří čtyřvektor).

Je-li pro $\delta x_\nu(\tau)$ předepsána omezující vazbová podmínka (2), tj. rovnice

$$\partial_\nu \, G(x(\tau)) \, \delta x_\nu(\tau) = 0 \,, \tag{18}$$

platná pro všecka τ ($\tau_I \leqq \tau \leqq \tau_{II}$), postupujeme při odvozování Lagrangeových rovnic takto: Vazbovou rovnici (18) násobíme $\lambda(\tau) \, d\tau$, integrujeme od (I) do (II) a rovnici

$$\int_{(I)}^{(II)} \lambda(\partial_\nu G) \, \delta x_\nu \, d\tau = 0$$

sečteme s (16a). Místo (16a) tak dostaneme rovnici

$$\int_{(I)}^{(II)} \left(\left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} - \ldots \right\} + \lambda \frac{\partial G(x)}{\partial x_\nu} \right) \delta x_\nu \, d\tau = 0 \,.$$

Lagrangeův součinitel $\lambda(\tau)$ určíme tak, aby např. faktor $(\ldots)$ u $\delta x_4(\tau)$ vymizel. Zbývající variace $\delta x_j(\tau)$ jsou už potom nezávislé a faktory u nich stojící musí také vymizet. Dostaneme tedy místo (17) rovnice odlišné pouze přídavným členem $\lambda \, \partial G/\partial x_\nu$ k levé straně. Poněvadž započtení vlivu vazbových podmínek v rovnicích (17) je, jak jsme právě viděli, jednoduché, omezíme se v dalších příkladech jen na pohyb bez vazeb.

2,2. LAGRANGEOVY FUNKCE A POHYBOVÉ ROVNICE PRO DŮLEŽITÉ SPECIÁLNÍ PŘÍPADY ČÁSTICE VE VNĚJŠÍM POLI

Abychom explicite určili výrazy pro Lagrangeovu funkci Λ v důležitých příkladech vnějších polí působících na hmotnou částici, vyjdeme z d'Alembertova principu (3). Tuto rovnici, která ovšem platí v každém světobodě $x_\mu(\tau)$, $\tau_I \leqq \tau \leqq \tau_{II}$, násobíme $(-d\tau)$ a integrujeme podle τ od světobodu (I) do (II):

$$\int_{(I)}^{(II)} [F_\nu \, \delta x_\nu - (dP_\nu/d\tau) \, \delta x_\nu] \, d\tau = 0 \,. \tag{19}$$

Druhý člen integrujeme per partes. S ohledem na $\delta x_\nu(\tau_I) = 0$, $\delta x_\nu(\tau_{II}) = 0$ a $P_\nu = m_0 U_\nu$ dostaneme rovnici

$$\int_{(I)}^{(II)} (m_0 U_\nu \, d\delta x_\nu/d\tau + F_\nu \, \delta x_\nu) \, d\tau = 0 \,, \tag{19a}$$

kterou převedeme použitím vztahu (13) dále na tvar

$$\int_{(I)}^{(II)} (-m_0 c^2 \, \delta d\tau + F_\nu \, \delta x_\nu \, d\tau) = 0 \,. \tag{19b}$$

Poslední úpravu, na konečný tvar (16), budeme již provádět jen ve speciálních případech čtyřsíly F_ν.

a) Všimněme si nejprve nejjednoduššího příkladu úplně *volné částice*, kdy $F_\nu \equiv 0$. Potom je při skutečném pohybu $m_0 =$ konst, $U_\nu =$ konst a světočára znázorňující skutečný pohyb částice je přímka. Při variace této světočáry mezi zvolenými pevnými světobody (I) a (II) se čtyřrychlost U_ν nutně mění, neboť variace δU_ν je podle (14) kinematicky podmíněna a určena variací světočáry. Naproti tomu variace m_0 není kinematicky podmíněna variací světočáry a proto budeme m_0 pokládat při variaci za konstantní, tj. předepíšeme $\delta m_0 = 0$. Rovnici (19b) s $F_\nu \equiv 0$ je pak možno zapsat ve tvaru

$$\int_{(I)}^{(II)} (-m_0 c^2) \, \delta d\tau = \delta \int_{(I)}^{(II)} (-m_0 c^2) \, d\tau = 0 \,, \tag{20}$$

takže v tomto speciálním případě můžeme volit $\Lambda(x, U) = -m_0 c^2 =$ konst.

Invariantní Lagrangeova funkce $\Lambda(x, U)$ není ovšem rovnicí (20) určena jednoznačně. K uvedenému výrazu můžeme např. přidat funkci $\omega(x, U)$ sestrojenou z libovolné funkce $\chi(x)$ takto:

$$\omega(x, U) = U_\mu \, \partial_\mu \, \chi(x) = \frac{d}{d\tau} \chi(x(\tau)) \,.$$

Vzhledem k podmínce $\delta x_\mu(\tau_I) = \delta x_\mu(\tau_{II}) = 0$ *nepřispívá* funkce $\omega(x, U)$ *k variaci* integrálu (15), neboť *k němu přidává* pouze členy $\chi(x^{(I)}) - \chi(x^{(II)})$. Nepřispívá ani k levé straně rovnic (17). Můžeme tedy volit $\omega \equiv 0$, a $\Lambda = -m_0 c^2$. V pohybových rovnicích (17) pak zbývá jediný člen:

$$-c^{-2} \frac{d}{d\tau} (\Lambda U_\nu) = -\frac{d}{d\tau} (m_0 U_\nu) = -dP_\nu/d\tau = 0 \,.$$

Hamiltonův variační princip (20) lze v daném systému S zapsat také ve tvaru obvyklém v Newtonově mechanice. Dosadíme $d\tau = \gamma_{(u)}^{-1} \, dt$ a variace δx_μ omezíme na izochronní variace $\bar{\delta} x_\mu \equiv (\bar{\delta} x_j(t), \bar{\delta} x_4 = ic \, \bar{\delta} t = 0)$. Rovnice (20) tím nabude tvaru

$$\bar{\delta} \int_{(I)}^{(II)} (-m_0 c^2 \gamma_{(u)}^{-1}) \, dt = 0 \,. \tag{21}$$

Symbol $\bar{\delta}$ před integrálem znamená, že máme provést *izochronní* variaci s $\bar{\delta} t = 0$, $\bar{\delta} dt = 0$.

Výraz

$$\mathscr{L} = \Lambda \gamma_{(u)}^{-1} = -m_0 c^2 \gamma_{(u)}^{-1} = -m_0 c^2 (1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

udává *obyčejnou Lagrangeovu funkci volné částice v relativistické mechanice*. Funkce $\mathscr{L}$ *sice není invariantní* vůči Lorentzovým transformacím, *ale je relativistická* v tom smyslu, že výraz $\mathscr{L} \, dt = \mathscr{L}' \, dt'$ je invariantní, neboť $\gamma_{(u)}^{-1} \, dt = \gamma_{(u')}^{-1} \, dt' = d\tau$. V systému S, v němž je $u \ll c$, máme přibližně

$$\mathscr{L} \doteq -m_0 c^2 (1 - \tfrac{1}{2} u^2/c^2) = \tfrac{1}{2} m_0 u^2 - m_0 c^2 \,,$$

tedy až na aditivní konstantu, která nepřispívá k variaci integrálu v rovnici (21), *Lagrangeovu funkci* $\mathscr{L}^{(N)} = \mathscr{E}^{(N)}_{\text{kin}}$ *volné částice v Newtonově mechanice.*

Z variačního principu

$$\bar{\delta} \int_{t_I}^{t_{II}} \mathscr{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\, dt = 0 \tag{23}$$

plynou, jak známo, Lagrangeovy rovnice 2. druhu ve tvaru

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_j}\right) = 0\,. \tag{24}$$

Použijeme-li v těchto rovnicích za $\mathscr{L}$ výrazu (22), dostáváme

$$\partial\mathscr{L}/\partial x_j = 0\,, \quad \partial\mathscr{L}/\partial u_j = m_0\gamma_{(u)}u_j = mu_j \equiv p_j\,, \tag{25}$$

a z (24) tedy plyne obyčejná vektorová pohybová rovnice $d\boldsymbol{p}/dt = 0$. K ní nutno ovšem dodat podmínku $dm_0/dt = 0$, zatímco čtyřvektorová rovnice $dP_\nu/d\tau = 0$ takový dodatek nepotřebuje.

Sestrojme si ještě *obyčejnou Hamiltonovu funkci* $\mathscr{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ *příslušnou k Lagrangeově funkci* (22). Podle známého předpisu je

$$\mathscr{H} = (\partial\mathscr{L}/\partial u_j)\, u_j - \mathscr{L} = m_0\gamma_{(u)}u^2 + m_0c^2\gamma_{(u)}^{-1} =$$
$$= m_0c^2\gamma_{(u)}(u^2/c^2 + \gamma_{(u)}^{-2}) = m_0c^2\gamma_{(u)} = \mathscr{E}\,.$$

Dostáváme tedy podle (VI 77)

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = c(p^2 + m_0^2c^2)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{26}$$

Hamiltonovy pohybové rovnice pak dávají

$$dx_j/dt \equiv u_j = \partial\mathscr{H}/\partial p_j = c^2p_j/\mathscr{E} = m^{-1}p_j\,,$$
$$dp_j/dt = -\partial\mathscr{H}/\partial x_j = 0\,,$$

a z nich plyne rovnice energie

$$d\mathscr{E}/dt = d\mathscr{H}/dt = (\partial\mathscr{H}/\partial x_j)\, u_j + (\partial\mathscr{H}/\partial p_j)\, dp_j/dt = 0\,.$$

b) Přistupme nyní k důležitému případu elektricky *nabité částice ve vnějším elektromagnetickém poli.* Pro složky čtyřsíly F_ν platí vzorce

$$F_\nu = ec^{-1}F_{\nu\mu}U_\mu = ec^{-1}U_\mu(\partial_\nu\varphi_\mu - \partial_\mu\varphi_\nu)\,.$$

Složky čtyřpotenciálu φ_μ vnějšího pole jsou ovšem funkcemi *pouze* souřadnic $x_\mu(\tau)$ světobodu na světočáře naší částice (nezávisí explicite na čtyřrychlosti $U_\mu(\tau)$). Výraz $F_\nu\, \delta x_\nu$ lze tedy upravit na tvar

$$F_\nu\, \delta x_\nu = ec^{-1}[U_\mu\, \delta\varphi_\mu - (d\varphi_\nu/d\tau)\, \delta x_\nu]$$

a integrál z tohoto výrazu možno upravit takto:

$$\int_{(I)}^{(II)} F_\nu\, \delta x_\nu\, d\tau = ec^{-1} \int_{(I)}^{(II)} (U_\nu\, \delta\varphi_\nu + \varphi_\nu\, d\delta x_\nu/d\tau)\, d\tau\,.$$

(V prvním členu jsme sčítací index μ přejmenovali na ν, v druhém členu jsme integrovali per partes.) Podle (14a) však platí

$$d\delta x_\nu/d\tau = \delta U_\nu + (d\tau)^{-1}\, U_\nu\, \delta d\tau\,, \tag{27}$$

a můžeme tedy psát (se samozřejmou podmínkou $\delta e = 0$)

$$\int_{(I)}^{(II)} F_\nu\, \delta x_\nu\, d\tau = ec^{-1} \int_{(I)}^{(II)} [\delta(\varphi_\nu U_\nu)\, d\tau + \varphi_\nu U_\nu\, \delta d\tau] = \delta \int_{(I)}^{(II)} ec^{-1}\varphi_\nu U_\nu\, d\tau\,.$$

Při pohybu částice pod vlivem elektromagnetické čtyřsíly je klidová hmota m_0 konstantní jako u volné částice. Budeme ji opět pokládat za konstantní i při variaci světočáry a rovnici (19b) zapíšeme takto:

$$\delta \int_{(I)}^{(II)} (-m_0c^2 + ec^{-1}\varphi_\nu U_\nu)\, d\tau = 0\,. \tag{28}$$

Výraz

$$\Lambda(x, U) \equiv -m_0c^2 + ec^{-1}U_\mu\, \varphi_\mu(x) \tag{29}$$

je tedy invariantní Lagrangeovou funkcí pro pohyb elektricky nabité částice ve vnějším elektromagnetickém poli popsaném čtyřpotenciálem $\varphi_\mu(x) \equiv (\boldsymbol{A}(x), i\varphi(x))$.

Dosaďme nyní (29) do (17). Platí zřejmě

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi_\mu}\, \partial_\nu\varphi_\mu = ec^{-1}U_\mu\, \partial_\nu\varphi_\mu\,,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial U_\nu} = ec^{-1}\varphi_\nu\,, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial U_\nu}\right) = ec^{-1}U_\mu\, \partial_\mu\varphi_\nu\,,$$

a

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial U_\mu}\, U_\mu - \Lambda = m_0c^2\,.$$

Rovnice (17) tedy dávají

$$ec^{-1}(\partial_\nu\varphi_\mu - \partial_\mu\varphi_\nu)\, U_\mu - d(m_0U_\nu)/d\tau = 0\,,$$

tj.

$$dP_\nu/d\tau = ec^{-1}F_{\nu\mu}U_\mu = F_\nu\,.$$

To jsou vskutku správné Minkowského pohybové rovnice pro elektricky nabitou částici.

Pro obyčejnou Lagrangeovu funkci $\mathscr{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \equiv \Lambda\gamma_{(u)}^{-1}$ dostáváme nyní výraz

$$\mathscr{L} = -m_0c^2\gamma_{(u)}^{-1} + ec^{-1}\,\boldsymbol{A}\,.\,\boldsymbol{u} - e\varphi\,. \tag{30}$$

Snadno se přesvědčíme, že Lagrangeovy rovnice (24) s Lagrangeovou funkcí (30) vedou vskutku na Lorentzovy pohybové rovnice

$$\mathrm{d}(mu_j)/\mathrm{d}t = e(E_j + c^{-1}F_{jk}u_k) \equiv f_j\,. \tag{31}$$

Poněkud složitější je vyjádření Hamiltonovy funkce $\mathscr{H}$. Podle obyčejného předpisu dostaneme sice s Lagrangeovou funkcí (30) výraz

$$\mathscr{H} = (\partial\mathscr{L}/\partial u_j)\,u_j - \mathscr{L} = m_0\gamma_{(u)}c^2 + e\varphi =$$
$$= \mathscr{E} + e\varphi = c(p^2 + m_0^2c^2)^{\frac{1}{2}} + e\varphi\,, \tag{32}$$

ale to není konečný tvar. *Hamiltonovu funkci musíme vyjádřit jako funkci „hybností" kanonicky sdružených se souřadnicemi* x_j, tj. veličin

$$\pi_j \equiv \partial\mathscr{L}/\partial u_j = mu_j + ec^{-1}A_j = p_j + ec^{-1}A_j\,. \tag{33}$$

Konečný výraz pro funkci $\mathscr{H}$ tedy zní

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\pi}, t) = c[(\boldsymbol{\pi} - ec^{-1}\boldsymbol{A})^2 + m_0^2c^2]^{\frac{1}{2}} + e\varphi\,. \tag{32a}$$

Závislost $\mathscr{H}$ na $\boldsymbol{x}$ a explicitní závislost na t je obsažena v potenciálech $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ a $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$.

Chceme-li z Hamiltonovy funkce (32a) odvodit Lorentzovy pohybové rovnice (31), musíme postupovat takto: Z první série Hamiltonových rovnic dostáváme

$$\mathrm{d}x_j/\mathrm{d}t \equiv u_j = \partial\mathscr{H}/\partial\pi_j = c^2(\mathscr{H} - e\varphi)^{-1}\,(\pi_j - ec^{-1}A_j)\,.$$

Odtud máme

$$\gamma_{(u)}^{-1} = (1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}} = m_0c^2(\mathscr{H} - e\varphi)^{-1}\,,$$

čili

$$\mathscr{H} - e\varphi = m_0c^2\gamma_{(u)} = mc^2 = \mathscr{E}\,,$$

v souhlase s (32). Můžeme tedy psát, že

$$u_j = m^{-1}(\pi_j - ec^{-1}A_j)\,,$$

a odtud plyne

$$\pi_j = mu_j + ec^{-1}A_j = p_j + ec^{-1}A_j\,,$$

v souhlase s (33).

Druhá série Hamiltonových rovnic pak dává

$$\frac{\mathrm{d}\pi_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} + ec^{-1}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_k}u_k + \frac{\partial A_j}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_j} = ec^{-1}u_k\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - e\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,,$$

tj. opět rovnici (31).

Nerelativistická aproximace $\mathscr{H}^{(\mathrm{N})}$ Hamiltonovy funkce (32a), použitelná při $p^2 \ll m_0^2c^2$, je určena výrazem

$$\mathscr{H}^{(\mathrm{N})} = \mathscr{H} - m_0c^2 \doteq (2m_0)^{-1}(\boldsymbol{\pi} - ec^{-1}\boldsymbol{A})^2 + e\varphi\,. \tag{34}$$

Tato funkce je velmi důležitá pro atomovou fyziku (nerelativistickou kvantovou mechaniku elektronu).

Ze vzorců (32) a (33) je vidět, že veličiny $(\boldsymbol{\pi}, (\mathrm{i}/c)\,\mathscr{H})$ tvoří čtyřvektor

$$\Pi_\mu = P_\mu + ec^{-1}\varphi_\mu\,, \tag{35}$$

tzv. kanonickou čtyřhybnost elektricky nabité hmotné částice v elektromagnetickém poli. Na základě vztahu $P_\mu P_\mu = -m_0^2c^2$ splňuje čtyřvektor Π_μ rovnici

$$(\Pi_\mu - ec^{-1}\varphi_\mu)(\Pi_\mu - ec^{-1}\varphi_\mu) + m_0^2c^2 = 0\,,$$

z níž se vycházelo při prvních pokusech o formulaci *relativistické kvantové teorie* elektricky nabitých elementárních částic v elektromagnetickém poli.

Jak už víme, nejsou potenciály $\boldsymbol{A}$ a φ jednoznačně určeny intenzitami pole $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, a proto to nejsou přímo měřitelné fyzikální veličiny. Totéž platí i o veličinách Λ, $\mathscr{L}$, $\mathscr{H}$ a π_j definovaných vzorci (29), (30), (32a) a (33). Jsou to obecně jen pomocné matematické veličiny, jejichž zavedení a používání je výhodné z důvodů formálních. Veličinám $\mathscr{H}$ a π_j lze dát názornou fyzikální interpretaci pouze při speciální volbě elektromagnetických potenciálů (při tzv. coulombovské nebo radiační kalibraci). O těchto věcech, důležitých pro kvantovou teorii atomů a záření, se podrobnější poučení najde např. v učebnicích [43, 44]. Je však nutno poznamenat, že Lagrangeova funkce Λ daná výrazem (29) závisí na volbě kalibrace čtyřpotenciálu φ_μ jen zcela nepodstatně. Při substituci $\varphi_\mu \to \bar{\varphi}_\mu = \varphi_\mu + \partial_\mu\chi(x)$ se totiž změní jen o člen

$$\omega(x, U) = ec^{-1}U_\mu\,\partial_\mu\chi = ec^{-1}\,\mathrm{d}\chi/\mathrm{d}\tau\,,$$

který nepřispívá k variaci (16) integrálu (15), a proto ani nikterak nezmění Minkowského pohybové rovnice. Integrál (15) se totiž změní jen o členy $ec^{-1}[\chi(x^{(\mathrm{II})}) - \chi(x^{(\mathrm{I})})]$, jejichž variace je nulová v důsledku podmínky $\delta x_\mu(\tau_{\mathrm{I}}) = \delta x_\mu(\tau_{\mathrm{II}}) = 0$. Na levé straně rovnic (17) se příspěvky od $\omega(x, U)$ ruší. Lagrangeova funkce (29) je tedy „prakticky" invariantní vůči kalibrační transformaci čtyřpotenciálu $\varphi_\mu(x)$.

c) Jako poslední příklad uveďme Lagrangeovu funkci pro pohyb nukleonu v daném skalárním mezickém poli, který jsme zkoumali v odst. VI 7,2. Nalezli jsme, že při pohybu pod vlivem čtyřsíly (VI 120) je klidová hmota částice m_0 funkcí světobodu $x(\tau)$ – viz (VI 121). Dosadíme-li z (VI 120) a (VI 121) do (19b), dostaneme rovnici

$$\int_{(\mathrm{I})}^{(\mathrm{II})}[-(\overline{m}_0c^2 + g\,\psi(x))\,\delta\mathrm{d}\tau - \delta(g\,\psi(x))\,\mathrm{d}\tau] = 0\,.$$

Veličina $\overline{m}_0$ je při pohybu částice konstantní a proto ji budeme pokládat za konstantní i při variaci světočáry. S podmínkou $\delta\overline{m}_0 = 0$ je však poslední rovnice ekvivalentní rovnici

$$\delta \int_{(I)}^{(II)} [-(\overline{m}_0 c^2 + g\psi)] \, d\tau = 0 \,. \tag{36}$$

Za Lagrangeovu funkci Λ můžeme tedy volit výraz

$$\Lambda \equiv -(\overline{m}_0 c^2 + g\, \psi(x)) \,. \tag{37}$$

Poněvadž nyní platí

$$\partial\Lambda/\partial U_\nu = 0 \,, \quad \partial\Lambda/\partial x_\nu = -g\, \partial_\nu \psi \,,$$

dostáváme dosazením do Lagrangeových rovnic (17) pohybové rovnice

$$-g\, \partial_\nu \psi - d[c^{-2}(\overline{m}_0 c^2 + g\psi)\, U_\nu]/d\tau = 0 \,,$$

čili

$$d(m_0 U_\nu)/d\tau = -g\, \partial_\nu \psi \tag{38}$$

v souhlase s předpokladem (VI 120). Přitom jsme podle (VI 121) zavedli opět hmotu $m_0 = \overline{m}_0 + c^{-2} g\psi$.

2,3. HEURISTICKÝ POSTUP PŘI SESTROJENÍ LAGRANGEOVY FUNKCE

V uvedených příkladech jsme při hledání Lagrangeovy funkce $\Lambda(x, U)$ vycházeli z rovnice (19b) plynoucí z d'Alembertova principu (3) popř. z rovnice (19). Požadavek, aby se zákon pohybu hmotné částice v daném silovém poli mohl zapsat ve tvaru Hamiltonova principu

$$\delta \int_{(I)}^{(II)} \Lambda(x, U) \, d\tau = 0$$

a aby přitom Lagrangeova funkce Λ byla *invariantním výrazem utvořeným ze složek čtyřrychlosti U_μ a veličin popisujících dané vnější pole*, omezuje možné tvary funkce Λ tak silně, že v mnoha případech lze tento výraz určit přímo, bez použití rovnice (19b). Ukažme si to na příkladech probraných v odst. 2,2.

Při volné částici, charakterizované konstantní klidovou hmotou m_0, může ovšem funkce Λ záviset pouze na čtyřrychlosti U_μ, neboť nemáme vnější pole ani veličiny závislé explicite na souřadnicích světobodu $x_\mu(\tau)$. Jediný invariant, který se dá utvořit ze čtyřrychlosti U_μ, je její kvadrát $U_\mu U_\mu$. Ten však má konstantní hodnotu $-c^2$. Funkce Λ tedy musí být konstantou. Její hodnotu $-m_0 c^2$ lze pak určit z požadavku, aby platil vztah

$$\partial\mathscr{L}/\partial u_j = \partial(\Lambda\gamma_{(u)}^{-1})/\partial u_j = p_j = m_0 \gamma_{(u)} u_j \,.$$

Jako druhý příklad vezměme částici charakterizovanou konstantní klidovou hmotou m_0 a elektrickým nábojem e ve vnějším elektromagnetickém poli popsaném čtyřpotenciálem $\varphi_\mu(x)$. Vymizí-li tenzor intenzit pole $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu$, tj., je-li $\varphi_\mu \equiv 0$ nebo $\varphi_\mu = \partial_\mu \chi(x)$, musí se funkce $\Lambda(x, U)$ redukovat „prakticky" na konstantu $-m_0 c^2$. (Obecně se v tom případě může Λ lišit od $-m_0 c^2$ jen o funkci $\omega(x, U)$ ve tvaru $d\chi(x)/d\tau$, která nepřispívá k variaci integrálu $\mathscr{S}_{(I,II)}$.) Je tedy přirozené hledat výraz Λ ve tvaru součtu konstanty $-m_0 c^2$ a invariantního výrazu utvořeného ze čtyřrychlosti U_μ a veličin φ_μ popř. $F_{\mu\nu}$. Výraz Λ musí být „prakticky" invariantní vůči změnám kalibrace čtyřpotenciálu φ_μ. Kromě toho je možno požadovat, aby pro čtyřsílu platil obecně princip superpozice. Hledaný výraz pak musí být lineární ve veličinách popisujících pole. Za těchto podmínek přichází v úvahu jedině invariant $K\varphi_\mu U_\mu$, neboť druhé invarianty splňující uvedené podmínky, totiž $F_{\mu\nu}U_\mu U_\nu$ a $U_\mu\, \partial_\nu F_{\mu\nu}$, jsou nulové (první v důsledku antisymetrie $F_{\mu\nu}$, druhý proto, že vnější pole v okolí světočáry naší částice splňuje Maxwellovy rovnice $\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0$). Po odvození pohybových rovnic z Lagrangeovy funkce

$$\Lambda \equiv -m_0 c^2 + K\varphi_\mu U_\mu$$

se zjistí, že konstanta K má význam e/c.

Podobně je možno postupovat při konstrukci Lagrangeovy funkce Λ pro hmotnou částici v poli popsaném skalárním potenciálem $\psi(x)$. Má-li částice při $\psi = 0$ klidovou hmotu $\overline{m}_0$, a hledáme-li funkci Λ opět ve tvaru $\Lambda = -\overline{m}_0 c^2$ plus invariant lineární ve veličinách ψ a $\partial_\nu\psi$, nalezneme, že jediný možný výraz je

$$\Lambda = -(\overline{m}_0 c^2 + g\psi) \,,$$

neboť invariant

$$U_\nu\, \partial_\nu\, \psi(x(\tau)) = d\psi/d\tau$$

nepřispívá k variaci integrálu $\mathscr{S}_{(I,II)}$.

Vidíme tedy, že v teorii relativity se Hamiltonův princip stává užitečným heuristickým principem, tj. zásadou usnadňující hledání možných forem konkrétních fyzikálních zákonů. Tato vlastnost Hamiltonova principu se ještě výrazněji projevuje v teorii pole.

Poznámka

Než přistoupíme k dalším variačním principům relativistické fyziky, bude užitečné upozornit na to, že veličiny definované na světočáře Γ hmotného bodu můžeme při její variaci (mezi pevnými světobody (I) a (II)) variovat i jinak než způsobem zavedeným v odst. 2,1. Lze např. postupovat tak, že souřadnice $x^\star_\mu(\tau) = x_\mu(\tau) + \delta x_\mu(\tau)$ světobodů na variované světočáře $\Gamma^\star$ ponecháme vyjádřeny jako funkce parametru τ a čtyřvektor $U^\star_\mu$ *definujeme* vzorcem $U^\star_\mu = dx^\star_\mu/d\tau$. *Parametr τ a čtyřvektor $U^\star_\mu$* sice obecně *nemají na $\Gamma^\star$ stejný fyzikální nebo geometrický význam, jaký mají τ*

a U_μ *na světočáře* Γ (odpovídající skutečnému pohybu), ale zato nyní můžeme při variaci nahradit formule (13) a (14) jednoduššími vztahy

$$\delta \mathrm{d}\tau = 0\,, \tag{13 A}$$

$$\delta U_\mu \equiv \delta(\mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}\tau) = \mathrm{d}\delta x_\mu/\mathrm{d}\tau\,. \tag{14 A}$$

Při takto definované variaci δU_μ se ovšem veličina $U_\mu U_\mu$ nezachovává, neboť obecně $U_\mu\,\delta U_\mu \neq 0$. *Splnění podmínky* $U_\mu U_\mu = -c^2$, čili $\mathrm{d}\tau = c^{-1}(-\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu)^{\frac{1}{2}}$ *požadujeme nyní pouze na světočáře* Γ *skutečného pohybu hmotného bodu.*

Variaci integrálu (15) nyní definujeme a počítáme takto

$$\delta\mathscr{S}_{(\mathrm{I},\mathrm{II})} = \int_{\tau_\mathrm{I}}^{\tau_\mathrm{II}} \delta\Lambda(x, U)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_\mathrm{I}}^{\tau_\mathrm{II}} \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\nu}\,\partial x_\nu + \frac{\partial\Lambda}{\partial U_\nu}\,\partial U_\nu\right)\mathrm{d}\tau\,.$$

Dosadíme-li za δU_ν podle (14 A) a integrujeme per partes, dostaneme podmínku $\delta\mathscr{S}_{(\mathrm{I},\mathrm{II})} = 0$ ve tvaru

$$\int_{\tau_\mathrm{I}}^{\tau_\mathrm{II}} \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial U_\nu}\right)\right]\delta x_\nu\,\mathrm{d}\tau = 0\,, \tag{16 A}$$

a pohybové rovnice tedy ve tvaru

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial U_\nu}\right) = 0\,. \tag{17 A}$$

Abychom z rovnic (17 A) dostali v konkrétních případech správné pohybové rovnice (stejné jako dříve z rovnic (17)), musíme ovšem Lagrangeovu funkci Λ v (17 A) zvolit jinak než v (17). *Pro volný hmotný bod* můžeme za Λ volit buď výraz

$$\Lambda_{(01)} = -m_0 c(-U_\mu U_\mu)^{\frac{1}{2}}$$

nebo

$$\Lambda_{(02)} = \tfrac{1}{2} m_0 U_\mu U_\mu\,.$$

V obou případech je $\partial\Lambda_{(0)}/\partial x_\nu = 0$, ale

$$\partial\Lambda_{(01)}/\partial U_\nu = m_0 c U_\nu (-U_\mu U_\mu)^{-\frac{1}{2}}\,,$$

kdežto

$$\partial\Lambda_{(02)}/\partial U_\nu = m_0 U_\nu\,.$$

Při dosazení do rovnice (17 A) (která už platí jen pro skutečný pohyb) klademe $U_\mu U_\mu = -c^2$, takže obě Lagrangeovy funkce $\Lambda_{(01)}$ i $\Lambda_{(02)}$ vedou nakonec ke stejné pohybové rovnici

$$\mathrm{d}(m_0 U_\nu)/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}P_\nu/\mathrm{d}\tau = 0\,.$$

Pro elektricky nabitý hmotný bod ve vnějším elektromagnetickém poli je Λ dáno výrazem

$$\Lambda_{(e)} = \Lambda_{(0)} + ec^{-1} U_\mu\,\varphi_\mu(x)\,,$$

v němž $\Lambda_{(0)} = \Lambda_{(01)}$ nebo $\Lambda_{(02)}$.

Konečně pro hmotnou částici s mezickým nábojem g ve vnějším skalárním poli (s potenciálem $\psi(x)$) je možno za Λ volit např. výraz

$$\Lambda_{(g1)} = -(\overline{m}_0 c^2 + g\psi)\,(U_\nu U_\nu/c^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$

nebo

$$\Lambda_{(g2)} = \tfrac{1}{2}\overline{m}_0 U_\nu U_\nu - \tfrac{1}{2} g\psi(1 - U_\nu U_\nu/c^2)\,.$$

Veličiny $\overline{m}_0$ a g jsou opět konstanty.

V literatuře se používá jak variační metody z odst. 2,1 a Lagrangeových funkcí z odst. 2,2 popř. 2,3, tak i variační metody a Lagrangeových funkcí uvedených v této poznámce. V některých učebnicích se dokonce najdou nepříliš důsledné kombinace obou metod. (Viz např. [45].) V dalších odstavcích této kapitoly se důsledně omezíme na metodu z odst. 2.1. Druhé metody (s $\delta\mathrm{d}\tau = 0$) použijeme až v závěrečné kapitole IX.

3. HAMILTONŮV PRINCIP V RELATIVISTICKÉ TEORII POLE

3,1. VARIAČNÍ PRINCIP PRO ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

Z teorie elektromagnetického pole je známo, že také Maxwellovy rovnice

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - c^{-1}\,\partial\boldsymbol{E}/\partial t = 4\pi c^{-1}\boldsymbol{J}\,,\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 4\pi\varrho \tag{39}$$

lze odvodit z Hamiltonova variačního principu

$$\delta\mathscr{S} \equiv \delta\int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{II}} \mathscr{L}\,\mathrm{d}t = 0\,, \tag{40}$$

volíme-li za Lagrangeovu funkci $\mathscr{L}$ objemový integrál

$$\mathscr{L} = \int_{V(t)} \mathscr{L}\,\mathrm{d}V\,, \tag{41}$$

za tzv. Lagrangeovu hustotu $\mathscr{L}$ výraz

$$\mathscr{L} = (8\pi)^{-1}\,(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2) + c^{-1}\boldsymbol{J}\,.\,\boldsymbol{A} - \varrho\varphi\,, \tag{42}$$

a rozumíme-li variací $\delta\mathscr{S}$ změnu čtyřrozměrného integrálu způsobenou tím, že elektromagnetické potenciály $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ a $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ změníme na $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) + \delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ a $\varphi(\boldsymbol{x}, t) +$

$+ \delta\varphi(\boldsymbol{x}, t)$. Přitom $\delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ a $\delta\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ jsou libovolné (infinitezimální) funkce, které mají všecky potřebné derivace podle x_j i t a vymizí na uzavřené ploše $\sigma(t)$ ohraničující prostorový obor $V(t)$ ve všech časech t ($t_{\mathrm{I}} \leqq t \leqq t_{\mathrm{II}}$); kromě toho v časech t_{I} a t_{II} vymizí i uvnitř V. O hustotě proudu $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$ a hustotě náboje $\varrho(\boldsymbol{x}, t)$ se předpokládá, že *jsou dány a při zmíněné variaci potenciálů* $\boldsymbol{A}$, φ *se nemění*. Samozřejmě se také předpokládá, že intenzity pole $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ a $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t)$ jsou vyjádřeny potenciály $\boldsymbol{A}$ a φ vztahy (II 5,6), takže druhá série Maxwellových rovnic je už splněna identicky. Podrobné odvození rovnic (39) z variačního principu (40) je podáno např. v [6].

Ukážeme nejprve, že princip (40) lze zapsat ve tvaru evidentně invariantním vůči Lorentzovým transformacím a že je tedy platný i v teorii relativity. Všimněme si výrazu (42). Vyjádříme-li složky intenzit $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ složkami tenzoru $F_{\mu\nu}$ podle vztahů (VI 6a,b), zavedeme-li místo potenciálů $\boldsymbol{A}$, φ čtyřpotenciál $\varphi_\mu \equiv (\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi)$ a místo veličin $\boldsymbol{J}$, ϱ čtyřproud $J_\mu \equiv (\boldsymbol{J}, \mathrm{i}c\varrho)$, snadno zjistíme, že výraz (42) nabude tvaru

$$\mathscr{L} = -(16\pi)^{-1} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + c^{-1}J_\mu\varphi_\mu . \tag{42a}$$

Je tedy invariantní vůči Lorentzovým transformacím.

Variační princip (40) můžeme nyní zapsat ve zřejmě invariantním tvaru

$$\delta\mathscr{S}_\Omega \equiv \delta \int_\Omega \mathscr{L}\, \mathrm{d}\Omega = 0 , \tag{40a}$$

v němž skalár $\mathrm{d}\Omega$ udává velikost elementu prostoročasové oblasti Ω (viz def. (V 68, 68a)). Oblast Ω je částí čtyřrozměrné světové trubice vytvořené prostorovým oborem $V(t)$ ve všech časech t. Trojrozměrnou hranici Σ oblasti Ω tvoří jednak uzavřená křivá plocha $\sigma(t)$ v časech t ($t_{\mathrm{I}} \leqq t \leqq t_{\mathrm{II}}$), jednak trojrozměrné prostorové obory $V(t_{\mathrm{I}})$ a $V(t_{\mathrm{II}})$, které jsou částmi nadrovin $x_4 = \mathrm{i}ct_{\mathrm{I}}$ a $x_4 = \mathrm{i}ct_{\mathrm{II}}$ (řezy těchto nadrovin se čtyřrozměrnou světovou trubicí). Integrační oblast Ω integrálu v rovnici (40a) však *nemusí být ohraničena právě udaným speciálním způsobem*. Její hranicí Σ může být libovolná uzavřená trojrozměrná nadplocha ohraničující konečnou, čtyřrozměrnou, prostoročasovou oblast Ω. Obecně dokonce může být oblast Ω i nekonečná – může např. být rozšířena na celý Minkowského prostor. Pro jednoduchost však budeme předpokládat, že Ω je konečná a jednoduše souvislá oblast v prostoročase.

Přistupme nyní k výpočtu změny δ integrálu $\mathscr{S}_\Omega$ způsobené variací $\delta\varphi_\mu(x)$ čtyřpotenciálu $\varphi_\mu(x)$, která vymizí na nadploše Σ. Zřejmě platí

$$\delta \int_\Omega \mathscr{L}\, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \delta\mathscr{L}\, \mathrm{d}\Omega ,$$

neboť oblast Ω se při variaci nemění. Výraz (42a) dává

$$\delta\mathscr{L} = -(8\pi)^{-1} F_{\mu\nu}(\delta\partial_\mu\varphi_\nu - \delta\partial_\nu\varphi_\mu) + c^{-1}J_\mu\, \delta\varphi_\mu =$$
$$= (4\pi)^{-1} F_{\mu\nu}\, \delta\partial_\nu\varphi_\mu + c^{-1}J_\mu\, \delta\varphi_\mu .$$

Pořadí operací δ a ∂_ν lze však zaměnit, neboť

$$\delta\partial_\nu\varphi_\mu \equiv \partial_\nu(\varphi_\mu + \delta\varphi_\mu) - \partial_\nu\varphi_\mu = \partial_\nu\, \delta\varphi_\mu .$$

Můžeme tedy psát

$$F_{\mu\nu}\, \delta\partial_\nu\varphi_\mu = F_{\mu\nu}\, \partial_\nu\, \delta\varphi_\mu = \partial_\nu(F_{\mu\nu}\, \delta\varphi_\mu) - (\partial_\nu F_{\mu\nu})\, \delta\varphi_\mu .$$

Integrál z $\delta\mathscr{L}$ tím dostáváme v podobě

$$\int_\Omega \delta\mathscr{L}\, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega [-(4\pi)^{-1}\, \partial_\nu F_{\mu\nu} + c^{-1}J_\mu]\, \delta\varphi_\mu\, \mathrm{d}\Omega + 4\pi^{-1} \int_\Omega \partial_\nu(F_{\mu\nu}\, \delta\varphi_\mu)\, \mathrm{d}\Omega .$$

Upravíme-li poslední integrál ještě podle (V 69a), vidíme, že platí

$$\int_\Omega \partial_\nu(F_{\mu\nu}\, \delta\varphi_\mu)\, \mathrm{d}\Omega = \int_\Sigma F_{\mu\nu}\, \delta\varphi_\mu N_\nu |\mathrm{d}\Sigma| = 0 ,$$

neboť na hranici Σ je $\delta\varphi_\mu = 0$. V předposlední rovnici tedy na pravé straně zbývá jen první integrál, a i ten má být nulový při libovolné variaci $\delta\varphi_\mu(x)$. Musí tedy platit rovnice

$$-(4\pi)^{-1}\, \partial_\nu F_{\mu\nu} + c^{-1}J_\mu = 0 ,$$

a to v libovolné prostoročasové oblasti Ω. Platí tedy všude a ve všech dobách rovnice

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = 4\pi c^{-1} J_\mu , \tag{43}$$

což jsou právě Maxwellovy rovnice (VI 7). K nim je ovšem nutno přidat *definiční rovnice tenzoru* $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu . \tag{44}$$

Není však obtížné upravit Lagrangeovu hustotu (42a) tak, aby i rovnice (44) plynuly z variačního principu (viz Ú 1).

K poli určenému rovnicemi (43), (44) přísluší tenzor energie a hybnosti (VI 33), který splňuje rovnice (VI 32) (a je-li $J_\mu(x) = 0$, rovnice (VI 32a)).

3,2. VARIAČNÍ PRINCIP PRO SKALÁRNÍ MEZICKÉ POLE

Zcela podobně jako rovnice (43), lze z variačního Hamiltonova principu obecného tvaru (40a) odvodit i rovnici (VI 119), tj. rovnici

$$\partial_\mu\partial_\mu\psi - \varkappa^2\psi = 4\pi\eta_0 \tag{45}$$

pro skalární mezické pole popsané potenciálem $\psi(x)$. Rovnice (45) vlastně odpovídá vlnovým rovnicím (VI 3a) pro elektromagnetický čtyřpotenciál φ_μ. Chceme-li mít soustavu rovnic analogickou soustavě rovnic (44) a (43), stačí však definovat pomocný čtyřvektor ψ_μ rovnicemi

$$\psi_\mu \equiv \partial_\mu \psi \,, \tag{46}$$

a zapsat rovnici (45) ve tvaru

$$\partial_\mu \psi_\mu - \varkappa^2 \psi = 4\pi\eta_0 \,. \tag{47}$$

Funkce $\eta_0(x)$ určuje *klidovou hustotu mezického náboje* (v místě $\boldsymbol{x}$ v čase t). Budeme ji nyní pokládat za danou a při variacích potenciálu ψ za neproměnnou (podobně v předchozím funkce $J_\mu(x)$). Abychom mohli definovat pojem klidové hustoty η_0, představujeme si, že mezický náboj, podobně jako elektrický náboj, je jakási substance, nebo že je „nesen" nějakou materiální substancí rozloženou po prostoru a pohybující se v místě $\boldsymbol{x}$ v čase t rychlostí $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ velikosti $u < c$. Pak existuje vždy inerciální systém S_0, v němž je rychlost té substance v určitém místě a čase (světobodě P) nulová. Klidová hustota $\eta_0(P)$ a obyčejná hustota $\eta(P)$ mezického náboje (v pohybu) jsou určeny rovnicemi $\eta_0 \, dV_0 = \eta \, dV = dg$, které jsou zcela obdobné rovnicím pro ϱ_0, ϱ a de (viz konec odst. VI 2).

Snadno se přesvědčíme, že při definici (46) a dané funkci $\eta_0(x)$ plyne rovnice (47) z variačního principu (41) s Lagrangeovou hustotou

$$\mathscr{L} = -(8\pi)^{-1} (\psi_\mu \psi_\mu + \varkappa^2 \psi^2) - \eta_0 \psi \,. \tag{48}$$

Potom totiž variace $\delta\psi(x)$ dává

$$\delta\mathscr{L} = -(4\pi)^{-1} (\psi_\mu \, \delta\psi_\mu + \varkappa^2 \psi \, \delta\psi) - \eta_0 \, \delta\psi \,.$$

Ale $\delta\psi_\mu \equiv \delta\partial_\mu \psi = \partial_\mu \, \delta\psi$, takže

$$\delta\mathscr{L} = (4\pi)^{-1} (\partial_\mu \psi_\mu - \varkappa^2 \psi - 4\pi\eta_0) \, \delta\psi - (4\pi)^{-1} \, \partial_\mu(\psi_\mu \, \delta\psi) \,. \tag{49}$$

Na hranici Σ oblasti Ω volíme opět $\delta\psi = 0$. Poslední člen ve výraze (49) proto nepřispěje k integrálu z $\delta\mathscr{L}$ po oblasti Ω. Uvnitř Ω je $\delta\psi(x)$ libovolné a podmínka (40a) tedy nyní vyžaduje, aby bylo

$$\partial_\mu \psi_\mu - \varkappa^2 \psi - 4\pi\eta_0 = 0 \,,$$

tj. aby platila rovnice (47). Není obtížné upravit Lagrangeovu hustotu (48) tak, aby i rovnice (46) plynuly z variačního principu (viz Ú 2).

Podobně jako elektromagnetickému poli přísluší i mezickému poli určenému rovnicemi (46), (47) (popř. rovnicí (45)) tenzor energie a hybnosti $T^{(M)}_{\mu\nu}$. Musí to být symetrický tenzor, který při $\eta_0 \equiv 0$ splňuje rovnice

$$\partial_\nu T^{(M)}_{\mu\nu} = 0 \tag{50a}$$

analogické rovnicím (VI 32a). Takovým tenzorem je výraz

$$T^{(M)}_{\mu\nu} = (4\pi)^{-1} \left[\psi_\mu \psi_\nu - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}((\psi_\alpha \psi_\alpha + \varkappa^2 \psi^2)\right] , \tag{51}$$

jehož struktura je zcela analogická jako u elektromagnetického tenzoru (VI 33). Na základě rovnic (46) a (47) splňuje tenzor (51) rovnice

$$\partial_\nu T^{(M)}_{\mu\nu} = \eta_0 \psi_\mu \equiv -\phi^{(M)}_\mu \,, \tag{50}$$

které se při $\eta_0 = 0$ redukují na žádané rovnice (50a).

Rovnice (50) jsou obdobou rovnic (VI 32); čtyřvektor

$$\phi^{(M)}_\mu \equiv -\eta_0 \psi_\mu \tag{52}$$

se tedy musí interpretovat jako mezická obdoba vlastní hustoty Lorentzovy čtyřsíly $\phi^{(E)}_\mu$ (viz (VI 21) a (VI 32)). Za zcela obdobných podmínek a stejným postupem, jímž jsme na konci odstavce VI 3,1 odvodili z Lorentzovy hustoty $\phi^{(E)}_\mu$ vnější Lorentzovu čtyřsílu $F^{(E)}_\mu$, můžeme i z hustoty (52) odvodit Minkowského (mezickou) čtyřsílu $F^{(M)}_\mu$, jíž na mezický náboj g nějaké hmotné částice působí vnější skalární mezické pole. Dostaneme

$$F^{(M)}_\mu = \int_{V_0} \phi^{(M)}_\mu \, dV_0 \doteq -\psi_\mu \int_{V_0} \eta_0 \, dV_0 = -g\psi_\mu \,, \tag{53}$$

v souhlase se vzorcem (VI 120).

Nakonec uveďme ještě výrazy, které plynou z tenzoru $T^{(M)}_{\mu\nu}$ pro hustotu energie a hybnosti skalárního mezického pole. Identifikujeme-li složky tenzoru $T^{(M)}_{\mu\nu}$ podle předpisu obdobného (VI 34), máme

$$h^{(M)} = -T^{(M)}_{44} = (8\pi)^{-1} \left[c^{-2}(\partial\psi/\partial t)^2 + (\operatorname{grad}\psi)^2 + \varkappa^2\psi^2\right] ,$$
$$w^{(M)}_j = (ic)^{-1} \, T^{(M)}_{j4} = -(4\pi c^2)^{-1} \, \partial_j \psi \, . \, \partial\psi/\partial t \,. \tag{54}$$

Vidíme, že hustota energie pole je pozitivně definitní a hustota hybnosti vymizí ve statickém poli.

4. INTERAKCE ROZPTÝLENÉ NABITÉ HMOTNÉ SUBSTANCE A POLE

4,1. ÚPLNÁ LAGRANGEOVA FUNKCE A VARIAČNÍ PRINCIP

Dosud jsme probírali odděleně jednak variační principy určující pohybové rovnice nabité hmotné částice v daném elektromagnetickém nebo skalárním mezickém poli, jednak variační principy určující rovnice elektromagnetického nebo mezického pole při daných „zdrojích", tj. daném elektrickém čtyřproudu $J_\mu(x)$ nebo klidové hustotě mezického náboje $\eta_0(x)$. Nyní ukážeme, jak lze všecky tyto čtyři speciální případy spojit v jediný variační princip obsahující zákony vzájemného působení mezi nabitou hmotnou substancí a polem, tj. určující jak rovnice polí, tak rovnice pohybu nabité substance.

Nejprve spojíme rovnice (28) a (36) v jeden variační princip, který určuje pohyb částice nesoucí elektrický i mezický náboj v daném vnějším elektromagnetickém a mezickém poli. Je zřejmé, že klidovou hmotu m_0 vystupující ve formuli (29) musíme v takovém případě identifikovat s veličinou $m_0 = \overline{m}_0 + c^{-2}g\psi$ vystupující v rovnici (38). Hledaný variační princip tím nabývá tvaru (16) s Lagrangeovou funkcí

$$\Lambda = -\overline{m}_0 c^2 - g\psi + ec^{-1}\varphi_\alpha U_\alpha \,. \tag{55}$$

Rovnice (17) s funkcí (55) pak vedou na pohybové rovnice

$$\mathrm{d}(m_0 U_\nu)/\mathrm{d}\tau = ec^{-1}F_{\nu\alpha}U_\alpha - g\psi_\nu \,. \tag{56}$$

Provedeme-li derivaci naznačenou na levé straně (56) a rovnici pak znásobíme činitelem U_ν, dostaneme

$$\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau = c^{-2}g\psi_\nu U_\nu = c^{-2}g\,\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\tau \,,$$

čili

$$\mathrm{d}\overline{m}_0/\mathrm{d}\tau = 0 \,, \quad \overline{m}_0 = \mathrm{konst} \,.$$

Při $\psi = 0$ nebo $g = 0$ přejdou rovnice (56) na Minkowského pohybové rovnice pro elektricky nabitou částici s klidovou hmotou $m_0 = \overline{m}_0 = \mathrm{konst}$ v elektromagnetickém poli. Při $F_{\nu\alpha} = 0$ nebo $e = 0$ pak dostáváme znovu rovnici (38) pro pohyb částice s mezickým nábojem g ve skalárním mezickém poli. Rovnice (56) a formule (55) spojují oba speciální případy a platí i pro částici nesoucí náboj e i g.

Funkce $\varphi_\mu(x)$ a $\psi(x)$ ovšem popisují jen *vnější pole*, takže na pravé straně (56) máme pouze *vnější čtyřsílu*. To sice *neznamená, že se k vlivům vlastního pole částice vůbec nepřihlíží*, neboť konstanta $\overline{m}_0$ udává plnou „experimentální" klidovou hmotu volné částice, a ta je nutně určena, alespoň z části, i energií $\mathscr{E}_0^{(\mathrm{vl})} = \mathscr{E}_0^{(\mathrm{E})}(e^2) + \mathscr{E}_0^{(\mathrm{M})}(g^2)$ jejího vlastního pole elektrického i mezického; ale znamená to, že se k nim *přihlíží pouze aproximativně, neboť tím je z vlastní čtyřsíly započtena jen ta část, která má povahu síly inerciální*, a je dána výrazem

$$F_\nu^{(\mathrm{vl})} = -\mathrm{d}(c^{-2}\mathscr{E}_0^{(\mathrm{vl})}U_\nu)/\mathrm{d}\tau \,.$$

Nepřihlíží se k té části vlastní čtyřsíly, jíž je částice podrobena při emisi záření. Rovnice (56) proto platí, jak již víme, jen pro tzv. kvazistacionární pohyb, jehož zrychlení je tak malé a tak málo proměnlivé, že k emisi záření prakticky vůbec nedochází.

Rovnice (56) a Lagrangeova funkce (55) jsou tedy pouze přibližné. Naproti tomu rovnice polí (43) a (47), popř. vzorce (42a) a (48) pro Lagrangeovy hustoty i příslušné variační principy tvaru (40a), jsou přesné. Chceme-li variační principy pole i pohybu nábojů spojit v jediný, musíme především výraz (55) i rovnice (56) „udělat" přesnými. Jak ještě uvidíme, je k tomu *vhodný tento formální postup: Místo skutečné částice* s konečnými náboji e a g i hmotou $\overline{m}_0$ budeme *nejprve uvažovat „částici" s libovolně malými náboji* Δe *a* Δg *i hmotou* $\Delta\overline{m}_0$. Poněvadž příspěvky vlastního

pole částice k Lagrangeově funkci (55) i všecky části vlastní síly jsou úměrné přinejmenším *čtvercům* nábojů Δe popř. Δg, můžeme je plným právem zanedbat. Výraz

$$\lambda = -c^2\,\Delta\overline{m}_0 - \psi\,\Delta g + c^{-1}\varphi_\alpha U_\alpha\,\Delta e \,, \tag{55a}$$

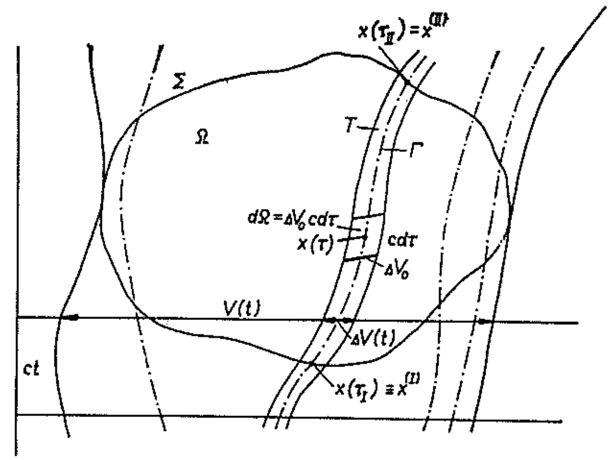
v němž ψ a φ_α *přísluší „vnějšímu poli"* a v němž $\Delta\overline{m}_0$ *udává pouze případnou „nepolní" klidovou setrvačnou hmotu* volné částice, je pak libovolně přesnou Lagrangeovou funkcí. Také variační princip

$$\delta \int_{(\mathrm{I})}^{(\mathrm{II})} \lambda\,\mathrm{d}\tau = 0 \tag{57}$$

a z něho plynoucí pohybové rovnice naší „infinitezimální částice"

$$\mathrm{d}(\Delta m_0 \,.\, U_\nu)/\mathrm{d}\tau = c^{-1}\,\Delta e \,.\, F_{\nu\alpha}U_\alpha - \Delta g \,.\, \psi_\nu \tag{56a}$$

(s $\Delta m_0 = \Delta\overline{m}_0 + c^{-2}\,\Delta g \,.\, \psi$) se stávají libovolně přesnými zákony.



Obr. 20

Naše „infinitezimální částice" nechť má dále v každém vlastním čase τ infinitezimální klidový objem $\Delta V_0(\tau)$. Potom můžeme veličiny Δe, Δg, $\Delta\overline{m}_0$, Δm_0 vyjádřit jejich klidovými hustotami takto:

$$\Delta e = \varrho_0\,\Delta V_0 \,, \quad \Delta g = \eta_0\,\Delta V_0 \,, \quad \Delta\overline{m}_0 = \overline{\mu}_{00}\,\Delta V_0 \,. \tag{58}$$

Platí také

$$\Delta m_0 = (\overline{\mu}_{00} + c^{-2}\eta_0\psi)\,\Delta V_0 \equiv \mu_{00}\,\Delta V_0 \,. \tag{59}$$

Částice při svém pohybu (tj. ve všech vlastních časech τ nebo časech t) vyplní **v** prostoročase „nekonečně úzkou" světovou trubici, která má obecně proměnný průřez $\Delta V_0(\tau)$. (Klidový objem částice $\Delta V_0(\tau)$ udává velikost řezu její světové trubice s trojrozměrnou nadrovinou proloženou světobodem $(x(\tau))$ *kolmo* ke světočáře Γ (viz obr. 20).)

Dosadíme-li nyní výrazy (58) do (55a), můžeme variační princip (57) zapsat v novém tvaru

$$\delta \int_T \mathscr{L} \, \mathrm{d}\Omega = 0 \,, \tag{57a}$$

s Lagrangeovou hustotou

$$\mathscr{L} = -c^2 \bar{\mu}_{00}(x) - \eta_0(x) \, \psi(x) + c^{-1} \varrho_0(x) \, U_\alpha(x) \, \varphi_\alpha(x) =$$
$$= -c^2 \bar{\mu}_{00} - \eta_0 \psi + c^{-1} J_\alpha \varphi_\alpha \tag{60}$$

a s $\mathrm{d}\Omega = \Delta V_0 \, . \, c\mathrm{d}\tau$. *Integrál v* (57a) *se vztahuje na část T světové trubice* naší částice *mezi průřezy* $\Delta V_0^{(\mathrm{I})} \equiv \Delta V_0(\tau_{\mathrm{I}})$ a $\Delta V_0^{(\mathrm{II})} \equiv \Delta V_0(\tau_{\mathrm{II}})$. Ty si můžeme představit jako řezy trubice s nějakou trojrozměrnou uzavřenou nadplochou Σ ohraničující prostoročasovou oblast Ω, v níž leží T – viz obr. 20. Variací integrálu se nyní rozumí změna vyvolaná infinitezimální deformací části světové trubice T mezi pevnými průřezy $\Delta V_0^{(\mathrm{I})}$ a $\Delta V_0^{(\mathrm{II})}$. Přitom se může měnit nejen tvar „centrální" světočáry Γ (mezi pevnými světobody $x^{(\mathrm{I})}$ a $x^{(\mathrm{II})}$), ale i průřezy trubice $\Delta V_0(\tau)$. Pak se ovšem budou také měnit hustoty $\bar{\mu}_{00}$, ϱ_0, η_0, a to tak, aby veličiny Δe, Δg, $\Delta \bar{m}_0$ zůstaly beze změny. Při odvozování pohybových rovnic částice je proto vhodné přejít od nového zápisu variačního principu (57a) nejprve zpět k původnímu tvaru (57). Tam se již projeví jen variace souřadnic $\delta x_\mu(\tau)$ a s nimi nevyhnutelně spojené variace $\delta U_\nu(\tau)$ a $\delta \mathrm{d}\tau$.

Význam nového zápisu variačního principu je v tom, ze se ho dá bez podstatné úpravy použít také pro soustavu libovolného počtu (i nekonečně mnoha) „infinitezimálních částic", které na sebe vzájemně působí prostřednictvím elektromagnetického a mezického pole. Taková „nekonečně jemně" rozptýlená substance (hmotný prach) zaujímá v daném čase t konečný objem $V(t)$ a v prostoročase „vyplňuje" širokou světovou trubici (viz obr. 20). Uvnitř této trubice pak budou ve všech světobodech definovány hustoty $\mu_{00}(x)$, $\varrho_0(x)$, $\eta_0(x)$ i čtyřrychlost proudění $U_\alpha(x)$ a také potenciály $\psi(x)$ a $\varphi_\alpha(x)$.

Světočáry, popř. nekonečně úzké světové trubice *elementů hmotného prachu* mají v každém světobodě směr čtyřrychlosti $U_\alpha(x)$. Časová konstantnost elektrických nábojů Δe jednotlivých elementů prachu je ekvivalentní rovnici kontinuity $\partial_\alpha J_\alpha^{(e)} = 0$ pro elektrický čtyřproud $J_\alpha^{(e)} \equiv \varrho_0(x) \, U_\alpha(x)$. Podobně zákony zachování jejich nábojů Δg a hmot $\Delta \bar{m}_0$ lze vyjádřit rovnicemi kontinuity

$$\partial_\alpha J_\alpha^{(g)} = 0 \,, \quad \partial_\alpha J_\alpha^{(\bar{m}_0)} = 0 \tag{61}$$

pro čtyřproudy $\eta_0 U_\alpha$ a $\bar{\mu}_{00} U_\alpha$. Poněvadž pro veličinu Δm_0 neplatí zákon zachování, neplatí ani rovnice kontinuity pro čtyřproud $J_\alpha^{(m_0)} \equiv \mu_{00} U_\alpha$. Tento čtyřproud splňuje rovnici

$$\partial_\alpha J_\alpha^{(m_0)} = c^{-2} \eta_0 \psi_\alpha U_\alpha = -c^{-2} U_\alpha \phi_\alpha^{(\mathrm{M})} \,, \tag{62}$$

která plyne snadno ze vztahu $\mu_{00} = \bar{\mu}_{00} + c^{-2} \eta_0 \psi$ a z rovnic (61).

Abychom dospěli k variačnímu principu, z něhož vyplynou rovnice popisující pohyb našeho hmotného prachu, stačí, jak ukážeme, rozšířit v rovnici (57a) integrační obor T na libovolnou ohraničenou prostoročasovou oblast Ω (viz obr. 20) a nahradit (57a) rovnicí

$$\delta \mathscr{S}_\Omega \equiv \delta \int_\Omega \mathscr{L} \, \mathrm{d}\Omega = 0 \,. \tag{57b}$$

Pro element $\mathrm{d}\Omega = \Delta V_0 \, c\mathrm{d}\tau$ oblasti Ω lze nyní použít i vyjádření $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}V \, . \, c\mathrm{d}t$ ($\Delta V = \gamma_{(u)}^{-1} \, \Delta V_0$, $\mathrm{d}t = \gamma_{(u)} \, \mathrm{d}\tau$), takže integrál v rovnici (57b) má stejný vnější tvar jako v rovnici (40a). Srovnáme-li také Lagrangeovy hustoty (42a), (48) a (60), vidíme, že je můžeme sjednotit v jediné *úplnou* Lagrangeovou hustotu

$$\mathscr{L} = -(16\pi)^{-1} \, F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - (8\pi)^{-1} (\psi_\alpha \psi_\alpha + \varkappa^2 \psi^2) - c^2 \bar{\mu}_{00} + c^{-1} J_\alpha \varphi_\alpha - \eta_0 \psi \,, \tag{63}$$

v níž jsou *shrnuty všecky členy vystupující ve výrazech* (42a), (48) a (60).

4,2. ODVOZENÍ ROVNIC POLE I ROVNIC POHYBU HMOTNÉHO PRACHU Z JEDINÉHO VARIAČNÍHO PRINCIPU

Integrál $\mathscr{S}_\Omega$ z úplné Lagrangeovy hustoty (63) po libovolné pevně zvolené prostoročasové oblasti Ω nyní musí být stacionární vůči

a) variaci $\delta \varphi_\alpha(x)$ čtyřpotenciálu $\varphi_\alpha(x)$ definované v odst. 3,1, při nezměněných funkcích $J_\alpha(x)$, $\psi(x)$, $\eta_0(x)$ a $\bar{\mu}_{00}(x)$;

b) variaci $\delta \psi(x)$ potenciálu $\psi(x)$ definované v odst. 3,2, při nezměněných funkcích $\varphi_\alpha(x)$, $J_\alpha(x)$, $\eta_0(x)$, $\bar{\mu}_{00}(x)$;

c) jisté variaci pohybu nabitého prachu při nezměněných potenciálech $\varphi_\alpha(x)$ i $\psi(x)$.

Požadavek a) vede samozřejmě opět k rovnicím (43) a požadavek b) k rovnici (47). Přípustná variace pohybu prachu odpovídá infinitezimální *spojité deformaci světových trubic* všech elementů prachu *uvnitř oblasti* Ω. Počáteční a koncové průřezy trubic, tj. jejich řezy s nadplochou Σ zůstanou přitom beze změny. Náboje Δe, Δg a hmoty $\Delta \bar{m}_0$ elementů prachu zůstanou při deformaci jejich světových trubic také beze změny.

Abychom z variačního principu $\delta \mathscr{S}_\Omega = 0$ získali pohybové rovnice hmotného prachu, postupujeme takto: Vzhledem k tomu, že při popsané variaci pohybu zůstává jak integrační oblast Ω v integrálu $\mathscr{S}_\Omega$, tak i první dva členy Lagrangeovy hustoty (63) beze změny, nepřispějí tyto členy k veličině $\delta \mathscr{S}_\Omega$. Pro výpočet příspěvků posledních tří členů, které se při uvažované variaci pohybu prachu mění, si nejprve integrační oblast Ω rozdělíme na nekonečně úzké světové trubice T elementů prachu a trubice rozdělíme na infinitezimální úseky velikosti $d\Omega = \Delta V_0(\tau)\, c d\tau$. Změnu integrálu $\mathscr{S}_\Omega$ vyvolanou variací pohybu prachu pak můžeme vyjádřit rozpisem

$$\delta \mathscr{S}_\Omega = \delta \int_\Omega (-c^2 \bar{\mu}_{00} + c^{-1} \varrho_0 \varphi_\alpha U_\alpha - \eta_0 \psi)\, \Delta V_0\, c d\tau =$$

$$= \int (-c^3\, \Delta \bar{m}_0)\, \delta \int_\Gamma d\tau + \int \Delta e\, \delta \int_\Gamma \varphi_\alpha U_\alpha\, d\tau - \int c\, \Delta g\, \delta \int_\Gamma \psi\, d\tau\,, \tag{64}$$

neboť veličiny $\Delta \bar{m}_0$, Δe, Δg jsou podél každé světové trubice konstantní a při její variaci se nemění.

Meze integrálů podle τ jsou určeny světobody (I), (II), v nichž se příslušné světové trubice T nebo světočáry Γ protínají s nadplochou Σ (viz obr. 20). Pro variace těchto integrálů plynou z obecné formule (16a) výrazy

$$\delta \int d\tau = \int c^{-2} (dU_\nu / d\tau)\, \delta x_\nu\, d\tau = \int c^{-2} U_\alpha\, \partial_\alpha U_\nu\, \delta x_\nu\, d\tau\,,$$

$$\delta \int U_\alpha \varphi_\alpha\, d\tau = \int F_{\nu\alpha} U_\alpha\, \delta x_\nu\, d\tau\,,$$

$$\delta \int \psi\, d\tau = \int [\psi_\nu + c^{-2} U_\alpha\, \partial_\alpha(\psi U_\nu)]\, \delta x_\nu\, d\tau\,.$$

Po dosazení těchto výrazů do (64) a opětném zavedení hustot ϱ_0, η_0 a $\bar{\mu}_{00}$ podle (58) dostáváme

$$\delta \mathscr{S}_\Omega = \int Y_\nu\, \delta x_\nu\, d\Omega\,, \tag{64a}$$

$$Y_\nu \equiv -(\bar{\mu}_{00} + c^{-2} \eta_0 \psi)\, U_\alpha\, \partial_\alpha U_\nu - c^{-2} \eta_0 \psi_\alpha U_\alpha U_\nu + c^{-1} \varrho_0 F_{\nu\alpha} U_\alpha - \eta_0 \psi_\nu\,. \tag{65}$$

Poněvadž variace δx_ν jsou uvnitř Ω libovolné, plynou z požadavku $\delta \mathscr{S}_\Omega = 0$ rovnice

$$Y_\nu = 0\,, \tag{66}$$

což jsou hledané pohybové rovnice hmotného prachu.

Tyto rovnice si ještě upravíme. Do prvního členu výrazu Y_ν zavedeme hustotu $\mu_{00} = \bar{\mu}_{00} + c^{-2} \eta_0 \psi$, a pro úpravu druhého členu použijeme rovnice (62). Oba členy je pak možno spojit v jediný, neboť jejich součet dává

$$-\mu_{00} U_\alpha\, \partial_\alpha U_\nu - U_\nu\, \partial_\alpha(\mu_{00} U_\alpha) = -\partial_\alpha(\mu_{00} U_\nu U_\alpha)\,.$$

Rovnice (66) tím nabudou přehledného tvaru

$$\partial_\alpha(\mu_{00} U_\nu U_\alpha) = \phi_\nu^{(E)} + \phi_\nu^{(M)}\,, \tag{66a}$$

v němž $\phi_\nu^{(E)} \equiv c^{-1} \varrho_0 F_{\nu\alpha} U_\alpha$ je vlastní hustota Lorentzovy čtyřsíly a $\phi_\nu^{(M)} \equiv -\eta_0 \psi_\nu$ je vlastní hustota mezické čtyřsíly.

4,3. KINETICKÝ TENZOR ENERGIE A HYBNOSTI HMOTNÉHO PRACHU

Rovnice (66a) nabízejí zavedení nového symetrického tenzoru

$$T_{\nu\alpha}^{(H)} = \mu_{00} U_\nu U_\alpha\,, \tag{67}$$

který splňuje rovnice

$$\partial_\alpha T_{\nu\alpha}^{(H)} = \phi_\nu^{(E)} + \phi_\nu^{(M)}\,, \tag{66b}$$

analogické známým rovnicím

$$\partial_\alpha T_{\nu\alpha}^{(E)} = -\phi_\nu^{(E)} \tag{68}$$

a

$$\partial_\alpha T_{\nu\alpha}^{(M)} = -\phi_\nu^{(M)} \tag{69}$$

pro tenzory energie a hybnosti elektromagnetického a mezického pole (viz (VI 32) a (50)). Z (66b), (68) a (69) pak plynou pro *úplný* tenzor

$$T_{\nu\alpha} \equiv T_{\nu\alpha}^{(H)} + T_{\nu\alpha}^{(E)} + T_{\nu\alpha}^{(M)} \tag{70}$$

rovnice

$$\partial_\alpha T_{\nu\alpha} = 0\,, \tag{71}$$

které jsou charakteristické právě pro *úplný* tenzor energie a hybnosti uzavřené materiální soustavy. Naše soustava je složena z elektricky i mezicky nabitého a „nekonečně jemně" rozptýleného hmotného prachu a elektromagnetického i mezického pole. Náboje nesené hmotným prachem budí pole a to zpětně ovlivňuje jeho pohyb.

Tenzor $T_{\nu\alpha}^{(H)}$ se nazývá kinetickým tenzorem energie a hybnosti, nebo tenzorem energie a hybnosti hmotného prachu. Zavedeme-li místo složek čtyřrychlosti složky obyčejné rychlosti proudění známými vztahy $U_j = \gamma_{(u)} u_j$, $U_4 = ic\gamma_{(u)}$, dostaneme složky kinetického tenzoru vyjádřeny takto:

$$T_{\nu\alpha}^{(H)} \equiv \begin{pmatrix} T_{jk}^{(H)} & T_{j4}^{(H)} \\ T_{4k}^{(H)} & T_{44}^{(H)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu u_j u_k & ic\mu u_j \\ ic\mu u_k & -\mu c^2 \end{pmatrix}. \tag{67a}$$

Veličina μ je definována vztahem $\mu = \mu_{00} \gamma_{(u)}^2$. Její fyzikální význam i význam μ_{00} snadno vysvětlíme. Hustotu μ_{00} lze podle (59) vyjádřit vzorcem $\mu_{00} = \Delta m_0 / \Delta V_0$. Tato veličina tedy udává *klidovou* (vlastní) *hustotu klidové hmoty hmotného prachu* v daném světobodě. Je to prostoročasový skalár, veličina nezávislá na systému souřadnic: $\mu'_{00}(x') = \mu_{00}(x(x')) = \mu_{00}(x)$. Ze vzorce (67) plyne zúžením vztah $T_{\alpha\alpha}^{(H)} = -c^2 \mu_{00}$, takže pro μ_{00} dostáváme invariantní výraz

$$\mu_{00} = -c^{-2} T_{\alpha\alpha}^{(H)}$$

obdobný výrazu (VI 19a) pro ϱ_0. Vzorec pro veličinu μ můžeme upravit takto:

$$\mu = \gamma^2\, \Delta m_0 / \Delta V_0 = \gamma\, \Delta m_0 / (\gamma^{-1}\, \Delta V_0) = \Delta m / \Delta V\,. \tag{72}$$

Vidíme, že $\mu(x)$ udává relativní hustotu relativní hmoty hmotného prachu nebo prostě *hustotu hmoty z hlediska systému* S, *vůči němuž se hmotný prach* v daném místě a čase (světobodě (x)) *pohybuje* rychlostí $\boldsymbol{u}(x)$. Tato veličina není invariantní prostoročasový skalár, neboť podle (67a) máme

$$\mu = -c^{-2}T_{44}^{(\mathrm{H})}\,.$$

Kromě μ_{00} a μ je někdy vhodné zavést i veličinu μ_0 definovanou vztahy

$$\mu_0 = \gamma\mu_{00} = \gamma^{-1}\mu = \Delta m_0/\Delta V = \Delta m/\Delta V_0 \tag{73}$$

a udávající tedy *relativní hustotu klidové hmoty* (nebo klidovou hustotu relativní hmoty). První interpretace je přirozenější.

Vraťme se nyní k fyzikálnímu významu složek kinetického tenzoru $T_{\nu\alpha}^{(\mathrm{H})}$. Veličiny

$$(\mathrm{i}c)^{-1}T_{j4}^{(\mathrm{H})} = \mu u_j \equiv w_j^{(\mathrm{H})} \tag{74}$$

jsou zřejmě *složky hustoty hybnosti* a

$$-T_{44}^{(\mathrm{H})} = \mu c^2 \equiv h^{(\mathrm{H})} \tag{75}$$

je *hustota energie hmotného prachu v systému* S v souhlase s Einsteinovým zákonem o ekvivalenci hmoty a energie. Také zbývající složky tenzoru mají prostou fyzikální interpretaci. Veličina

$$T_{jk}^{(\mathrm{H})} = \mu u_j u_k = w_j^{(\mathrm{H})}u_k$$

je k-tá složka *hustoty proudu j-té složky hybnosti* a

$$-\mathrm{i}cT_{4k}^{(\mathrm{H})} = h^{(\mathrm{H})}u_k \equiv S_k^{(\mathrm{H})} = c^2 w_k^{(\mathrm{H})}$$

je k-tá složka *hustoty proudu energie* hmotného prachu.

4,4. RŮZNÉ DALŠÍ ÚPRAVY POHYBOVÝCH ROVNIC HMOTNÉHO PRACHU

Všimněme si ještě několika dalších zajímavých a užitečných úprav rovnic (66a). Jejich levou stranu upravíme nejprve takto:

$$\partial_\alpha(\mu_{00}U_\nu U_\alpha) = \partial_\alpha(\mu_{00}U_\nu)\,U_\alpha + \mu_{00}U_\nu\,\partial_\alpha U_\alpha = \\ = \mathrm{d}(\mu_{00}U_\nu)/\mathrm{d}\tau + \mu_{00}U_\nu\,\partial_\alpha U_\alpha\,. \tag{76}$$

Výraz

$$\partial_\alpha U_\alpha = \partial_j(\gamma u_j) + (\mathrm{i}c)^{-1}\,\partial(\mathrm{i}c\gamma)/\partial t = \\ = \gamma\,\partial_j u_j + c^{-2}\gamma^3(u_j u_k\,\partial_j u_k + u_j a_j)$$

je invariantní. Chceme-li znát jeho názorný význam, stačí tedy určit jej v klidovém systému S_0, v němž je (v daném místě a daném čase) rychlost pohybu prachového elementu $\boldsymbol{u}_0 = 0$ ($\gamma_{(u_0)} = 1$), a podle předchozí formule tedy

$$\partial_\alpha U_\alpha = \partial_\alpha^0 U_\alpha^0 = \operatorname{div}_0 \boldsymbol{u}_0\,. \tag{77}$$

Abychom nalezli názorný význam výrazu $\operatorname{div}_0 \boldsymbol{u}_0$, sledujme nejprve *v libovolném systému* S prachovou hmotnou substanci zaujímající v daném okamžiku t objem $V(t)$ ohraničený uzavřenou plochou $\sigma(t)$. Při proudové rychlosti $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ se za dobu $\mathrm{d}t$ objem zvětší o přírůstek $\mathrm{d}V$ daný výrazem

$$\mathrm{d}V = \int_\sigma \boldsymbol{N}\,.\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}t\int_{\sigma(t)} \boldsymbol{N}\,.\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}t\int_{V(t)} \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,\bar{\mathrm{d}}V\,.$$

Vektor $\boldsymbol{N}$ je jednotkový vektor mířící ve směru vnější normály k plošnému elementu $\mathrm{d}\sigma$ plochy σ, a $\bar{\mathrm{d}}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$, je element objemu $V(t)$. Je-li objem V sám velmi malý ($V = \Delta V$), můžeme psát prostě

$$\mathrm{d}\Delta V = \mathrm{d}t\,\operatorname{div}\boldsymbol{u}\int_{\Delta V}\bar{\mathrm{d}}V = \Delta V\,\mathrm{d}t\,\operatorname{div}\boldsymbol{u}\,,$$

takže

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = (\Delta V)^{-1}\,\mathrm{d}\Delta V/\mathrm{d}t\,. \tag{78}$$

V okamžitém klidovém systému S_0 pak ovšem platí vztah

$$\operatorname{div}_0 \boldsymbol{u}_0 = (\Delta V_0)^{-1}\,\mathrm{d}\Delta V_0/\mathrm{d}t_0 = (\Delta V_0)^{-1}\,\mathrm{d}\Delta V_0/\mathrm{d}\tau\,. \tag{79}$$

Dosazením ze (79) do (77) plyne invariantní vztah

$$\partial_\alpha U_\alpha = (\Delta V_0)^{-1}\,\mathrm{d}\Delta V_0/\mathrm{d}\tau\,, \tag{80}$$

který podává hledaný názorný význam invariantu $\partial_\alpha U_\alpha$.

Dosadíme-li z (80) do (76) a odtud do rovnic (66a) násobených ΔV_0, získáme rovnice

$$\Delta V_0\,\mathrm{d}(\mu_{00}U_\nu)/\mathrm{d}\tau + \mu_{00}U_\nu\,\mathrm{d}(\Delta V_0)/\mathrm{d}\tau = \\ = \mathrm{d}(\mu_{00}\,\Delta V_0 U_\nu)/\mathrm{d}\tau = c^{-1}\varrho_0\,\Delta V_0 F_{\nu\alpha}U_\alpha - \eta_0\,\Delta V_0\psi_\nu\,. \tag{81}$$

Použijeme-li nyní definic (58), (59), můžeme rovnice (81) zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}(\Delta m_0 U_\nu)/\mathrm{d}\tau = c^{-1}\,\Delta e F_{\nu\alpha}U_\alpha - \Delta g\psi_\nu\,. \tag{81a}$$

To jsou pohybové rovnice (libovolného) elementu našeho hmotného prachu a jsou ovšem shodné s pohybovými rovnicemi (56a) „infinitezimální" nabité hmotné částice.

Levou stranu rovnic (66a) lze rozepsat ještě tímto způsobem:

$$\partial_\alpha(\mu_{00}U_\nu U_\alpha) = U_\nu\,\partial_\alpha(\mu_{00}U_\alpha) + \mu_{00}U_\alpha\,\partial_\alpha U_\nu = \\ = U_\nu\,\partial_\alpha(\mu_{00}U_\alpha) + \mu_{00}\,\mathrm{d}U_\nu/\mathrm{d}\tau\,.$$

Násobíme-li je potom U_ν, dostaneme rovnici

$$\partial_\alpha(\mu_{00}U_\alpha) = c^{-2}\eta_0 U_\nu \psi_\nu \,, \tag{82}$$

která souhlasí s rovnicí (62). Fyzikální význam veličin na obou stranách rovnice (82) objasní její další úprava. Násobíme-li tuto rovnici ΔV_0, provedeme naznačenou derivaci na levé straně a užijeme vztahu (80), můžeme levou stranu upravit takto:

$$\Delta V_0(U_\alpha\,\partial_\alpha\mu_{00} + \mu_{00}\,\partial_\alpha U_\alpha) = \Delta V_0\,\mathrm{d}\mu_{00}/\mathrm{d}\tau + \mu_{00}\,\mathrm{d}\Delta V_0/\mathrm{d}\tau =$$
$$= \mathrm{d}(\mu_{00}\,\Delta V_0)/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\Delta m_0/\mathrm{d}\tau \,.$$

Na pravé straně pak dostaneme

$$c^{-2}\eta_0\,\Delta V_0\,\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\tau = c^{-2}\,\Delta g\,\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\tau \,,$$

takže rovnice (82) je ekvivalentní rovnici

$$\mathrm{d}\Delta m_0/\mathrm{d}\tau = c^{-2}\,\Delta g\,\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\tau \,, \tag{83}$$

která ovšem plyne přímo i z (81a). Rovnice (83) je analogická té, kterou jsme v odst. VI 7,2 odvodili pro změnu celkové klidové hmoty částice (nukleonu) ve vnějším skalárním poli.

Invariantní výraz $\partial_\alpha(\mu_{00}U_\alpha)$ na levé straně (82) tedy *udává přírůstek klidové hmoty hmotného prachu v jednotce klidového objemu za jednotku vlastního času* a veličina

$$q_0 \equiv \eta_0\psi_\nu U_\nu = \eta_0\,\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\tau \tag{84}$$

je analogická množství tepla dodaného z hlediska okamžitého *klidového* systému *objemové jednotce* hmotného prachu *za jednotku času*. (Srovnej s (VI 117).)

Dosadíme-li do rovnice (82) $U_\alpha \equiv (\gamma u_j, \mathrm{i}c\gamma)$ a $\partial_\alpha \equiv (\partial_j, (\mathrm{i}c)^{-1}\,\partial/\partial t)$, můžeme ji po zavedení veličin (73) a (84) zapsat ve tvaru

$$\operatorname{div}(\mu_0\boldsymbol{u}) + \partial\mu_0/\partial t = c^{-2}q_0 \,, \tag{85}$$

nebo ve tvaru

$$\mu_0\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\mu_0/\mathrm{d}t = c^{-2}q_0 \,, \tag{85a}$$

v němž je použito úplné časové derivace

$$\mathrm{d}\mu_0/\mathrm{d}t \equiv \partial\mu_0/\partial t + \boldsymbol{u}\,.\,\operatorname{grad}\mu_0 \,. \tag{86}$$

Nakonec si ještě rozepíšeme rovnice (66b) zavedením hustot $w_j^{(\mathrm{H})}$ a $h^{(\mathrm{H})}$ definovaných vztahy (74) a (75). Dostaneme tak rovnice

$$\partial w_j^{(\mathrm{H})}/\mathrm{d}t + \partial_k(w_j^{(\mathrm{H})}u_k) = \phi_j^{(\mathrm{E})} + \phi_j^{(\mathrm{M})} \,, \tag{87}$$

$$\partial h^{(\mathrm{H})}/\partial t + \partial_k(h^{(\mathrm{H})}u_k) = -\mathrm{i}c(\phi_4^{(\mathrm{E})} + \phi_4^{(\mathrm{M})}) = \phi_j^{(\mathrm{E})}u_j + \eta_0\,\partial\psi/\partial t \,. \tag{88}$$

Poslední člen na pravé straně (88) je možno dále upravit zavedením veličiny q_0, pro niž platí podle (84) toto vyjádření:

$$q_0 = \eta_0\psi_j U_j + \eta_0\psi_4 U_4 = \gamma(-\phi_j^{(\mathrm{M})}u_j + \eta_0\partial\psi/\partial t) \,.$$

Rovnici (88) lze tedy psát ve tvaru

$$\partial h^{(\mathrm{H})}/\partial t + \operatorname{div}(h^{(\mathrm{H})}\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\phi}^{(\mathrm{E})} + \boldsymbol{\phi}^{(\mathrm{M})})\,.\,\boldsymbol{u} + q \,, \tag{88a}$$

v němž

$$q = q_0\gamma^{-1} = \eta_0\,\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t \,. \tag{89}$$

Vidíme, že q je ke q_0 v tomtéž vztahu, jako je podle (VI 118) $\mathrm{d}Q$ k $\mathrm{d}Q_0$. Z (88a) vskutku také plyne rovnice tvaru (VI 116), totiž

$$\mathrm{d}(h^{(\mathrm{H})}\,\Delta V) = (\boldsymbol{\phi}^{(\mathrm{E})} + \boldsymbol{\phi}^{(\mathrm{M})})\,\Delta V\,.\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}t + q\,\Delta V\,\mathrm{d}t \,.$$

Snadno se odvodí, použije-li se vzorců (78) a (86).

5. POKUSY O ŘEŠENÍ PROBLÉMU KLASICKÉ TEORIE ELEKTRONU

Teorie interakce „nekonečně jemně“ rozptýlené, nabité hmotné substance s polem nemůže vysvětlit existenci *diskrétních* částic s *konečnými* hodnotami nábojů a hmot. Z pohybových rovnic (66a) a z rovnic kontinuity (61) (a rovnice kontinuity pro elektrický čtyřproud, která plyne z rovnic elektromagnetického pole) nelze v daném čase t určit funkce $\eta_0(\boldsymbol{x})$, $\varrho_0(\boldsymbol{x})$, $\mu_{00}(\boldsymbol{x})$. Ani není známo žádné *všude spojité řešení* těchto rovnic a rovnic polí (43), (44), (45), v němž by hustoty ϱ_0, η_0, $\bar{\mu}_{00}$ měly nenulové hodnoty pouze uvnitř oddělených, úzkých světových trubic, tj. řešení, které by popisovalo pohyb stabilních *částic s konečnými hmotami a náboji*. Stueckelberg [46] však v roce 1941 ukázal, že *může existovat stabilní částice* (elektron nebo nukleon) *s konečným, přesně bodovým* elektrickým i mezickým *nábojem*, aniž při tom vznikne známá potíž s nekonečně velikou energií jejího vlastního pole.

Ověřme si to na nejjednodušším příkladě *volné bodové částice*, která je v klidu v počátku inerciálního systému S. V takovém systému žádná veličina charakterizující částici nezávisí na čase t a hustoty ϱ_0, η_0, $\bar{\mu}_{00}$ jsou vyjádřeny rovnicemi

$$\begin{aligned}\varrho_0(\boldsymbol{x}) &= e\,\delta(\boldsymbol{x})\,,\\ \eta_0(\boldsymbol{x}) &= g\,.\,\delta(\boldsymbol{x})\,,\\ \bar{\mu}_{00}(\boldsymbol{x}) &= \overline{m}_0(0)\,.\,\delta(\boldsymbol{x})\,,\end{aligned} \tag{90}$$

v nichž $\delta(\boldsymbol{x})$ je trojrozměrná funkce Diracova. *Konstanty* g a $\overline{m}_0(0)$ *jsou zatím libovolné*, ale dále je vhodně určíme nebo volíme. Kromě toho nyní ovšem máme

$\varrho = \varrho_0$, $\eta = \eta_0$ a $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_{00}$, neboť $\boldsymbol{u} = 0$ ($\gamma_{(u)} = 1$). Čtyřrychlost U_ν má složky $(0, 0, 0, ic)$. Vlastní elektrické a mezické pole částice je popsáno potenciály

$$\boldsymbol{A} = 0\,, \quad \varphi(\boldsymbol{x}) = er^{-1}\,, \tag{91}$$

$$\psi(\boldsymbol{x}) = -gr^{-1}\exp(-\varkappa r) \tag{92}$$

splňujícími rovnice

$$\Delta\varphi = -4\pi\varrho\,, \quad \Delta\psi - \varkappa^2\psi = 4\pi\eta_0\,. \tag{93}$$

Celková energie částice je dána integrálem

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 = \int(-T_{44}(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}V\,, \tag{94}$$

v němž podle (70)

$$-T_{44} = \mu c^2 + h^{(\mathrm{E})} + h^{(M)}\,,$$

$$\mu = \mu_{00} = \bar{\mu}_{00} + c^{-2}\eta_0\psi\,,$$

$$h^{(\mathrm{E})} = (8\pi)^{-1}\,\boldsymbol{E}^2 = (8\pi)^{-1}\,\partial_j\varphi\,\partial_j\varphi\,,$$

$$h^{(M)} = (8\pi)^{-1}\,[\partial_j\psi\,\partial_j\psi + \varkappa^2\psi^2]\,.$$

Jestliže v integrálu (94) členy $\partial_j\varphi\,\partial_j\varphi$ a $\partial_j\psi\,\partial_j\psi$ integrujeme per partes a použijeme rovnic (93) i vzorců (90), dostaneme

$$\mathscr{E}_0 = \int[\mu c^2 - (8\pi)^{-1}\,\varphi\,\Delta\varphi - (8\pi)^{-1}\,\psi\,(\Delta\psi - \varkappa^2\psi)]\,\mathrm{d}V =$$

$$= \int[\bar{\mu}_{00}c^2 + \tfrac{1}{2}\varrho\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_0\psi]\,\mathrm{d}V =$$

$$= \int[\overline{m}_0(0)\,c^2 + \tfrac{1}{2}(e\varphi + g\psi)]\,\delta(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V\,.$$

Nyní dosadíme řešení (91), (92) a *položíme* $g = e$:

$$e\varphi + g\psi = e^2[r^{-1} - r^{-1}(1 - \varkappa r + \ldots)] = e^2\varkappa - \ldots$$

Členy s kladnými mocninami r nepřispívají k integrálu $\mathscr{E}_0$, neboť

$$\int f(r)\,\delta(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V = \mathrm{f}(0)\,.$$

Máme tedy

$$\mathscr{E}_0 = \overline{m}_0(0)\,c^2 + \tfrac{1}{2}\varkappa e^2\,,$$

a pro pozorovatelnou klidovou hmotu volné částice dostáváme výraz

$$\overline{m}_0 = c^{-2}\mathscr{E}_0 = \overline{m}_0(0) + \tfrac{1}{2}c^{-2}e^2\varkappa\,. \tag{95}$$

Vidíme, že pro fiktivní částici s přesně nulovými náboji $e = g = 0$ (volnou a „holou“) je $\overline{m}_0 = \overline{m}_0(0)$. Pro „infinitezimální“ částici, nebo „element hmotného prachu“ s infinitezimálními náboji Δe a Δg je také možno psát místo $\Delta\overline{m}_0(0)$ prostě $\Delta\overline{m}_0$, jak jsme činili v předchozím odstavci. Pro částici sice volnou (bez vnějšího pole), ale „oblečenou“ do svého vlastního pole (tj. s konečnými, nenulovými náboji $e = g$) je *klidová hmota* $\overline{m}_0 \neq \overline{m}_0(0)$, *zůstává však konečná.* Rozdíl $\overline{m}_0 - \overline{m}_0(0)$ je právě klidová hmota pocházející od vlastního pole částice, kdežto $\overline{m}_0(0)$ je klidová hmota „nepolního původu“.

Pro elektron, který má ze všech známých nabitých hmotných částic nejmenší klidovou hmotu, je *možno volit* $\overline{m}_0(0) = 0$ a *určit konstantu* $\varkappa$ tak, aby se číslo

$$\overline{m}_0 = \tfrac{1}{2}e^2\varkappa^2/c^2$$

rovnalo *experimentální klidové hmotě volného elektronu*: $\overline{m}_0 = m_0 \doteq 10^{-27}$ g. Při $e \doteq 5\,.\,10^{-10}$ abs. j. elst. vychází pro veličinu $\varkappa^{-1}$, která podle (92) určuje „dosah“ mezických sil, jimiž na sebe působí dva klidné elektrony, hodnota $\varkappa^{-1} = 10^{-13}$ cm. Tato hodnota se řádově shoduje s poloměrem r_0 Lorentzova kulového elektronu (vypočteným za předpokladu, že setrvačná hmota elektronu je určena pouze jeho elektrostatickou energií $\mathscr{E}_0^{(\mathrm{E})}$). Experimentálně nebyl poloměr elektronu ani dosah neelektromagnetických sil mezi elektrony dosud určen, poněvadž se zatím ještě nepodařilo přivést elektrony při jejich vzájemných srážkách dostatečně blízko k sobě. Proto dosud ani nevíme, zdali neelektromagnetické síly předpokládané uvedenou Stueckelbergovou teorií elektronu vůbec existují.

U protonu, který má stejně velký elektrický náboj jako elektron, ale klidovou hmotu téměř 2000kráte větší, by ovšem ve Stueckelbergově teorii bylo nutno při stejném $\varkappa$ předpokládat $\overline{m}_0(0) > 0$. (Téměř celá klidová hmota by byla „nepolního původu“.) Hodnota $\varkappa = 10^{13}\,\mathrm{cm}^{-1}$ je správná i pro mezické pole protonu, neboť z experimentů je známo, že dosah mezických sil mezi nukleony je skutečně řádu 10^{-13} cm. Na neutronu, jehož elektrický náboj je nulový, ale mezický náboj g nenulový, Stueckelbergova teorie selhává. Její úspěch je tedy jen částečný.

U Stueckelbergova elektronu nebo protonu v klidu jsou složky $T_{j4} = T_{4j} = 0$. Předchozí výpočet složky T_{44} je ovšem možno zobecnit na výpočet tenzoru $T_{\alpha\beta}$ i pro částici v pohybu popsaném křivou světočárou Γ. Tenzor $T_{\alpha\beta}(x)$ *splňuje rovnice*

$$\partial_\alpha T_{\nu\alpha} = 0 \tag{96}$$

pouze ve světobodech mimo světočáru Γ. Na samotné světočáře částice je totiž čtyřvektor $\partial_\alpha T_{\nu\alpha}$ singulární. Ale je možno docílit, aby alespoň integrály

$$Z_\nu(\tau) = \int_{V_0(\tau)} \partial_\alpha T_{\nu\alpha}\,\mathrm{d}V_0$$

po průřezu $V_0(\tau)$ libovolně úzké světové trubice „obalující" světočáru Γ vymizely. Podmínky $Z_\nu = 0$ vedou pak na pohybové rovnice

$$d(m_0 U_\nu)/d\tau = F_\nu^{(E)} + F_\nu^{(M)} + F_\nu^{(z)}, \qquad (97)$$

v nichž $F_\nu^{(E)}$ je *vnější* Lorentzova čtyřsíla a $F_\nu^{(M)}$ je *vnější* mezická čtyřsíla, jako v rovnici (56). Také hmota m_0 je dána stejným výrazem jako v rovnici (56), tj. $m_0 = \overline{m}_0 + c^{-2}g\psi$. Přitom $\overline{m}_0$ je dáno vzorcem (95), $\psi = \psi(x(\tau))$ je potenciál *vnějšího* mezického pole, a ovšem $g = e$. Konečně čtyřvektor $F_\nu^{(z)}$ obsahuje tu *část vlastní síly, která nemá vlastnosti setrvačnostního odporu a není proto započtena v setrvačné hmotě částice;* pochází z toho, že částice při zrychleném pohybu emituje záření a tím se brzdí. Při kvazistacionárním pohybu se může zanedbat. Výraz pro $F_\nu^{(z)}$ je složitý a uvedeme jenom jeho nejdůležitější, totiž *elektromagnetickou* část:

$$F_\nu^{(Ez)} = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{d^2U_\nu}{d\tau^2} - c^{-2}U_\nu \frac{dU_\alpha}{d\tau}\frac{dU_\alpha}{d\tau}\right). \qquad (98)$$

Vzorec (98) představuje relativistické zobecnění Lorentzova vzorce (II 48). Při zanedbatelné rychlosti $\boldsymbol{u}$ máme vskutku

$$f_j^{(Ez)} \equiv \gamma_{(u)}^{-1} F_j^{(Ez)} \doteq \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{da_j}{dt}. \qquad (99)$$

Byla navržena ještě řada jiných tvarů klasické teorie elektronu. Např. Taylor [47] r. 1955 ukázal, že je možno formulovat teorii bodového elektronu i bez použití skalárního pole ψ, tj. při $g = 0$, musí se ovšem vhodně zvolit hustota μ_{00}, popř. tenzor $T_{\nu\alpha}^{(H)}$ (singulární na světočáře Γ), aby jeho příspěvek právě vyvážil (zrušil) divergentní část čtyřhybnosti vlastního elektromagnetického pole bodového náboje e i jeho vlastní síly.

Podrobněji se touto teorií, ani jinými četnými pokusy o klasickou teorii elektronu zabývat nebudeme. Poučení o nich se najde v původní literatuře nebo speciálních monografiích věnovaných „klasické" relativistické teorii pole [48].

Jinak než klasická relativistická teorie přistupuje k problému elementárních částic *kvantová* teorie polí. Tato teorie především zavedla do relativistické fyziky *nová pole, popsaná obecně komplexními funkcemi* $\psi_{(A)}(x)$, které se při Lorentzových transformacích transformují jako složky *tenzorů nebo spinorů* a splňují *nové* invariantní *rovnice pole.* Z komplexních funkcí $\psi_{(A)}$ lze sestrojit nejenom reálné tenzory energie a hybnosti pole, ale i reálné čtyřproudy, které splňují rovnice kontinuity na základě rovnic platných pro funkce $\psi_{(A)}$. Takové pole tedy má obecně nejen energii a hybnost, ale i náboje (elektrický, mezický apod.) a nahrazuje nabitou hmotnou substanci. Rovnice pole pak nahrazují pohybové rovnice hmotné substance.

Rovnice nových polí však mají opět tvar vlnových rovnic a jejich řešení popisují vlny podobné vlnám elektromagnetickým. V nové teorii tedy zřejmě nejde o vyplnění

starého programu „klasické" teorie elektronu. Není to ani třeba, poněvadž skutečné elementární částice nemají všecky vlastnosti hmotných částic podle klasických představ. Kvantová teorie polí popisuje elementární částice jako „kvantované excitace" vlnových polí, což je v mnoha ohledech popis výstižnější než ten, který podává, nebo měla podat klasická teorie. Zde se *kvantováním polí zabývat nebudeme.* V následujícím odstavci se seznámíme pouze s formulací obecného variačního principu a *odvodíme* z něho *obecný tvar rovnic pole* a výrazů pro tenzor energie a hybnosti i čtyřproudu.

6. TEORIE POLÍ A JEJICH INTERAKCE

6,1. ROVNICE NEINTERAGUJÍCÍCH, VOLNÝCH POLÍ

Pole daného druhu je popsáno soustavou obecně komplexních veličin $\psi_{(A)}$, $A = 1, 2, \ldots, N$, které jsou funkcemi souřadnic x_μ (světobodu (x)), transformují se při Lorentzových transformacích těchto souřadnic podle nějaké reprezentace Lorentzovy grupy a splňují invariantní rovnice pole. Zatím jsme se setkali jen s příkladem pole (mezického), pro něž se celá soustava veličin $\psi_{(A)}$ redukovala na jedinou *reálnou, skalární* funkci ψ, a s příkladem pole (elektromagnetického) popsaného čtyřmi funkcemi $\psi_{(A)} \equiv \varphi_\mu$ tvořícími *reálný čtyřvektor.*

Jiným důležitým příkladem je *pole popsané jednou komplexní veličinou* $\chi(x)$, *která je pseudoskalárem.* Při zanedbání interakce splňuje funkce χ (podobně jako ψ) invariantní vlnovou rovnici Schrödingerovu-Gordonovu

$$(\Box - \varkappa^2)\,\chi(x) = 0. \qquad (100)$$

Také komplexně sdružená veličina χ^* splňuje tu rovnici,

$$(\Box - \varkappa^2)\,\chi^*(x) = 0, \qquad (100^*)$$

neboť operátor $\Box - \varkappa^2$ je reálný.

Rovnice druhého řádu (100), popř. (100*) je možno nahradit soustavami rovnic prvního řádu

$$\chi_\alpha = \partial_\alpha \chi, \qquad (100a)$$

$$\partial_\alpha \chi_\alpha - \varkappa^2 \chi = 0, \qquad (100b)$$

popř.

$$\chi_\alpha^\times = \partial_\alpha \chi^*, \qquad (100^*a)$$

$$\partial_\alpha \chi_\alpha^\times - \varkappa^2 \chi^* = 0. \qquad (100^*b)$$

Jsou-li χ a χ^* pseudoskaláry, jsou ovšem χ_α a $\chi_\alpha^\times \equiv (\chi_j^*, -\chi_4^*)$ pseudočtyřvektory.

Jako další příklad zde uveďme ještě tzv. *Procovo pole popsané komplexním čtyřvektorem* $f_\alpha(x)$, který (při zanedbání interakcí) splňuje Procovy rovnice

$$f_{\nu\alpha} = \partial_\nu f_\alpha - \partial_\alpha f_\nu\,, \tag{101a}$$

$$\partial_\alpha f_{\nu\alpha} + \varkappa^2 f_\nu = 0\,. \tag{101b}$$

Rovnice komplexně sdružené k (101a,b) je vhodno psát ve tvaru

$$f^\times_{\nu\alpha} = \partial_\nu f^\times_\alpha - \partial_\alpha f^\times_\nu\,, \tag{101*a}$$

$$\partial_\alpha f^\times_{\nu\alpha} + \varkappa^2 f^\times_\nu = 0\,. \tag{101*b}$$

Veličiny $f^\times_j = f^*_j$ a $f^\times_4 = -f^*_4$ tvoří opět čtyřvektor $f^\times_\alpha$, tj. transfromují se stejně jako f_α (viz Ú V 8).

Z rovnic (101b) popř. (101*b) plyne aplikací ∂_ν při $\varkappa \neq 0$ automaticky „Lorentzova podmínka“

$$\partial_\nu f_\nu = 0\,, \tag{102}$$

popř.

$$\partial_\nu f^\times_\nu = 0\,. \tag{102*}$$

Dosazením ze (101a) do (101b) pak dostáváme pro všecky složky f_ν opět rovnice 2. řádu Schrödingerova-Gordonova typu

$$\partial_\alpha\partial_\alpha f_\nu - \varkappa^2 f_\nu \equiv (\Box - \varkappa^2) f_\nu = 0\,, \tag{103}$$

a podobně

$$(\Box - \varkappa^2) f^\times_\nu = 0\,. \tag{103*}$$

Při $\varkappa \to 0$ a $f^\times_\nu = f_\nu$ přejdou (101a,b) v rovnice tvaru Maxwellových rovnic pro elektromagnetické pole ve vakuu. Potom ovšem podmínka (102) už není důsledkem rovnic (101b).

Existuje celá řada jiných polí popsaných reálnými nebo komplexními veličinami $\psi_{(A)}(x)$ tvořícími tenzory, pseudotenozry i spinory. (Viz např. Ú V 14–17 a učebnice [49, 50].) Rovnice všech těchto (volných) polí jsou rovnicemi vlnovými. Mají např. speciální řešení

$$\psi_{(A)}(x, k) = \psi_{(A)}(0, k) \exp(\mathrm{i}k_\alpha x_\alpha)\,, \tag{104}$$

které popisuje rovinnou, harmonickou vlnu. Jejich obecné řešení lze složit (lineární kombinací) ze speciálních řešení (104).

Všimněme si podrobněji vlastností vlny (104). Její vlnový čtyřvektor k_α splňuje invariantní rovnici

$$k_\alpha k_\alpha = -\varkappa^2\,. \tag{105}$$

(To je podmínka plynoucí z rovnic $(\Box - \varkappa^2)\,\psi_{(A)}(x, k) = 0$.) Při $\varkappa^2 > 0$ je tedy k_α čtyřvektorem časového charakteru. Položíme-li

$$k_\alpha \equiv (\boldsymbol{k}, k_4) = (\omega W^{-1}\boldsymbol{N}, \mathrm{i}c^{-1}\omega)\,, \tag{106}$$

můžeme fázi vlny (104) zapsat ve tvaru

$$F(x, k) \equiv \mathrm{i}k_\alpha x_\alpha = -\mathrm{i}\omega(t - W^{-1}\boldsymbol{N}\,.\,\boldsymbol{x})\,, \tag{107}$$

z něhož je patrné, že W je *fázová rychlost* vlny. Z podmínky (105) pak dostáváme cyklickou frekvenci $\omega = 2\pi\nu$ vyjádřenu vztahem

$$\omega = c(\boldsymbol{k}^2 + \varkappa^2)^{\frac{1}{2}} \tag{108}$$

a fázovou rychlost W vztahem

$$W = \omega\,|\boldsymbol{k}|^{-1} = c[1 - (\varkappa c/\omega)^2]^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{109}$$

Ze vzorce (109) vidíme, že při $\varkappa \neq 0$ je fázová rychlost vlny (104) závislá na její frekvenci. Kromě toho je rychlost W reálná jenom při $\omega > \varkappa c$ (volíme-li $\varkappa$ i ω kladné) a vzorec (109) pak dává hodnoty $W > c$. Ke každé vlně (104), popř. ke každému reálnému vlnovému čtyřvektoru k_α, který splňuje podmínku (105), lze dokonce nalézt systém souřadnic S′, v němž jsou složky $k'_j = 0$ a $k'^2_4 \equiv -(\omega'/c)^2 = -\varkappa^2$. V tomto systému tedy máme $\omega' = \omega_{\min} = \varkappa c$ a $W' \to \infty$!

Na první pohled se zdá, že těmito svými důsledky jsou zmíněné teorie vlnových polí fyzikálně znehodnoceny a nutně vyřazeny. Ale není tomu tak. *Relativistická fyzika* nevylučuje zásadně nadsvětelné rychlosti; jenom *požaduje, aby* se nemohly rychlostí $u > c$ posílat signály. *A tato zásada*, jak ihned uvidíme, *není v uvažovaných teoriích pole porušena.*

Fázová rychlost W vlny (104) *není signálovou rychlostí*, poněvadž po takové vlně nelze žádné zprávy posílat. K tomu je třeba mít vlnu (modulovanou), jejíž lokální vlastnosti (např. amplituda nebo frekvence) nejsou v celém prostoru stejné. Nejjednodušším případem modulované vlny je zase vlnové klubko, které lze matematicky popsat jako složení vlny (104) se všemi podobnými vlnami, jejichž vlnové vektory jsou (co do směru i velikosti) blízké vlnovému vektoru $\boldsymbol{k}$ vlny (104). Složky $\bar{k}_j$ vlnových vektorů těchto rovinných vln leží v jistých malých intervalech $k_j \pm \frac{1}{2}\,\Delta k_j$ a jejich frekvence $\bar{\omega}$ v malém intervalu

$$\omega \pm \tfrac{1}{2}\,\Delta\omega = c(\boldsymbol{k}^2 + \varkappa^2)^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{2}(\partial\omega/\partial k_j)\,\Delta k_j\,. \tag{110}$$

Také jejich (konstantní) amplitudy jsou zhruba stejné. Amplituda výsledné vlny (klubka) je potom místně velmi proměnlivá, neboť vně jisté světové trubice se vlnění interferencí prakticky ruší (viz Ú 3).

Není ani třeba, abychom zde odvozovali explicite výraz, který by ukazoval závislost amplitudy vlnového klubka na místě a čase. (Viz Ú 3.) Nás zajímá pouze *místo* („střed klubka“), v němž má amplituda maximální hodnotu. A to je zřejmě tam, kde co nejvíce rovinných vln skládajících se na klubko *souhlasí* ve fázi. Souřadnice X_j středu klubka jsou tedy určeny rovnicemi

$$\frac{\partial F}{\partial k_j} \equiv \frac{\partial}{\partial k_j}[\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{X} - \omega(\boldsymbol{k})\,t] = X_j - t\,\partial\omega/\partial k_j = 0\,,$$

čili

$$X_j(t) = (\partial\omega/\partial k_j)\,t = V_j t\,. \tag{111}$$

Veličiny

$$V_j = \partial\omega(\boldsymbol{k})/\partial k_j = c^2\omega^{-1}k_j = (c^2/W)\,N_j \tag{112}$$

udávají složky rychlosti postupného pohybu celého vlnového klubka. Tato rychlost, nazývaná též skupinovou rychlostí vln, je hledanou, prakticky použitelnou (dosažitelnou) *rychlostí signálu přenášeného uvažovaným polem „na frekvenci ω“.* Její velikost

$$|\boldsymbol{V}| = c^2W^{-1} = c[1 - (\varkappa c/\omega)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{113}$$

je tedy při $\varkappa > 0$ *menší* než c (a blíží se k této hodnotě při $\varkappa \to 0$ nebo $\omega \to \infty$). Podrobnější a obecnější rozbor problému signálové rychlosti (rychlosti postupu „vlnové fronty“) v relativistické teorii pole podal Blochincev [51].

Konstanty $\varkappa$ jsou ovšem různé podle „druhu“ pole. V kvantové teorii pole konstanta $\varkappa$ souvisí s klidovou hmotou a vlnové čtyřvektory k_α vln (104) se čtyřhybnostmi P_α „kvantovaných excitací“ uvažovaného pole; tyto „excitace“ se interpretují jako „elementární částice“ příslušného „druhu“. Vztah mezi P_α a k_α je velmi jednoduchý:

$$P_\alpha = \hbar k_\alpha\,. \tag{114}$$

Poněvadž

$$P_\alpha \equiv (\boldsymbol{p}, \mathrm{i}c^{-1}\mathscr{E})\,,\quad \mathscr{E} = c(\boldsymbol{p}^2 + m_0^2c^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$

a podobně

$$k_\alpha \equiv (\boldsymbol{k}, \mathrm{i}c^{-1}\omega)\,,\quad \omega = c(\boldsymbol{k}^2 + \varkappa^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$

jsou v rovnicích (114) obsaženy rovnice

$$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}\,,\quad \mathscr{E} = \hbar\omega\,,\quad m_0 = \hbar\varkappa/c\,, \tag{114a}$$

popř. obrácené vztahy

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}/\hbar\,,\quad \omega = \mathscr{E}/\hbar\,,\quad \varkappa = m_0c/\hbar\,, \tag{114b}$$

kterým se říká vztahy de Broglieho. Jsou zcela analogické Planckovým-Einsteinovým vztahům (VI 64a,b) pro foton, ale byly objeveny teprve o téměř dvacet let později. (Planckovy-Einsteinovy vztahy jsou speciálním případem vztahů de Broglieho, kdy $\varkappa = 0$ popř. $m_0 = 0$.)

Poznamenejme ještě, že vzorec (112) pro signálovou rychlost lze užitím (114a) zapsat ve tvaru $\boldsymbol{V} = c^2\boldsymbol{p}/\mathscr{E}$, který je nám dobře znám z relativistické mechaniky hmotné částice (vzorec (VI 76)). Podrobnější rozbor a fyzikální interpretaci těchto vztahů mezi „vlnami a částicemi“ podávají učebnice kvantové mechaniky a kvantové teorie pole.

6,2. VARIAČNÍ PRINCIP A ROVNICE POLE. KANONICKÝ TENZOR ENERGIE A HYBNOSTI A ČTYŘPROUD

Rovnice volného pole popsaného vlnovými funkcemi $\psi_{(A)}$ je možno odvodit z variačního principu

$$\delta\int_\Omega \mathscr{L}\,.\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \delta\mathscr{L}\,\mathrm{d}\Omega = 0\,. \tag{115}$$

Lagrangeova hustota $\mathscr{L}(x)$ je reálný, invariantní, algebraický *výraz*

$$\mathscr{L}(\psi(x), \psi^*(x), \partial\psi(x), \partial\psi^*(x)) \tag{116}$$

utvořený z funkcí $\psi_{(A)}$, $\psi^*_{(A)}$ *a jejich prvních parciálních derivací* $\partial_\nu\psi_{(A)}$, $\partial_\nu\psi^*_{(A)}$ *podle souřadnic* x_ν. Jsou-li veličiny $\psi_{(A)}$ složkami tenzorů, místo veličin $\psi^*_{(A)}$ užíváme veličin $\psi^\times_{(A)}$ (viz příklad Procova pole).

Aby variační princip (115) vedl na *lineární* rovnice pole, musí být výraz (116) *druhého* stupně. Rovnice pole pak dostaneme *nezávislými* infinitezimálními *variacemi veličin* $\psi_{(A)}$ i $\psi^*_{(A)}$. (*Nezávislé* variace *obou* těchto soustav vlnových funkcí odpovídají nezávislým variacím reálných i imaginárních částí veličin $\psi_{(A)}$.) *Variace jsou libovolné uvnitř oblasti Ω, ale vymizí na její hranici Σ.*

Invariance Lagrangeovy hustoty zaručuje invarianci rovnic pole a její reálnost zaručuje, že rovnice získané variací funkcí $\psi_{(A)}$ nebudou ve sporu s rovnicemi, které dostaneme variací funkcí $\psi^*_{(A)}$. (Obě soustavy budou vzájemně komplexně sdružené.) Nutno však poznamenat, že výraz (116) není při daných rovnicích pole určen jednoznačně. Může se k němu přidat invariant ve tvaru čtyřdivergence $\partial_\nu G_\nu(\psi, \psi^*)$, jehož integrál po oblasti Ω se převádí na integrál po hranici Σ a proto nepřispívá k variaci integrálu v rovnici (115). Poněvadž tato čtyřdivergence může být komplexní, nemusí být Lagrangeova hustota (116) nutně reálná; stačí, když je „prakticky reálná“, tj. až na jistou aditivní čtyřdivergenci. (Příklad Diracova pole v Ú 10.)

Sestrojení Lagrangeových hustot pro speciální pole určená jednoduchými rovnicemi (100a,b), (101a,b) i podobnými jinými je snadné a nebudeme je zde uvádět. (Viz Ú 6 až 10.) Odvodíme si pouze obecný tvar rovnic pole příslušných k Lagrangeově hustotě (116). Pro její variaci platí

$$\delta\mathscr{L} = \sum_{(A)}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{(A)}}\delta\psi_{(A)} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\delta\psi^*_{(A)}}\delta\psi^*_{(A)} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\psi_{(A)})}\delta\partial_\nu\psi_{(A)} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\psi^*_{(A)})}\delta\partial_\nu\psi^*_{(A)}\right\}. \tag{117}$$

V posledních dvou členech ve svorce zaměníme pořadí operací δ a ∂_ν. Po dosazení do (115) integrujeme tyto členy per partes a dostaneme tak rovnici

$$\int_\Omega \sum_{(A)} \left\{ \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{(A)}} - \partial_\nu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \psi_{(A)})} \right] \delta\psi_{(A)} + \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*_{(A)}} - \partial_\nu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \psi^*_{(A)})} \right] \delta\psi^*_{(A)} \right\} d\Omega = 0 .$$

Poněvadž variace $\delta\psi_{(A)}$ a $\delta\psi^*_{(A)}$ jsou libovolné a nezávislé, musí platit rovnice pole

$$\partial\mathscr{L}/\partial\psi_{(A)} - \partial_\nu(\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_\nu\psi_{(A)})) = 0 , \tag{118}$$

$$\partial\mathscr{L}/\partial\psi^*_{(A)} - \partial_\nu(\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_\nu\psi^*_{(A)})) = 0 . \tag{118*}$$

Přistupme nyní ke konstrukci tzv. kanonického tenzoru energie a hybnosti pole. V mechanice hmotné částice jsme sestrojovali Hamiltonovu funkci $\mathscr{H}$, která pro volnou částici udává její plnou relativistickou energii $\mathscr{E}$, podle vzorce

$$\mathscr{H} = (\partial\mathscr{L}/\partial u_j)\, u_j - \mathscr{L} .$$

V teorii pole odpovídá funkci $\mathscr{L}$ integrál $\int \mathscr{L}\, dV$. Proto z *Lagrangeovy hustoty* (116) *tvoříme Hamiltonovu kanonickou hustotu energie* $\mathscr{H}$ podle formálně podobného vzorce

$$\mathscr{H} = \sum_{(A)} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{(A)}} \dot\psi_{(A)} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\psi^*_{(A)}} \dot\psi^*_{(A)} \right) - \mathscr{L} . \tag{119}$$

Veličinám $x_j(t)$ a $u_j = \dot{x}_j \equiv dx_j/dt$ „odpovídají" v teorii pole veličiny $\psi_{(A)}(\boldsymbol{x}, t)$ a $\dot\psi_{(A)}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \partial\psi_{(A)}/\partial t$. Vzorec (119) můžeme zapsat také ve tvaru

$$\mathscr{H} = \sum_{(A)} \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_4 \psi_{(A)})} \partial_4\psi_{(A)} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_4 \psi^*_{(A)})} \partial_4\psi^*_{(A)} \right\} - \delta_{44}\mathscr{L} ,$$

z něhož je zřejmé, že veličina $-\mathscr{H}$ je složkou Θ_{44} tenzoru

$$\Theta_{\mu\nu} = -\sum_{(A)} \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \psi_{(A)})} \partial_\mu\psi_{(A)} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \psi^*_{(A)})} \partial_\mu\psi^*_{(A)} \right\} + \delta_{\mu\nu}\mathscr{L} . \tag{120}$$

To je hledaný *kanonický tenzor energie a hybnosti uvažovaného pole.* Snadno se ověří, že na základě rovnic pole (118), (118*) splňuje tenzor (120) rovnice

$$\partial_\nu \Theta_{\mu\nu} = 0 , \tag{121}$$

které ovšem vyjadřují v diferenciální formě zákony zachování energie a hybnosti.

Při reálných funkcích $\psi_{(A)}$ *odpadne ve vzorci* (120) *druhý člen ve svorce,* neboť jeho příspěvek bude už obsažen v prvním členu. Je-li Lagrangeova hustota $\mathscr{L}$ reálná, je také $\Theta_{\mu\nu}$ *reálný tenzor, ale obecně není symetrický.* Na konkrétních příkladech polí (v úlohách ke cvičení) však uvidíme, že tenzor $\Theta_{\mu\nu}$ lze vždy snadno upravit na *reálný a symetrický tenzor* $T_{\mu\nu}$ přidáním jistých členů, které sice mění rozložení energie a hybnosti pole v prostoru, ale nemění úhrnnou energii a hybnost pole. Rovnice (121) zůstávají ovšem v platnosti i pro symetrisovaný tenzor $T_{\mu\nu}$ (tj. splňují je i přídavné členy k $\Theta_{\mu\nu}$).

Pro výpočet úhrnné energie a hybnosti pole není tedy nutno užívat symetrického tenzoru $T_{\mu\nu}$. Stačí k tomu kanonický tenzor $\Theta_{\mu\nu}$, který bývá jednodušší. *Symetrický tenzor je však nezbytný pro výpočet úhrnného momentu hybnosti pole,* neboť pro moment hybnosti vypočtený podle vzorců (VI 137) z kanonického tenzoru $\Theta_{\mu\nu}$ neplatí obecně zákon zachování. Tento moment hybnosti pole odpovídá fyzikálním významem orbitálnímu momentu hybnosti v mechanice hmotných částic. Příspěvek rozdílu $\vartheta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \Theta_{\mu\nu}$ k úhrnnému momentu hybnosti pole je analogický spinu hmotných částic. Podrobnější rozbor se najde v učebnicích teorie pole [48–50]. Obecné pravidlo pro symetrizaci kanonického tenzoru energie a hybnosti libovolného pole nalezl Belinfante [52].

Obecný výraz pro kanonický tenzor energie a hybnosti, který jsme zde nalezli „heuristickým" postupem vycházejícím od vzorce (119), je možno *odvodit* též *přísně deduktivním postupem* založeným na matematickém *teorému Noetherové* o variačních principech invariantních vůči grupám transformací. Tenzor $\Theta_{\mu\nu}$ i úplný tenzor $\Pi_{\mu\nu\varrho}$ hustoty momentu hybnosti se odvozuje na základě invariance Lagrangeovy hustoty vůči *infinitezimálním nehomogenním* Lorentzovým transformacím. Je to však postup dosti zdlouhavý a používá se ho jen v obsáhlejších učebnicích teorie pole, např. [50]. Zde si ukážeme podobný postup na jednodušším příkladě, totiž na odvození výrazu pro čtyřproud J_μ.

Lagrangeovy hustoty (116) volných polí popsaných *komplexními* vlnovými funkcemi $\psi_{(A)}$ mají kromě dosud uvedených vlastností ještě jednu velmi významnou formální vlastnost. Jsou totiž invariantní vůči tzv. fázové substituci

$$\psi_{(A)} \to \psi_{(A)} \exp(i\alpha) , \quad \psi^*_{(A)} \to \psi^*_{(A)} \exp(-i\alpha) , \tag{122}$$

v níž α je libovolná reálná *konstanta.* Substituci (122) se podle Pauliho říká často také *kalibrační transformace prvního druhu.*

Ukážeme si nyní, jak je možné této vlastnosti Lagrangeovy hustoty (116) použít k sestrojení čtyřvektoru J_μ, který na základě rovnic pole (118), (118*) splňuje rovnici kontinuity $\partial_\mu J_\mu = 0$.

Substituce (122) s infinitezimálním α změní veličiny $\psi_{(A)}$, až na členy vyššího řádu, takto:

$$\psi_{(A)} \to \psi_{(A)}(1 + i\alpha) = \psi_{(A)} + \delta\psi_{(A)} , \quad \delta\psi_{(A)} = i\alpha\psi_{(A)} .$$

Stejným způsobem dostaneme

$$\delta\psi^*_{(A)} = -i\alpha\psi^*_{(A)} , \quad \delta\partial_\mu\psi_{(A)} = i\alpha\, \partial_\mu\psi_{(A)} , \quad \delta\partial_\mu\psi^*_{(A)} = -i\alpha\, \partial_\mu\psi^*_{(A)} .$$

Těchto speciálních variací nyní použijeme v obecném vzorci (117). Dosadíme-li ještě za $\partial\mathscr{L}/\partial\psi_{(A)}$ a $\partial\mathscr{L}/\partial\psi^*_{(A)}$ z rovnic (118) a (118*), dostaneme, že

$$\delta\mathscr{L} = -\alpha\,\partial_\mu J_\mu\,, \tag{123}$$

kde

$$J_\mu = \mathrm{i}\sum_{(A)}\left(\psi^*_{(A)}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*_{(A)})} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_{(A)})}\psi_{(A)}\right). \tag{124}$$

Z invariance $\mathscr{L}$ vůči substituci (122) však plyne $\delta\mathscr{L} = 0$, a tedy rovnice kontinuity

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \tag{125}$$

pro čtyřvektor (124).

Tento čtyřvektor, který je při reálném $\mathscr{L}$ reálný, možno fyzikálně interpretovat jako čtyřproud příslušný k danému komplexnímu poli. Takové pole má tedy kromě energie a hybnosti i náboj. Čtyřproud J_μ ovšem nemusí být vždy jen elektrickým čtyřproudem. Pole může mít i jiné náboje. Jde-li o pole „elektricky nabité", dostaneme příslušný elektrický čtyřproud násobením čtyřvektoru (124) jistou universální konstantou vhodného fyzikálního rozměru. Vzhledem k tomu, že podle (119) má $\mathscr{L}$ rozměr hustoty energie $[\mathrm{erg}\,.\,\mathrm{cm}^{-3}]$, má čtyřvektor definovaný vzorcem (124) rozměr $[\mathrm{erg}\,.\,\mathrm{cm}^{-2}]$. Elektrický čtyřproud však musí mít rozměr jako ϱu, tj. $[e\,.\,\mathrm{cm}^{-3}\,.\,\mathrm{cm}\,.\,\mathrm{s}^{-1}] = [e\,\mathrm{cm}^{-2}\,.\,\mathrm{s}^{-1}]$. Konstanta, jíž musíme násobit čtyřvektor (124), abychom dostali veličinu, která má rozměr elektrického čtyřproudu, musí proto mít rozměr $[e\,.\,\mathrm{erg}^{-1}\,.\,\mathrm{s}^{-1}] = [e\hbar^{-1}]$. V teorii elementárních částic se veličiny $\psi_{(A)}$ popisující kvantovaná elektricky nabitá pole definují tak, aby zmíněná konstanta byla přímo rovná $e\hbar^{-1}$. Přitom e je absolutní hodnota elektrického náboje elektronu (elementární elektrický náboj) a $\hbar$ je Planckova konstanta dělená 2π.

6,3. INTERAKCE POLÍ

Soustava neinteragujících (vzájemně na sebe nepůsobících) polí je charakterizována vzájemně oddělenými (nesvázanými) soustavami rovnic jednotlivých druhů pole. Všecky tyto soustavy rovnic (pro různé druhy polí) lze odvodit z jediného variačního principu (115), *vezmeme-li za Lagrangeovu hustotu $\mathscr{L}$ součet Lagrangeových hustot jednotlivých polí.*

Ve skutečnosti ovšem všecka pole (přímo nebo nepřímo) interagují, tj. vzájemně ovlivňují svůj časový vývoj. Při popisu interakce polí postupujeme v zásadě podobně jako v teorii interakce pole a nabité hmotné substance. Pro každý druh pole sestavíme rovnice, které se od lineárních, homogenních vlnových rovnic volného pole liší přídavnými nelineárními „interakčními členy" obsahujícími i vlnové funkce jiných polí. Soustavy rovnic popisující skupinu polí v interakci musí být ovšem opět invariantní vůči Lorentzovým transformacím (alespoň vůči nehomogenní vlastní grupě), dále se musí vzájemně snášet a být v souhlase se všemi empiricky zjištěnými zákony zachování.

Kdybychom takové soustavy rovnic pro tenzorová a spinorová pole měli sestavovat přímo, byl by to úkol velmi obtížný. Proto heuristicky vycházíme opět z variačního principu Hamiltonova. Daný úkol se tím v podstatě redukuje na sestavení jediného invariantního výrazu, tzv. Lagrangeovy hustoty interagujících polí. Tato veličina se od invariantní Lagrangeovy hustoty volných polí také liší pouze přídavnými „interakčními členy", což jsou ovšem nyní vhodné reálné invariantní výrazy sestavené obvykle ze součinů vlnových funkcí různých polí.

Invariantů použitelných a potřebných pro $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$ (interakční členy v Lagrangeově hustotě) není mnoho, zvláště přijmeme-li zásadu maximální jednoduchosti. Omezující požadavek reálnosti a invariance výrazu $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$ zaručuje invarianci a kompatibilitu soustavy rovnic a platnost zákonů zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti i pro soustavu interagujících polí. K dalším podstatným omezením možností výběru členů $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$ vedou zákony zachování rozličných nábojů (společných řadě polí). Platnost takových zákonů vyžaduje totiž invarianci úplné Lagrangeovy hustoty vůči jistým fázovým nebo kalibračním transformacím vlnových funkcí. Tak např. zákon zachování úhrnného elektrického náboje interagujících polí vede k požadavku invariance úplné Lagrangeovy hustoty vůči kalibrační transformaci elektromagnetického čtyřpotenciálu

$$\varphi_\mu \to \varphi_\mu + \partial_\mu\chi(x)\,, \tag{125a}$$

doprovázené fázovou transformací

$$\psi_{(A)} \to \psi_{(A)}\exp\left[\mathrm{i}e(\hbar c)^{-1}\,\chi(x)\right] \tag{125b}$$

společnou pro vlnové funkce všech „elektricky nabitých polí". Substituci (125a,b) Pauli nazval kalibrační transformací 2. druhu. Při $\chi = $ konst přechází na identickou substituci $\varphi_\mu \to \varphi_\mu$ a fázovou substituci tvaru (122) (kalibrační transformace 1. druhu).

Snadno se potvrdí, že se výrazy

$$\left[\partial_\mu\psi_{(A)} - \mathrm{i}e(\hbar c)^{-1}\,\varphi_\mu\psi_{(A)}\right] \tag{126}$$

popř.

$$\left[\partial_\mu\psi^*_{(A)} + \mathrm{i}e(\hbar c)^{-1}\,\varphi_\mu\psi^*_{(A)}\right] \tag{126*}$$

při substitucích (125a,b) transformují stejně jako funkce $\psi_{(A)}$ popř. $\psi^*_{(A)}$ samotné. Odtud plyne, že nejjednodušší Lagrangeovu hustotu invariantní vůči substitucím (125a,b) dostaneme tak, že v Lagrangeově hustotě volných polí *derivace* $\partial_\mu\psi_{(A)}$ popř. $\partial_\mu\psi^*_{(A)}$ (komplexních vlnových funkcí *elektricky* nabitých polí) *nahradíme výrazy* (126) popř. (126*). Tím se do Lagrangeovy hustoty zavedou potřebné interakční členy vyjadřující tzv. minimální elektromagnetickou interakci.

Je samozřejmé, že rovnice interagujících polí lze pak opět zapsat v obecném tvaru (118) a (118*). Také vzorec (120) pro kanonický tenzor energie a hybnosti zůstává formálně beze změny, jen součet podle (A) je ovšem nutno rozšířit na všechny vlnové funkce všech polí. Elektrický čtyřproud je nyní dán opět výrazem (124) násobeným $e/\hbar$.

Podrobnější informace o konstrukci interakčních členů Lagrangeovy hustoty soustavy známých polí a o systematice rozličných typů jejich interakce podávají učebnice kvantové teorie polí a teorie elementárních částic, např. [53]. Tam se najde i poučení o metodě kvantování polí, o metodách řešení rovnic interagujících polí a o fyzikální interpretaci celé teorie, popř. jejím praktickém použití při výkladu jevů pozorovaných při experimentech s elementárními částicemi.

ÚLOHY

1. Upravte Lagrangeovu hustotu (42a) tak, aby z variačního principu (40a) plynuly jak rovnice (44), tak i (43) nezávislými variacemi složek tenzoru $F_{\mu\nu}$ i složek čtyřpotenciálu φ_μ.

2. Upravte Lagrangeovu hustotu (48) skalárního pole tak, aby z variačního principu (40a) plynuly jak rovnice (46), tak i (47) nezávislými variacemi čtyřvektoru ψ_μ i skaláru ψ.

3. Udejte explicitní výraz pro amplitudu vlnového klubka vytvořeného superpozicí rovinných vln (104), s vlnovými vektory $\bar{\boldsymbol{k}}$ blízkými k vektoru $\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k} - \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{k} \leq \leq \bar{\boldsymbol{k}} \leq \boldsymbol{k} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{k}$). Určete pohyb středu klubka.

4. Z Lagrangeovy hustoty $\mathscr{L} = -(16\pi)^{-1} F_{\nu\alpha}F_{\nu\alpha}$ volného elektromagnetického pole ve vakuu vypočtěte kanonický tenzor energie a hybnosti a srovnejte jej se symetrickým tenzorem (VI 33). Ukažte, že oba tenzory dávají tutéž úhrnnou energii a hybnost pole. Srovnejte též momenty hybnosti pole určené oběma tenzory.

5. Omezíme-li „fyzikálně přípustná" řešení d'Alembertových vlnových rovnic $\Box\varphi_\mu = 0$ dodatečnou Lorentzovou podmínkou $\partial_\nu\varphi_\nu = 0$, jsou tyto vlnové rovnice ekvivalentní Maxwellovým rovnicím $\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0$. Ukažte, že uvedené d'Alembertovy vlnové rovnice plynou ze zjednodušené Lagrangeovy hustoty

$$\overline{\mathscr{L}} = -(8\pi)^{-1}\,\partial_\mu\varphi_\nu\,.\,\partial_\mu\varphi_\nu\,.$$

Ukažte dále, že invariant $\overline{\mathscr{L}}$ je „prakticky nezávislý" na kalibraci čtyřpotenciálu $\varphi_\nu \to \varphi_\nu + \partial_\nu\chi$, jestliže χ splňuje rovnici $\Box\chi = 0$. Odvoďte z $\overline{\mathscr{L}}$ kanonický tenzor energie a hybnosti $\overline{\Theta}_{\mu\nu}$ a srovnejte jej s tenzorem (VI 33), tak jako v předchozí úloze.

6. Udejte Lagrangeovu hustotu pseudoskalárního komplexního pole určeného rovnicemi (100), (100*), popř. (100a,b), (100*a,b). Vypočtěte z ní kanonický tenzor energie a hybnosti i čtyřproud.

7. Udejte Lagrangeovu hustotu $\mathscr{L}$, kanonický i symetrický tenzor energie a hybnosti a čtyřproud Procova pole určeného rovnicemi pole (101a,b), (101*a,b).

8. Teorii Procova pole lze formulovat též způsobem použitým pro elektromagnetické pole v Ú 5. Za rovnice pole vezmeme vlnové rovnice (103), (103*) a podmínky (102), (102*) připojíme teprve dodatečně jako omezení pro výběr fyzikálně přípustných řešení. Lagrangeovu hustotu $\overline{\mathscr{L}}$ lze pak volit jednodušší než v Ú 7. Udejte $\overline{\mathscr{L}}$, $\overline{\Theta}_{\mu\nu}$ a J_μ.

9. Udejte Lagrangeovu hustotu, kanonický i symetrický tenzor energie a hybnosti, spinový moment a čtyřproud příslušné spinorovému poli určenému rovnicemi $\boldsymbol{\sigma}_\mu\,\partial_\mu\xi = 0$ z Ú V 14.

10. Sestrojte tytéž veličiny jako v předchozí úloze pro Diracovo pole určené rovnicemi z Ú V 17.