

KAPITOLA VIII

PRINCIP RELATIVITY A FENOMENOLOGICKÁ MAKROFYZIKA

Seznámíme se s použitím principů Einsteinovy teorie relativity v teorii makroskopického elektromagnetického pole, v mechanice kontinua a v termodynamice.

Teorie relativity umožnila odvodit pro makroskopické elektromagnetické pole v pohybujícím se látkovém prostředí rovnice platné bez omezení na prostředí s konstantou $\chi = 0$ a rychlostí $v \ll c$. Uvidíme, že tyto rovnice a relativistické transformační vzorce pro makroskopické elektromagnetické veličiny poskytují jednoduchý výklad elektrodynamických jevů v pohybujících se hmotných tělesech.

V mechanice kontinua si povšimneme zejména transformace složek tenzoru elastických napětí při Lorentzově transformaci. V pohybových rovnicích se omezíme na elastické síly a nebudeme přihlížet k vnějším silám. Rovněž se nebudeme zabývat složitým problémem relativisticky invariantní formulace zobecněného Hookeova zákona.

Nakonec pojednáme o invariantním matematickém vyjádření základních zákonů termodynamických a odvodíme odtud relativistické transformační vzorce pro nejdůležitější termodynamické veličiny (teplo, entropii, teplotu).

1. PRINCIP RELATIVITY V MAKROSKOPICKÉ ELEKTRODYNAMICE

V odst. II 5 jsme se zabývali rovnicemi makroskopického elektromagnetického pole v látkovém prostředí, které je buď v klidu nebo v pomalém, rovnoměrném, translačním pohybu „vůči éteru“. Při formulaci rovnic jsme se omezovali na systémy souřadnic „klidné vůči éteru“, neboť jsme vycházeli ze základních rovnic Lorentzovy elektronové teorie, o nichž jsme *tehdy* předpokládali, že platí (ve známém jednoduchém tvaru) *pouze v takových systémech*. Z hlediska teorie relativity je *toto omezení zbytečné*, neboť víme, že Maxwellovy-Lorentzovy rovnice jsou invariantní vůči Lorentzovým transformacím a platí ve stejném tvaru *ve všech inerciálních systémech*. (Podle teorie relativity ostatně „systémy klidné vůči éteru“ neexistují a omezení na takové systémy proto ani nemá smyslu.) Můžeme tedy tvrdit, že *podle teorie relativity např. rovnice (II 66 až 78) platí v každém systému, který je inerciální a přitom je zároveň klidovým systémem látkového prostředí*. Nadále budeme předpokládat, že pro uvažované látkové prostředí takový (inerciální klidový) systém existuje.

Na druhé straně má ovšem i v teorii relativity smysl a význam rozeznávat případ, kdy je látkové prostředí vůči zvolenému inerciálnímu systému v klidu, od případu, kdy je vůči tomuto systému v rovnoměrném translačním pohybu. Systémy souřadnic klidné vůči danému hmotnému tělesu jsou totiž pro popis jevů probíhajících v tomto tělese význačné a rovnice fenomenologické teorie elektromagnetického pole (alespoň některé) mohou mít (a také mají) v takových systémech speciální, degenerovaný tvar. Musíme tedy očekávat, že *rovnice platné v klidovém systému látkového prostředí (tedy např. rovnice (II 66 až 78)) neplatí v totéž tvaru ve všech inerciálních systémech*.

Je však jasné, že význačnost klidového systému daného inerciálního hmotného tělesa není zásadní povahy (není to význačnost z hlediska obecných fyzikálních zákonů) a že proto musí být možné formulovat i zákony fenomenologické teorie elektromagnetického pole v takovém *obecném tvaru*, v němž *budou platit ve všech inerciálních systémech*. To se vskutku potvrdí.

Zatím se spokojme s tím, že podle teorie relativity rovnice (II 66 až 78) platí v inerciálním systému klidném vůči prostředí. To již umožňuje bez výpočtů nebo dalších hypotéz vyložit negativní výsledky pokusů o určení pohybu Země vůči éteru pozorováním šíření světla v látkovém prostředí klidném vůči Zemi (např. pokusu Rayleighova-Braceova — viz odst. III 5,1, pokusu Hoekova — viz Ú III 20, a pokusu Airyho — viz Ú III 7). Výklad výsledků prvních dvou pokusů je triviální. Všimneme si proto pouze pokusu Airyho, který ukázal, že aberace stálíc měřená dalekohledem naplněným vodou je stejná jako při prázdném dalekohledu.

Výklad tohoto pokusu (podobně jako jiných) podle původní Lorentzovy teorie byl značně složitý, protože bylo nutno podávat jej ze stanoviska „systému klidného vůči éteru“ a přihlížet k částečnému strhování světla pohybujícími se prostředím. V teorii relativity je výklad jednodušší, neboť z hlediska systému spojeného se Zemí (který je *prakticky* inerciální) má světlo stejné vlastnosti, jaké má podle původní Lorentzovy teorie v systému klidném vůči éteru: Ve vakuu i v izotropním *klidném* prostředí jsou totiž vlnoplochy kolmé k paprsku. To znamená, že při pozorování hvězdy musí být prázdný i vodou naplněný dalekohled namířen stejným směrem — přesně proti paprsku světla přicházejícího od hvězdy. Tento paprsek má ovšem v systému spojeném se Zemí jiný směr než v inerciálním systému spojeném se Sluncem. Odchylka obou směrů závisí jen na relativní rychlosti obou systémů a je právě aberací hvězdy.

Vidíme, že při relativistickém výkladu výsledku pokusu Airyho jsme nepotřebovali vůbec mluvit o „strhování světla pohybem prostředí“ a tím méně znát hodnotu „strhovacího koeficientu“. To však neznamená, že v teorii relativity tento pojem (nebo alespoň jeho formální relativistickou obdobu) nelze zavést, a že nemá použití. Může se ovšem uplatnit pouze při *pohybu látkového prostředí vůči zvolenému systému*. Odvození známého Fresnelova vzorce pro strhovací koeficient je v teorii relativity také jednodušší než v původní teorii Lorentzově, neboť podle Einsteinovy teorie je

„částečné strhování“ světla pohybujícím se prostředím jev čistě kinematické povahy. Má totiž svůj původ v Einsteinově adičním teorému rychlostí.

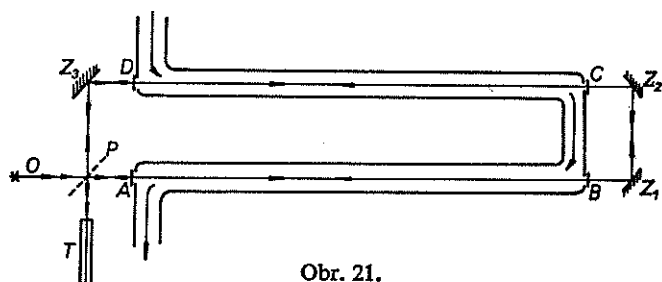
Mějme homogenní, izotropní, průhledné látkové prostředí o indexu lomu $n > 1$, které je v klidu v jistém inerciálním systému S' . Vůči tomuto systému S' se tedy světlo šíří tím prostředím všemi směry stejnou rychlostí $W' = W_0 = c/n < c$. Zvolme si nyní systém S , vůči němuž se prostředí i s ním spojený systém S' pohybuje rychlostí $\mathbf{v} \equiv (v = \beta c, 0, 0)$. Světelná vlna postupující ve směru osy 1, tj. *ve směru pohybu prostředí*, bude pak vůči systému S postupovat rychlostí

$$W = (W' + v)(1 + W'v/c^2)^{-1} = W_0(1 + \beta n)(1 + \beta/n)^{-1}. \quad (1)$$

To je přesný relativistický vzorec pro „strhování světla“. (Zobecnění pro světelný signál a rovinnou vlnu postupující v libovolném směru vůči ose 1 viz v Ú 1 a 2.) Při $\beta \ll 1$ platí přibližný vzorec Fresnelův, neboť

$$W \doteq W_0(1 + \beta n)(1 - \beta/n) \doteq W_0 + v(1 - n^{-2}). \quad (1a)$$

Rychlost světla se tedy jeví zvětšena pouze o ηv , $\eta = 1 - n^{-2} < 1$ (ve shodě s výsledkem odvozeným v odst. II 5,2), ačkoliv podle teorie relativity je „strhování světla“ pohybem prostředí vlastně „úplné“.



Obr. 21.

Experimentálně potvrdil vzorec (1a) Fizeau již r. 1851, a to přímým měřením rychlosti světla v proudící vodě. Uspořádání Fizeauova interferenčního pokusu je schematicky naznačeno na obr. 21. Trubicí proudí voda rychlostí v . Paprsek rozdělený na polopropustném zrcátku P prochází přístrojem jednak *proti směru proudu vody* ($OPZ_1Z_2Z_3PT$) jednak *ve směru proudu* ($OPZ_3Z_2Z_1PT$). Je-li vzdálenost okének $AB = CD = l$, pak první paprsek přijde do dalekohledu T zpožděn proti druhému o dobu

$$\Delta t = 2l[(W_0 - \eta v)^{-1} - (W_0 + \eta v)^{-1}] = 4lvc^{-2}(n^2 - 1),$$

která je úměrná rychlosti proudící vody. Interferenční jev pozorovaný v dalekohledu souhlasí s tímto vzorcem a tak vlastně Fizeau první zjistil jev, který má původ v relativistickém skládání rychlostí.

Fizeauův pokus opakovali v přesnějším provedení Michelson a Morley r. 1886 a Zeeman v letech 1914–15. Zeemanovi se podařilo zjistit i vliv, který má na strhovací koeficient η závislost indexu lomu n na frekvenci světla. (Doplnění formule (1a) členem vyjadřujícím tento vliv je snadné – viz Ú 3.)

2. INVARIANTNÍ TVAR ROVNIC MAKROSKOPICKÉ ELEKTRODYNAMIKY

2.1. ZÁKLADNÍ ROVNICE. TRANSFORMACE ZÁKLADNÍCH VELIČIN

Všimněme si nejprve *vzorce* (II 66) *definujícího* makroskopickou hodnotu $\hat{F}(x)$ mikroskopické veličiny $F(x)$, tj. *střední hodnotu veličiny F v jistém prostoročasovém okolí světobodu (x)* . Tento vzorec je možno nahradit invariantním vzorcem

$$\hat{F}(x) = \Omega^{-1} \int_{(\Omega)} F(x + \xi) d\Omega, \quad (2)$$

v němž souřadnice $x_\mu + \xi_\mu$ určují světobody v jistém prostoročasovém okolí (Ω) světobodu (x) . Dále $d\Omega = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_0$ je element oblasti (Ω) a

$$\Omega = \int_{(\Omega)} d\Omega$$

je invariantní velikost této oblasti. Určitý, speciální *tvar* čtyřrozměrného *integračního oboru* (Ω) je *nepodstatný*, neboť střední hodnota $\hat{F}(x)$ na něm prakticky nezávisí (pokud má (Ω) *správné rozměry*, tj. ani příliš malé ani příliš velké). Operace (2) je invariantní a veličiny $\hat{F}(x)$ se při Lorentzových transformacích transformují stejně jako $F(x)$. Kromě toho zase platí vztahy

$$(\partial_\mu \hat{F}) = \partial_\mu \hat{F}.$$

Tenzor

$$B_{\alpha\nu} \equiv \hat{F}_{\alpha\nu} \quad (3)$$

je utvořen ze složek makroskopické intenzity pole $\mathfrak{E} = \hat{\mathbf{E}}$ a magnetické indukce $\mathfrak{B} = \hat{\mathbf{H}}$ stejným způsobem jako $F_{\alpha\nu}$ z mikroskopických intenzit $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$. Z rovnic (VI 8) plynou tedy rovnice

$$\partial_\mu B_{\nu\varrho} + \partial_\nu B_{\mu\varrho} + \partial_\varrho B_{\mu\nu} = 0, \quad (4)$$

které představují *prostoročasově tenzorový zápis* rovnic (II 70, 71) popř. (II 70*, 71*), tj. *druhé série Maxwellových fenomenologických rovnic*. Rovnice (4) platí v každém

inerciálním systému, bez ohledu na to, zda je vůči němu prostředí v klidu nebo v pohybu.

Z první série Maxwellových-Lorentzových rovnic, zapsaných ve tvaru (VI 7), plynou rovnice

$$\partial_\nu \hat{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu B_{\mu\nu} = 4\pi c^{-1} \hat{J}_\mu = 4\pi c^{-1} (\varrho_0 U_\mu), \quad (5)$$

kteří představují *prostorově časově tenzorový zápis rovnic* (II 68, 69). Také rovnice (5) platí tedy ve všech inerciálních systémech, ale ve fenomenologické teorii se jich nepoužívá, poněvadž je vhodné zavádět místo složek čtyřproudu

$$\hat{J}_\mu = (\varrho_0 U_\mu) \equiv (\varrho u, ic\varrho) \quad (6)$$

jiné veličiny, totiž veličiny

$$j_\mu \equiv (\mathbf{j}, ic\varrho^*) \quad (7)$$

definované vztahy (II 72, 73), je-li prostředí v klidu, a vztahy (II 72', 73'a, 83a.b), je-li prostředí v pohybu. V druhém případě jsou citované vzorce a vztahy neúplné ($\chi = 0$) a přibližné ($v \ll c$).

Abychom dospěli k relativistickému tenzorovému zápisu obvykle používaných rovnic fenomenologické teorie i k přesné, úplné a invariantní definici veličin v nich vystupujících, budeme postupovat (podle Minkowského) takto: Zvolíme si nejprve systém, vůči němuž je prostředí v klidu. (Předpokládáme, že je inerciální.) Ze složek vektorů $-\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{M}$ utvoříme veličiny $M_{\alpha\beta}$ stejným způsobem, jako jsou ze složek vektorů $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$ utvořeny složky tenzoru $F_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} -\mathfrak{P} &\equiv (iM_{14}, iM_{24}, iM_{34}), \\ \mathfrak{M} &\equiv (M_{23}, M_{31}, M_{12}), \\ M_{11} &= M_{22} = M_{33} = M_{44} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Veličinám $M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha}$ přisoudíme také transformační vlastnosti složek *antisymetrického prostorově časového tenzoru* a definujeme pak další takový tenzor rovnicemi

$$D_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - 4\pi M_{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Použijeme-li významu jednotlivých složek tenzorů $B_{\alpha\beta}$ a $M_{\alpha\beta}$ a porovnáme-li rovnice (9) s rovnicemi (II 74, 75), zjistíme, že tenzor $D_{\alpha\beta}$ je utvořen z makroskopických vektorů $\mathfrak{D}$ a $\mathfrak{H}$ opět stejným způsobem, jako $F_{\alpha\beta}$ z mikroskopických vektorů $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$. Rovnice (9) budeme tedy pokládat za invariantní zápis rovnic (II 74, 75). Ukážeme si, že důsledky tohoto předpokladu jsou ve shodě s fenomenologickou teorií z odst. II 5 i se zkušeností.

Zavedeme-li tenzor $D_{\mu\nu}$ místo $B_{\mu\nu}$ do rovnic (5), dostaneme rovnice

$$\partial_\nu D_{\mu\nu} = 4\pi c^{-1} j_\mu, \quad (10)$$

v nichž čtyřvektor j_μ je dán vzorcem

$$j_\mu = \hat{J}_\mu - c\partial_\nu M_{\mu\nu}. \quad (11)$$

Pro takto definovaný čtyřvektor j_μ platí automaticky rovnice kontinuity, neboť

$$\partial_\mu j_\mu = \partial_\mu \hat{J}_\mu - c\partial_\mu \partial_\nu M_{\mu\nu} = 0,$$

poněvadž $\partial_\mu \hat{J}_\mu = (\partial_\mu J_\mu) = 0$ a $\partial_\mu \partial_\nu M_{\mu\nu} \equiv 0$. Ukážeme ihned, že veličiny j_μ v (11) je možno identifikovat s veličinami j_μ v (7) a že tedy rovnice (10) představují *prostorově časově tenzorový zápis první série Maxwellových fenomenologických rovnic*.

Rozepíšeme-li rovnice (11) v obyčejném označení podle definic (6), (7), (8), zjistíme, že mají tvar

$$\mathbf{j} = (\varrho \mathbf{u}) - c \operatorname{rot} \mathfrak{M} - \partial \mathfrak{P} / \partial t, \quad (11a)$$

$$\varrho^* = \hat{\varrho} + \operatorname{div} \mathfrak{P}, \quad (11b)$$

zcela shodný s rovnicemi (II 73, 72). Podle odst. II 5 platily tyto rovnice pouze v případě prostředí v klidu. Při prostředí v pohybu jsme měli veličiny $\mathbf{j}$ a ϱ^* vyjádřeny veličinami $\mathbf{j}'$, ϱ'^* , $\mathfrak{P}'$, ($\mathfrak{M}' \equiv 0$) definovanými z hlediska pozorovatele pohybujícího se s prostředím, čili v klidovém systému S' . Poněvadž nyní rovnice (11a,b) platí i pro prostředí v pohybu, musíme pro srovnání se starými formulami určit vztah mezi veličinami $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{M}'$ i mezi veličinami $\mathbf{j}$, ϱ^* a $\mathbf{j}'$, ϱ'^* . Na to máme nyní přesné relativistické transformační vzorce pro složky tenzoru $M_{\mu\nu}$ a čtyřvektoru j_μ .

Budiž tedy S inerciální systém, vůči němuž se *prostředí pohybuje* rychlostí $\mathbf{v} \equiv (v, 0, 0)$. Klidový systém prostředí označíme S' a budeme předpokládat, že jeho osy jsou zvoleny tak, aby platila speciální Lorentzova transformace

$$x_1 = \gamma x'_1 - i\beta \gamma x'_4, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = i\beta \gamma x'_1 + \gamma x'_4. \quad (12)$$

Všecky předchozí definice a rovnice (2) až (11a,b) platí, jak jsme již uvedli, v systému S' i S . Všimněme si nejprve rovnic (9), které v obyčejném vektorovém označení mají ve všech inerciálních systémech tvar (II 74, 75). Abychom je mohli porovnat se starými formulami (II 74', 75'), které při $\mathfrak{M}' = 0$ platí s přesností do veličin úměrných $\beta = v/c$, musíme vyjádřit složky vektorů $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{M}$ v (8) čárkovanými veličinami. Z transformačních vzorců pro složky antisymetrického tenzoru $M_{\mu\nu}$ při transformaci (12) dostáváme

$$M_{14} = M'_{14}, \quad M_{24} = \gamma(M'_{24} - i\beta M'_{12}), \quad M_{34} = \gamma(M'_{34} + i\beta M'_{31}), \quad (13a)$$

$$M_{23} = M'_{23}, \quad M_{31} = \gamma(M'_{31} - i\beta M'_{34}), \quad M_{12} = \gamma(M'_{12} + i\beta M'_{24}). \quad (13b)$$

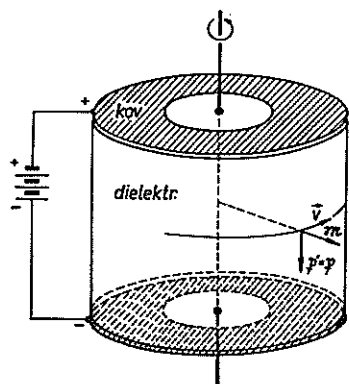
Je-li $M'_{jk} = 0$ (tj. $\mathfrak{M}' = 0$) a $\beta \ll 1$, potom při zanedbání členů s vyššími než prvními mocninami β lze rovnice (13a,b) zapsat v obyčejném vektorovém označení (8) takto:

$$\mathfrak{P} \doteq \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{M} \doteq -c^{-1} \mathbf{v} \times \mathfrak{P}'. \quad (14)$$

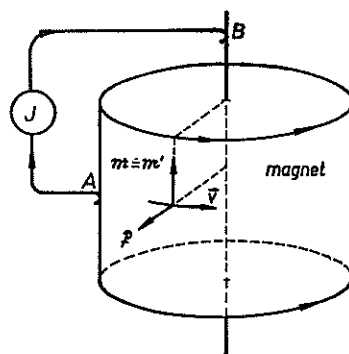
Dosazením těchto výrazů do (II 74, 75) dostáváme však právě rovnice (II 74', 75').

Vidíme, že látkové prostředí, které je ve svém klidovém systému S' pouze elektricky polarizováno, se v systému S jeví i magneticky polarizovaným. Vliv vyjádřený rovnicemi (14) byl experimentálně prokázán pokusem Eichenwaldovým uspořádaným podle obr. 22.

Dielektrický válec, k jehož základnám jsou přiloženy kovové elektrody s rozdílem potenciálu, je axiálně elektricky polarizován. Při rotaci kolem osy má být válec podle (14) *zmagnetován ve směru radiálním*. Pokus to potvrzuje.



Obr. 22.



Obr. 23.

Volíme-li v rovnicích (13a,b) $M'_{j4} = 0$ ($\mathfrak{P}' = 0$) dostaneme zase přibližně

$$\mathfrak{P} \doteq c^{-1} \mathbf{v} \times \mathfrak{M}', \quad \mathfrak{M} \doteq \mathfrak{M}'. \quad (15)$$

Magnet v pohybu se tedy jeví elektricky polarizovaným. Také tento vliv je možno experimentálně prokázat v uspořádání podle obr. 23.

Rotuje-li válcový magnet (axiálně zmagnetovaný) kolem své osy, jeví se *radiálně elektricky polarizovaným*. Mezi osou a pláštěm válce je pak elektrické napětí. Poněvadž magnetické materiály jsou elektricky vodivé, vzniká ve vodiči spojujícím kontakty A, B trvalý elektrický proud. Tento jev se nazývá unipolární indukce a je v technice již dávno používán (unipolární dynamo). Správný výklad tohoto jevu však podala vlastně teprve teorie relativity.

Všimněme si nyní důsledků plynoucích z toho, že veličiny $j_\mu \equiv (\mathbf{j}, icq^*)$ tvoří čtyřvektor. V klidovém systému S' vodivého látkového prostředí se vektor $\mathbf{j}'$ interpretuje jako hustota *vodivého* proudu. Poněvadž, jak známo, v klidném vodiči protékáním stacionárním proudem je $q^{*'} = 0$, ale $\mathbf{j}' \neq 0$, máme v takovém případě invariant $j'_\mu j'_\mu = \mathbf{j}'^2 > 0$ a čtyřvektor j_μ je tedy prostorového charakteru. Jindy zase (např. v nabitěm dielektriku) může být $q^{*'} \neq 0$, ale $\mathbf{j}' = 0$, takže $j'_\mu j'_\mu = -c^2 q^{*'}^2 < 0$ a čtyřvektor j_μ je časového charakteru. Připomeňme si, že mikroskopický čtyřproud v elektronové teorii $J_\mu = e_0 U_\mu$ byl vždy časového charakteru, neboť $J_\mu J_\mu = -c^2 e_0^2 < 0$.

Přejdeme opět od klidového systému S' k systému S určenému speciální Lorentzovou transformací (12). Veličiny j_μ se transformují stejně jako x_μ a proto platí vztahy

$$j_1 = \gamma(j'_1 + vq^{*'}), \quad j_2 = j'_2, \quad j_3 = j'_3 \quad (16a)$$

$$q^* = \gamma(q^{*'} + vc^{-2}j'_1). \quad (16b)$$

Je-li $v \ll c$, můžeme rovnice (16a) zapsat v přibližném tvaru

$$\mathbf{j} \doteq \mathbf{j}' + q^{*'} \mathbf{v}, \quad (17)$$

ve shodě s definiční rovnicí (II 83a). Dosadíme-li ze (17) a (14) do rovnice (11a), dostaneme právě vztah (II 73'a).

Naproti tomu z rovnice (16b) dostáváme s přesností do veličin úměrných v přibližný vzorec

$$q^* = q^{*'} + c^{-2} v j'_1 = q^{*'} + c^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}', \quad (18)$$

který *nesouhlasí se starým vzorcem* (II 83b), tj. $q^* \doteq q^{*'}$. Také když z (18) a (14) dosadíme do (11b), dostaneme vztah

$$\hat{q} \doteq q^{*'} - \text{div } \mathfrak{P}' + c^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}', \quad (19)$$

který se liší od (III 72') posledním členem. *Staré vzorce pro hustotu náboje v pohybujícím se prostředí jsou tedy chybné.*

Člen

$$q_{(\text{vod})}^* \doteq c^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}' \quad (20)$$

v (18) a (19) se nazývá „vodivá“ hustota náboje. Setkali jsme se s ním už v příkladě probíraném v Ú III 22. Bude tedy poučné srovnat interpretaci tohoto členu z hlediska teorie relativity a z hlediska starší teorie.

Podle teorie relativity je v proudovodiči b) (viz text Ú III 22 a obr. 12) hustota náboje q^* od nuly různá pouze z hlediska systému S , vůči němuž se proudovodič pohybuje. Z hlediska jeho klidového systému S' je $q^{*'} = 0$, tak jako je v proudovodiči a) hustota $q^* = 0$ (z hlediska systému S , v němž je proudovodič v klidu). A obráceně je ovšem v proudovodiči a) hustota $q^{*'} \neq 0$. Oba případy a), b) jsou zcela ekvivalentní; liší se pouze hlediskem (volbou systému), z něhož je posuzujeme a jeden z druhého lze získat prostou Lorentzovou transformací (12) popř. (16a,b). Makroskopická hustota náboje ve vodiči protékaném vodivým proudem je pojem a veličina relativní, podobně jako časová diference dvou kvazisoučasných událostí. (Lze ukázat, že uvažovaný elektrický jev je skutečně důsledkem relativnosti pojmu současnosti.)

Podle staré teorie Lorentzovy se oba případy v Ú III 22 *absolutně liší*. V proudovodiči b) by podle vzorce (II 83b) měla být hustota náboje $q^{*'} = q^* \neq 0$, kdežto v proudovodiči a) je $q^{*'} = q^* \equiv 0$. Přitom, jak je patrné z řešení úlohy, pozorovatel pohybující se s proudovodičem b) by nemohl „nenulovou“ hustotu náboje $q^{*'}$ zjistit a využít toho k určení svého „pohybu vůči éteru“!

2.2. INVARIANTNÍ DEFINICE VODIVÉHO PROUDU A INVARIANTNÍ TVAR MATERIÁLOVÝCH VZTAHŮ

Vztahem (11) je čtyřproud j_μ vystupující ve fenomenologických rovnicích (10) vyjádřen pomocí středovaného mikroskopického čtyřproudu $\hat{j}_\mu$ a polarizačního tenzoru $M_{\mu\nu}$ (tenzoru makroskopické hustoty elektrického a magnetického dipólového momentu). Ve fenomenologické teorii se však veličin $\hat{j}_\mu$ nepoužívá. Hustota vodivého proudu v klidném prostředí se určuje z Ohmova zákona (II 78), indukční vektory $\mathfrak{D}$ a $\mathfrak{B}$ jsou určeny materiálovými vztahy (II 77a,b) a vektory $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$ vztahy (II 74, 75), které už máme zapsány v invariantním tvaru (9). Jde tedy o to, zapsat v invariantním tvaru i rovnice (II 77a,b) a (II 78). (Tyto vztahy jsou sice přesné, ale platí pouze v klidovém systému látkového prostředí.)

Začneme s materiálovými vztahy (II 77a,b). Označíme-li opět *klidový systém prostředí* za S' , platí v něm

$$\mathfrak{D}' = \varepsilon \mathfrak{E}', \quad \mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H}',$$

čili

$$D'_{j4} - \varepsilon B'_{j4} = 0, \quad B'_{jk} - \mu D'_{jk} = 0.$$

Uvážíme-li, že v systému S' má *prostředí čtyřrychlost* $U_v^{*'} = (0, 0, 0, ic)$ a že tenzory $D_{\alpha\nu}$ a $B_{\alpha\nu}$ jsou antisymetrické, vidíme, že poslední vztahy je možno psát též ve tvaru

$$(D'_{\alpha\nu} - \varepsilon B'_{\alpha\nu}) U_v^{*'} = 0, \quad (21)$$

$$\sum_{\text{cykl}(\alpha\lambda\nu)} (B'_{\alpha\lambda} - \mu D'_{\alpha\lambda}) U_v^{*'} = 0. \quad (22)$$

Ale to jsou zřejmě tenzorové rovnice, které platí ve stejném tvaru ve všech inerciálních systémech. Jestliže v systému S , v němž má *prostředí čtyřrychlost* $U_v^* = (\gamma_{(v)}\mathbf{v}, ic\gamma_{(v)})$, rozepíšeme rovnice (21) a (22) opět v obyčejném vektorovém označení, dostaneme

$$\mathfrak{D} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathfrak{H} = \varepsilon(\mathfrak{E} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathfrak{B}), \quad (21a)$$

$$\mathfrak{B} - c^{-1}\mathbf{v} \times \mathfrak{E} = \mu(\mathfrak{H} - c^{-1}\mathbf{v} \times \mathfrak{D}). \quad (22a)$$

Tyto rovnice lze snadno rozřešit podle vektorů $\mathfrak{D}$ a $\mathfrak{B}$ a získat explicitní vzorce

$$\mathfrak{D} = (1 - \varepsilon\mu\beta^2)^{-1} \{ \varepsilon\gamma^{-2}\mathfrak{E} + c^{-1}(\varepsilon\mu - 1) [\mathbf{v} \times \mathfrak{H} - c^{-1}\varepsilon(\mathbf{v} \cdot \mathfrak{E})\mathbf{v}] \}, \quad (21b)$$

$$\mathfrak{B} = (1 - \varepsilon\mu\beta^2)^{-1} \{ \mu\gamma^{-2}\mathfrak{H} + c^{-1}(\varepsilon\mu - 1) [\mathbf{v} \times \mathfrak{E} - c^{-1}\mu(\mathbf{v} \cdot \mathfrak{H})\mathbf{v}] \}. \quad (22b)$$

Také tyto vzorce je ostatně možno jednoduše zapsat v očividně invariantním tvaru

$$D_{\alpha\nu} = \mu^{-1} \{ B_{\alpha\nu} + c^{-2}(\varepsilon\mu - 1) (U_\alpha^{*'} B_{\nu\lambda} - U_\nu^{*'} B_{\alpha\lambda}) U_\lambda^{*'} \}. \quad (23)$$

Při $\mathbf{v} = 0$ dostáváme z (21b) a (22b) opět staré vzorce (II 77a,b). Dále je z nich vidět, že při $\varepsilon = \mu = 1$ (tj. ve vakuu) platí $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ ($D_{\alpha\nu} = B_{\alpha\nu}$) *nezávisle na*

rychlosti v. Tak tomu musí být, neboť rychlost vakua („éteru“) vůči systému nelze v teorii relativity definovat. V invariantním tvaru podobném (21), (22) a (23) lze napsat i materiálové vztahy (II 76a,b) — viz Ú 4.

Zbývá zapsat v invariantním tvaru Ohmův zákon (II 78). K tomu je především nutno invariantním způsobem definovat hustotu vodivého proudu, tj. *definovat vodivý čtyřproud* $j_v^{(\text{vod})}$.

Makroskopický čtyřproud j_v , vystupující v invariantních rovnicích (10) se skládá obecně z části vodivé a části konvekční $j_v^{(\text{konv})}$. V klidovém systému S' je rozdělení čtyřproudu j_v na obě části jednoduché, neboť hustota konvekčního proudu $\mathbf{j}_{(\text{konv})}' = 0$ a „vodivá“ hustota náboje $\varrho_{(\text{vod})}' = 0$. V klidovém systému tedy můžeme psát

$$j_v' = (\mathbf{j}', ic\varrho^{*'}) = j_v^{(\text{vod})} + j_v^{(\text{konv})}, \quad (24)$$

přičemž

$$j_v^{(\text{konv})} \equiv (0, ic\varrho^{*'}), \quad (25)$$

$$j_v^{(\text{vod})} \equiv (\mathbf{j}', 0). \quad (26)$$

Klidová makroskopická hustota náboje $\varrho_0^* \equiv \varrho^{*'}$ je ovšem prostoročasový skalár, který můžeme vyjádřit invariantním vzorcem

$$\varrho_0^* = -c^{-2} j_v' U_v^{*'} = -c^{-2} j_v U_v^*. \quad (27)$$

Poněvadž v klidovém systému S' je $U_v^{*'} \equiv (0, ic)$ dává (27) a (24) skutečně $\varrho_0^* = \varrho^{*'}$. Čtyřvektor (25) lze pak vyjádřit v podobě

$$j_v^{(\text{konv})} = \varrho_0^* U_v^{*'}; \quad (25a)$$

v systému S , v němž má *prostředí libovolnou čtyřrychlost* U_v^* , tedy platí

$$j_v^{(\text{konv})} = \varrho_0^* U_v^* = -c^{-2} j_\alpha U_\alpha^* U_v^*, \quad (28)$$

a vodivý čtyřproud

$$j_v^{(\text{vod})} \equiv j_v - j_v^{(\text{konv})} = j_v + c^{-2} j_\alpha U_\alpha^* U_v^*. \quad (29)$$

Tyto vzorce jsou invariantní a v klidovém systému S' se redukují na (25) a (26). Všimněte si, že v systému S , v němž má *látkové prostředí rychlost v*, vzorec (28) dává

$$\mathbf{j}_{(\text{konv})} = \varrho_0^* \gamma \mathbf{v} = \gamma \varrho^{*'} \mathbf{v} = \varrho_{(\text{konv})}^* \mathbf{v},$$

$$\varrho_{(\text{konv})}^* \equiv (ic)^{-1} j_4^{(\text{konv})} = \gamma \varrho_0^* = \varrho^* \text{ (je-li } \mathbf{j}' \neq 0 \text{ — viz (16b))}.$$

Ohmův zákon lze nyní vyjádřit invariantní rovnicí

$$j_v^{(\text{vod})} = \sigma c^{-1} B_{\nu\alpha} U_\alpha^*. \quad (30)$$

V klidovém systému S' dostáváme $\mathbf{j}'_{(v0)} \equiv \mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}', j'_4{}^{(v0)} = 0$. V systému S , v němž se vodivé prostředí pohybuje rychlostí $\mathbf{v}$, platí vztahy

$$\mathbf{j}_{(v0)} = \sigma \gamma (\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$q_{(v0)}^* \equiv (ic)^{-1} j_4^{(v0)} = \sigma c^{-2} \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = c^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}_{(v0)} = c^{-2} \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}'.$$

Pro úplnou hustotu makroskopického proudu $\mathbf{j}$ tedy platí v systému S vyjádření

$$\mathbf{j} = \gamma [\sigma (\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q^* \mathbf{v}];$$

liší se od starého, přibližného výrazu, který dostaneme dosazením z (II 78') do (II 83a), pouze faktorem γ .

Připomeňme nakonec, že jsme se omezili a také v dalším odstavci se omezíme pouze na homogenní a izotropní prostředí. Zobecnění relativistické teorie makroskopického elektromagnetického pole pro neizotropní prostředí, v němž skalární materiálové konstanty ϵ , μ , σ jsou nahrazeny jistými konstantními tenzory $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$, není již příliš obtížné. (Viz např. [54].) Z hlediska teorie relativity je nejdůležitější popis vlivu pohybu prostředí. Na objasnění metody tohoto popisu však stačí omezit se na prostředí izotropní.

3. TENZOR ENERGIE A HYBNOSTI MAKROSKOPICKÉHO ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

Na první pohled by se mohlo zdát, že správný tenzor energie a hybnosti makroskopického pole v látkovém prostředí vznikne prostým středováním podle předpisu (2) z mikroskopického tenzoru (VI 33), čili, že jím je tenzor $\hat{T}_{\nu\alpha}^{(E)}$. Tento (symetrický) tenzor však nelze vyjádřit makroskopickými veličinami $D_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ a U_α^* , které určují pole a pohyb prostředí. Samozřejmě ani příslušnou vlastní hustotu čtyřsily $\hat{\phi}_\nu = -\partial_\alpha \hat{T}_{\nu\alpha}^{(E)}$ nelze těmi veličinami vyjádřit. Proto se tenzoru $\hat{T}_{\nu\alpha}^{(E)}$ a čtyřvektoru $\hat{\phi}_\nu$ ve fenomenologické teorii nedá použít. V této teorii se musíme spokojit s vhodnými přibližnými výrazy sestavenými z tenzorů $B_{\alpha\beta}$ a $D_{\alpha\beta}$ a popř. čtyřvektoru U_α^* .

Nejjednodušším použitelným tenzorem energie a hybnosti je tzv. tenzor Minkowského, určený vzorcem

$$T_{\nu\alpha}^* = (4\pi)^{-1} (B_{\nu\lambda} D_{\alpha\lambda} - \frac{1}{4} \delta_{\nu\alpha} B_{\kappa\lambda} D_{\kappa\lambda}). \quad (31)$$

Všimněme si blíže jeho nejdůležitějších vlastností.

Známymi jednoduchými úpravami užívajícími antisymetrie tenzorů $B_{\alpha\lambda}$ a $D_{\alpha\lambda}$ i rovnic pole (4) a (10) se snadno odvodí rovnice

$$\partial_\alpha T_{\nu\alpha}^* = -c^{-1} B_{\nu\lambda} j_\lambda + \pi^{-1} (D_{\kappa\lambda} \partial_\nu B_{\kappa\lambda} - B_{\kappa\lambda} \partial_\nu D_{\kappa\lambda}).$$

Výraz (čtyřvektor) v závorce se však rovná nule, pokud jsou čtyřrychlost prostředí U_α^* i veličiny ϵ a μ konstantní. To je zřejmé v klidovém systému S' , v němž platí jednoduché vztahy $D'_{j4} = \epsilon B'_{j4}$, $B'_{jk} = \mu D'_{jk}$; a poněvadž jde o čtyřvektor, vymizí i v každém jiném systému. (Lze to potvrdit také přímo dosazením za $D_{\kappa\lambda}$ ze vztahu (23)). Minkowského tenzor tedy dává pro čtyřvektor vlastní hustoty makroskopické elektromagnetické čtyřsily působící na látkové prostředí vzorec

$$\phi_\nu^* \equiv -\partial_\alpha T_{\nu\alpha}^* = c^{-1} B_{\nu\lambda} j_\lambda. \quad (32)$$

První tři složky ϕ_j^* tvoří obyčejný vektor makroskopické hustoty síly

$$\phi^* = q^* \mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (33)$$

a čtvrtá složka udává veličinu

$$\phi_4^* = ic^{-1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (34)$$

K objasnění fyzikálního významu této veličiny v libovolném inerciálním systému S si nejprve všimněme jejího významu v klidovém systému S' , v němž platí $\mathbf{j}' = \mathbf{j}'_{(v0)} = \sigma \mathbf{E}'$, a tedy

$$\phi_4^{*'} = ic^{-1} \sigma E'^2 = (i/c) q'. \quad (34a)$$

Vidíme, že $\phi_4^{*'}$ udává (i/c) -násobné množství Jouleova tepla $q' = \sigma E'^2 = q_0$, vyvinutého z hlediska klidového systému v jednotce (klidového) objemu prostředí za jednotku (vlastního) času. Jelikož $U_\nu^{*'} \equiv (0, 0, 0, ic)$, platí také

$$U_\nu^{*'} \phi_\nu^{*'} = ic \phi_4^{*'} = -\mathbf{E}' \cdot \mathbf{j}' = -q' = -q_0.$$

Výraz na levé straně je však invariantní a proto i v každém jiném inerciálním systému S platí vztah $U_\nu^* \phi_\nu^* = -q_0$. Dosazením $U_\nu^* = (\gamma \mathbf{v}, ic\gamma)$ dostáváme tedy ϕ_4^* v novém vyjádření

$$\phi_4^* = (ic\gamma)^{-1} (-\gamma \mathbf{v} \cdot \phi^* - q_0) = (i/c) (\mathbf{v} \cdot \phi^* + q). \quad (34b)$$

Veličina $q = \gamma^{-1} q_0$ je Jouleovo teplo vyvinuté z hlediska systému S v jednotce objemu za jednotku času a $\mathbf{v} \cdot \phi^*$ je hustota výkonu elektromagnetické ponderomotorické síly v pohybujícím se prostředí. Z výkladu v odst. VI 7,1 víme, že zcela obecně přívod tepla, a tedy i vývoj Jouleova tepla, v objemových elementech vodivého prostředí je nutně spojen s růstem jejich klidové hmoty. S výrazem tvaru (34b) jsme se už také setkali v odst. VII 4,4 v rovnici (VII 88a). Síla $\Delta f^* = \phi^* \Delta V$ tedy patří k tomu druhu sil, které mění klidovou hmotu materiálního objektu, na nějž působí (zde objemového elementu prostředí).

V nenabitém dielektriku, v němž je $q_0^* = 0$ a $\sigma = 0$ (a tedy i $j_\alpha = 0$), vymizí čtyřvektor ϕ_ν^* a tenzor $T_{\nu\alpha}^*$ splňuje rovnice $\partial_\alpha T_{\nu\alpha}^* = 0$. Pro úhrnnou energii a hybnost pole v tomto případě platí zákony zachování.

Vyjádříme-li složky Minkowského tenzoru $T_{\alpha\beta}^*$ makroskopickými vektory $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{H}$, dostaneme vztahy

$$T_{jk}^* = (4\pi)^{-1} [\frac{1}{2}\delta_{jk}(\mathcal{E} \cdot \mathcal{D} + \mathcal{H} \cdot \mathcal{B}) - \mathcal{E}_j\mathcal{D}_k - \mathcal{H}_j\mathcal{B}_k], \quad (35)$$

$$T_{44}^* = -h^* = (8\pi)^{-1} (\mathcal{E} \cdot \mathcal{D} + \mathcal{H} \cdot \mathcal{B}), \quad (36)$$

$$T_{j4}^* = icw_j, \quad (37)$$

$$T_{4j}^* = ic^{-1}\mathcal{S}_j, \quad (38)$$

v nichž w_j a $\mathcal{S}_j$ jsou složky vektorů

$$w = (4\pi c)^{-1} \mathcal{D} \times \mathcal{B}, \quad (37a)$$

$$\mathcal{S} = (4\pi)^{-1} c\mathcal{E} \times \mathcal{H}. \quad (38a)$$

Tyto vztahy se shodují se vztahy známými z Maxwellovy fenomenologické teorie elektromagnetického pole v klidném látkovém prostředí. Podle Minkowského je můžeme pokládat za platné v libovolném inerciálním systému, tj. i v případě, kdy se prostředí vůči zvolenému systému pohybuje. Oprávnění plyne z toho, že je můžeme shrnout v prostorově-časově tenzorový vzorec (31), jehož tvar na volbě systému nezávisí.

Minkowského tenzor $T_{\alpha\beta}^*$ má přednosti i nedostatky. Jeho předností je především formální jednoduchost jeho vyjádření (31) a to, že dává jednoduchý a přitom prakticky zcela vyhovující výraz (33) pro makroskopickou hustotu síly. Tento vzorec je totiž v dobrém souladu s experimentálními daty o ponderomotorických silách. Také čtvrtá složka čtyřvektoru ϕ_α^* má prostý a přirozený fyzikální význam, jak je patrné ze vztahů (34a), (34b). Rovněž vztahy (36) a (38a) pro hustotu energie a hustotu proudu energie „prakticky vyhovují“ jak v případě klidného, tak v případě pohybujícího se prostředí. Definujeme-li např. paprskovou rychlost světla V vztahem $V = \mathcal{S}/h^*$, je možno ukázat, že se transformuje z jednoho systému do druhého tak jako rychlost hmotného bodu. Z toho pak plyne (viz Ú 1) správný vzorec pro strhování světla pohybem prostředí. Přibližný výpočet veličin $\mathcal{S}$ a h^* pro rovinnou vlnu v systému, vůči němuž se prostředí pohybuje, byl podán již v Ú II 12. K stejnému výsledku se dojde použitím infinitesimální Lorentzovy transformace tenzoru $T_{\alpha\beta}^*$ (viz např. [55]).

Hlavní závadou Minkowského tenzoru je jeho nesymetričnost. V systému S' , v němž je prostředí v klidu a platí jednoduché vztahy $\mathcal{D}' = \varepsilon\mathcal{E}'$, $\mathcal{B}' = \mu\mathcal{H}'$, je sice $T_{jk}^{*'} = T_{kj}^{*'}$, ale

$$T_{j4}^{*'} = \varepsilon\mu T_{4j}^{*' } \neq T_{4j}^{*' },$$

neboť

$$w' = \varepsilon\mu c^{-2}\mathcal{S}' \neq c^{-2}\mathcal{S}'.$$

V systému S , vůči němuž se látkové prostředí pohybuje rychlostí v a v němž tedy vektory $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ souvisí s vektory $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ složitějším vztahem (21b) a (22b), není již ani prostorový tenzor (35) symetrický a vektory $\mathcal{S}$ a w mají dokonce i různý směr. V žádném případě (není-li $\varepsilon = \mu = 1$) tedy vztah mezi Minkowského hustotou proudu energie $\mathcal{S}$ a hustotou hybnosti w neodpovídá Einsteinovu zákonu o ekvivalenci hmoty a energie, podle něhož by mělo platit

$$w = (h^*/c^2) V = c^{-2}h^*V = c^{-2}\mathcal{S},$$

a tedy $T_{j4}^* = T_{4j}^*$. Mělo by to být splněno zvláště pro pole elektromagnetických vln v nenabitěm dielektriku, kdy je čtyřvektor $\phi_\alpha^* = 0$, takže pole vlastně tvoří izolovanou, uzavřenou soustavu. (Neprobíhá žádná výměna energie a hybnosti mezi vlnou a dielektrikem.) Nesplnění vztahu $\mathcal{S} = c^2w$ pak vede k různým interpretačním potížím, zvláště v relativistické fenomenologické teorii elektromagnetického záření v dielektriku. Např. čtyřhybnost rovinné elektromagnetické vlny (nebo „fenomenologického fotonu“) je při použití Minkowského tenzoru čtyřvektorem prostorové povahy a energie není ve všech systémech kladná.

Z těchto důvodů byly hledány a zkoušeny také jiné použitelné výrazy pro tenzor energie a hybnosti makroskopického elektromagnetického pole, zvláště takové, které by jej definovaly jako tenzor *symetrický*. První tenzor tohoto typu sestrojil Abraham. Jeho tenzor $T_{\alpha\beta}^{(A)}$ má v klidovém systému prostředí složky

$$\begin{aligned} T_{jk}^{(A)'} &= T_{jk}^{*'}, & T_{44}^{(A)'} &= T_{44}^{*'}, \\ T_{j4}^{(A)'} &= T_{4j}^{(A)'} = T_{4j}^{*'} . \end{aligned} \quad (39)$$

Liší se tedy od Minkowského tenzoru $T_{\alpha\beta}^*$ pouze definicí hustoty hybnosti, neboť, $T_{j4}^{(A)'} \neq T_{j4}^{*'}$.

Vypočteme-li nyní složky hustoty síly $\phi^{(A)'}$ podle vztahu

$$\phi_j^{(A)'} = -\partial_\alpha T_{ja}^{(A)'},$$

snadno zjistíme, že platí vyjádření

$$\phi^{(A)'} = \phi^{*'} + c^{-2}(\varepsilon\mu - 1) \partial\mathcal{S}'/\partial t', \quad (40)$$

v němž $\phi^{*'}$ a $\mathcal{S}' = \mathcal{S}^{(A)'}$ jsou dány vztahy (33) a (38a) zapsanými v čárkovaných veličinách. V klidovém systému prostředí se tedy Abrahamova silová hustota liší od Minkowského silové hustoty, pouze když je pole nestacionární, a to jen o přídavný člen, který je ve všech prakticky realizovatelných případech makroskopických polí nepozorovatelně malý. Z praktického hlediska tedy Abrahamův vzorec (40) pro hustotu ponderomotorické síly vyhovuje stejně dobře jako vzorec (33).

Zbývá vyjádřit tenzor $T_{\nu\alpha}^{(A)}$ v libovolném inerciálním systému a tím zároveň ukázat, že veličiny (39) opravdu tvoří symetrický prostoročasový tenzor. Je snadné se přesvědčit, že hledané vyjádření lze zapsat ve tvaru

$$T_{\nu\alpha}^{(A)} = T_{\nu\alpha}^* + (4\pi c^2 \mu)^{-1} (\epsilon \mu - 1) (B_{\nu\lambda} B_{\alpha\lambda} + c^{-2} U_\nu^* U_\lambda^* B_{\lambda\epsilon} B_{\alpha\epsilon}) U_\alpha^* U_\nu^*. \quad (41)$$

V klidovém systému, v němž je $U_\alpha^* = ic\delta_{\alpha 4}$, vskutku dostáváme z výrazu (41) $T_{\nu j}^{(A)'} = T_{\nu j}^*$ a rovněž $T_{44}^{(A)'} = T_{44}^*$. Naproti tomu pro $T_{j4}^{(A)'}$ plyne

$$T_{j4}^{(A)'} = T_{j4}^* - (4\pi)^{-1} (\epsilon - \mu^{-1}) B'_{jk} B'_{4k} = (4\pi)^{-1} D'_{jk} B'_{4k} = T_{4j}^* = T_{4j}^{(A)'}$$

v souladu s výrazy (39). Poněvadž v klidovém systému je tenzor $T_{\nu\alpha}^{(A)'}$ symetrický, je symetrický v každém systému. Symetrii výrazu (41) lze ovšem prokázat též přímo, dosazením za $D_{\alpha\lambda}$ ze vztahu (23) do $T_{\nu\alpha}^*$.

Při Abrahamově tenzoru je sice odstraněna vada Minkowského tenzoru daná jeho nesymetrií, ale zato má tenzor $T_{\nu\alpha}^{(A)}$ zase jiné nevhodné vlastnosti (nehledě k jeho složitosti), které neměl tenzor $T_{\nu\alpha}^*$. Tak např. v nenabitěm dielektriku *obecně neplatí* vztahy $\partial_\alpha T_{\nu\alpha}^{(A)} = 0$. Ze vzorce (40) je také zřejmé, že hustota síly $\phi^{(A)'}$ není rovná nule, šíří-li se nenabitým klidným dielektrikem rovinná lineárně polarizovaná vlna. V Abrahamově pojetí tedy elektromagnetická vlna v nenabitěm dielektriku netvoří izolovanou soustavu, neboť probíhá neustálá lokální výměna hybnosti a energie mezi vlnou a dielektrikem. Takové pojetí není úplně nemožné, poněvadž *úhrnná* energie a hybnost vlny *může přitom být konstantní*. Horší je, že „paprsková rychlost“ světla definovaná vztahem $V^{(A)} = \mathfrak{E}^{(A)}/h^{(A)}$ se nyní netransformuje jako rychlost hmotného bodu. Z těchto důvodů se ve fenomenologické teorii elektromagnetického záření užívá místo $T_{\nu\alpha}^{(A)}$ ještě složitějšího výrazu $T_{\nu\alpha}^{(Z)}$, tzv. tenzoru záření, který je definován takto:

$$T_{\nu\alpha}^{(Z)} = T_{\nu\alpha}^{(Z)} = T_{\nu\alpha}^{(A)} - (1 - (\epsilon\mu)^{-1}) (\delta_{\nu\lambda} + c^{-2} U_\nu^* U_\lambda^*) (\delta_{\alpha\kappa} + c^{-2} U_\alpha^* U_\kappa^*) T_{\lambda\kappa}^{(A)}. \quad (42)$$

V klidovém systému S' se tenzor záření liší od tenzoru Abrahamova pouze v čistě prostorových složkách $T_{jk}^{(Z)'} = (\epsilon\mu)^{-1} T_{jk}^{(A)'}$. V nenabitěm dielektriku tenzor záření splňuje rovnice $\partial_\alpha T_{\nu\alpha}^{(Z)} = 0$, stejně jako tenzor Minkowského. Rovněž paprsková rychlost světla $\mathfrak{E}^{(Z)}/h^{(Z)}$ se transformuje „správně“, podobně jako při tenzoru Minkowského. Ale pro hustotu ponderomotorické síly v klidovém systému a ve stacionárním poli dává tenzor záření nevhodný výraz $\phi^{(Z)'} = (\epsilon\mu)^{-1} \phi^*$, který se obecně značně liší od prakticky vyhovující veličiny ϕ^* . A tak problém obecně použitelné definice tenzoru energie a hybnosti makroskopického elektromagnetického pole zůstává zatím nedořešen.

Podrobnější poučení o vlastnostech různých tenzorů energie a hybnosti užívajících ve fenomenologické teorii elektromagnetického pole je možno nalézt např. v pojednáních [56].

Poznámka

Nakonec bude ještě užitečné upozornit na to, v čem se teorie makroskopického elektromagnetického pole v látkovém prostředí liší od idealizované mikroskopické teorie elektromagnetického pole buzeného nekonečně jemně rozptýleným nabitým hmotným prachem (z odst. VII 4). Podstatný rozdíl je v tom, že hmotné částice, z nichž je složeno látkové prostředí makroskopické teorie (tj. ionty, atomy, nebo prostě z makroskopického hlediska „nekonečně malé“ objemové elementy látkového prostředí) jsou obecně elektricky i magneticky polarizovatelné. Proto je polarizační tenzor $M_{\alpha\beta} \neq 0$ a $D_{\alpha\nu} \neq B_{\alpha\nu}$. Naproti tomu „infinitesimální částice“ hmotného prachu z odst. VII 4 jsou nepolarizovatelné a proto při popisu pole v prostředí nabitěho hmotného prachu vystačíme s tenzorem $F_{\alpha\beta}$. V teorii z odst. VII 4 také neexistuje obdoba vodivého proudu. Elektrický proud je tam zásadně jen konvekční povahy ($J^{(e)} = qu$). Komplikace, s nimiž se setkáváme v teorii makroskopického elektromagnetického pole (ve srovnání s teorií pole v idealizovaném prostředí nabitěho hmotného prachu z odst. VII 4) tedy souvisí s existencí nenulového polarizačního tenzoru $M_{\alpha\beta}$ a vodivého čtyřproudu $j_\nu^{(vod)}$ ve skutečném látkovém prostředí makroskopické teorie.

4. TENZOR ELASTICKÝCH NAPĚTÍ V POHYBUJÍCÍM SE HMOTNÉM TĚLESE

Mějme makroskopické hmotné těleso, které je ve *stavu elastické napjatosti*. Z hlediska inerciálního systému S je tento stav popsán prostorovým *tenzorem elastických napětí* $\tau_{jk}(\mathbf{x}, t)$, který podle své definice má tuto vlastnost: Vymezíme-li si z tělesa jistou část, zaujímající v okamžiku t objem $V(t)$ ohraničený uzavřenou plochou $\sigma(t)$, pak složky výsledné elastické síly $\mathbf{f}(t)$ působící na uvažovanou část tělesa jsou dány vzorci

$$f_j = - \int_{\sigma} \tau_{jk} N_k d\sigma = \int_V (-\partial_k \tau_{jk}) dV. \quad (43)$$

V nich N_k udává složku jednotkového vektoru $\mathbf{N}$ ve směru vnější normály k plošnému elementu $d\sigma$ a také ∂_k má *obvyklý* význam $\partial/\partial x_k$. Veličiny

$$\psi_j \equiv -\tau_{jk} N_k \quad (44)$$

udávají zřejmě složky elastické síly, již na jednotkový *plošný* element myšlený uvnitř tělesa působí látka k němu přilehlá na té straně, na niž je naměřen vektor $\mathbf{N}$. Stručně řečeno ψ_j jsou složky *plošné hustoty* elastické síly. Podobně veličiny

$$\phi_j \equiv -\partial_k \tau_{jk} \quad (45)$$

udávají složky elastické síly, již na vybraný jednotkový *objemový* element elasticky napjatého tělesa působí vřkolní látka. Tedy ϕ_j jsou složky *prostorové hustoty* elastické síly.

Mějme nyní *elasticky napjaté těleso* (např. luk s tětivou). Toto těleso nechť je jinak *úplně volné* a přitom *v klidu* nebo *rovnoměrném translačním* pohybu vůči inerciálnímu systému S (volné těleso v rovnováze). Pak ovšem máme $\Delta f_j \equiv \phi_j \Delta V = 0$ pro každý objemový element tělesa. Není-li volné napjaté těleso v rovnováze (jako např. náš luk po přetržení tětiny), platí pro jeho elementy „pohybové rovnice“

$$d(w_j \Delta V)/dt = \Delta f_j = \phi_j \Delta V, \quad (46)$$

v nichž w_j jsou složky hustoty hybnosti a tedy $w_j \Delta V$ složky hybnosti uvažovaného elementu tělesa.

Levou stranu rovnic (46) lze upravit, použijeme-li vztahů (VII 86, 78), takto:

$$\begin{aligned} d(w_j \Delta V)/dt &= (dw_j/dt) \Delta V + w_j d\Delta V/dt = \\ &= (\partial w_j/\partial t + u_k \partial w_j/\partial x_k) \Delta V + w_j \Delta V \partial u_k/\partial x_k = [\partial w_j/\partial t + \partial_k(w_j u_k)] \Delta V. \end{aligned}$$

Veličiny $u_k(x, t)$ ovšem udávají složky pozorovatelné, makroskopické rychlosti, již se vůči systému S pohybuje látka tvořící uvažovaný element tělesa (rychlost pohybu materiálu tělesa v místě x v čase t). Dosazením do rovnic (46) a použitím definice (45) dostáváme tedy vztahy

$$\partial w_j/\partial t + \partial_k(w_j u_k + \tau_{jk}) = 0. \quad (47)$$

Podle předpokladu tvoří uvažované hmotné těleso uzavřenou materiální soustavu (nepůsobí na ně vnější vlivy – síly, silová pole). Jak již víme, podle teorie relativity přísluší takové soustavě *úplný*, symetrický *prostorčasový tenzor energie a hybnosti* $T_{\alpha\beta}$, který splňuje rovnice

$$\partial_\alpha T_{\alpha\beta} = 0, \quad (48)$$

a jehož složky souvisí s (úplnou) hustotou energie h , hustotou proudu energie S a hustotou hybnosti w vztahy

$$T_{44} = -h, \quad T_{j4} = icw_j = ic^{-1}S_j = T_{4j}.$$

Rovnice (48) pro $\nu = j$ tedy dávají

$$\partial w_j/\partial t + \partial_k T_{jk} = 0. \quad (48a)$$

Porovnáme-li vztahy (47) a (48a) vidíme, že můžeme psát

$$T_{jk} = \tau_{jk} + w_j u_k. \quad (49)$$

Složky prostorového tenzoru elastických napětí τ_{jk} je tedy možno určit ze složek *úplného prostorčasového tenzoru energie a hybnosti* T_{jk} a ze složek rychlosti pohybu napjaté látky (v daném místě a čase) podle vzorců

$$\tau_{jk} = T_{jk} - w_j u_k = T_{jk} + ic^{-1}T_{j4}u_k. \quad (50)$$

Než přistoupíme k praktickému použití vztahů (50), odvodíme si ještě explicitní vyjádření hustoty proudu energie S (popř. hustoty hybnosti $w = c^{-2}S$) pomocí hustoty energie h , rychlosti pohybu u a tenzoru napětí τ_{jk} . K tomu si nejprve vypočteme práci vykonanou za dobu dt elastickými silami na vybrané části tělesa, omezené opět uzavřenou plochou $\sigma(t)$. Na tuto část tělesa působí látka přiléhající z vnějška k ploše σ . Na plošný element $d\sigma$ působí podle (44) silou $\psi d\sigma$. Poněvadž element $d\sigma$ se pohybuje s látkou tělesa, posune se za dobu dt o $u dt$. Práce vykonaná vnějšími silami na vybrané části tělesa je tedy dána výrazem

$$\begin{aligned} dW &= \int_{\sigma(t)} \psi_j d\sigma \cdot u_j dt = -dt \int_{\sigma(t)} \tau_{jk} u_j N_k d\sigma = \\ &= -dt \int_{V(t)} \partial_k(\tau_{jk} u_j) dV. \end{aligned}$$

Je-li objem V sám velmi malý (ΔV), můžeme psát

$$d\Delta W/dt = -\partial_k(\tau_{jk} u_j) \Delta V. \quad (51)$$

Vidíme, že objemová hustota výkonu elastických sil je dána výrazem $-\partial_k(\tau_{jk} u_j)$, nikoliv výrazem $\phi_j u_j = -u_j \partial_k \tau_{jk}$. Elastické síly totiž mohou na vybraném elementu tělesa konat práci (deformační), i když je výsledná síla na něj působící nulová ($\Delta f_j = \phi_j \Delta V = 0$, $\phi_j = 0$).

Veličina (51) musí být rovná časové změně celkové energie vybraného elementu tělesa, tj. veličině

$$\begin{aligned} d(h \Delta V) dt &= (\partial h/\partial t + u_k \partial h/\partial x_k) \Delta V + \\ &+ h \Delta V \partial u_k/\partial x_k = [\partial h/\partial t + \partial_k(hu_k)] \Delta V. \end{aligned} \quad (52)$$

Srovnáním výrazů (51) a (52) tedy dostáváme rovnici

$$\partial h/\partial t + \partial_k(hu_k + u_j \tau_{jk}) = 0, \quad (53)$$

která ovšem musí být identická se čtvrtou z rovnic (48), tj. s rovnicí

$$\partial h/\partial t + \partial_k S_k = 0. \quad (48b)$$

Můžeme tedy psát

$$S_k = c^2 w_k = hu_k + u_j \tau_{jk}; \quad (54)$$

odtud vidíme, že hustota proudu energie $\mathbf{S}$ a hustota hybnosti $\mathbf{w} = c^{-2}\mathbf{S}$ nemá v elasticky napjatém tělese obecně směr rychlosti $\mathbf{u}$ makroskopického pohybu látky tělesa.

Poněvadž tedy $w_j u_k \neq w_k u_j$, plyne ze vzorců (50) a ze symetrie tenzoru T_{jk} , že prostorový tenzor τ_{jk} není obecně symetrický. Je však symetrický v okamžitém klidovém systému S' , v němž je látka uvažovaného elementu tělesa právě v klidu, tj. platí $\mathbf{u}'(\mathbf{x}', t') = 0$. Podle vzorců (54) a (50) pak v tom místě a čase máme

$$\tau'_{jk} = T'_{jk} = T'_{kj} = \tau'_{kj}, \quad (55)$$

$$S'_j = -icT'_{4j} = -icT'_{j4} = c^2 w'_j = 0,$$

$$h' = -T'_{44}.$$

Veličina h' (popř. h'/c^2) udává klidovou hustotu klidové energie (popř. hmoty).

Přejdeme nyní od systému S' k systému S speciální Lorentzovou transformací (12). Zapišeme-li si tuto transformaci nejprve ve tvaru $x_\mu = b_{\nu\mu}x'_\nu$ a použijeme-li příslušných transformačních vzorců $T_{\mu\nu} = b_{\mu\lambda}b_{\nu\lambda}T'_{\lambda\lambda}$, nalezneme s použitím hodnot (55) tyto vztahy:

$$h = \gamma^2(h' + \beta^2\tau'_{11}), \quad (56a)$$

$$w_1 = c^{-1}\beta\gamma^2(h' + \tau'_{11}),$$

$$w_2 = c^{-1}\beta\gamma\tau'_{21},$$

$$w_3 = c^{-1}\beta\gamma\tau'_{31}, \quad (56b)$$

$$T_{jk} = \begin{pmatrix} \gamma^2(\tau'_{11} + \beta^2 h') & \gamma\tau'_{12} & \gamma\tau'_{13} \\ \gamma\tau'_{21} & \tau'_{22} & \tau'_{23} \\ \gamma\tau'_{31} & \tau'_{32} & \tau'_{33} \end{pmatrix}. \quad (56c)$$

Dosadíme-li nakonec z (56c) a (56b) do vzorců (50) a uvážíme-li, že rychlost $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$ má nyní složky $(\beta c, 0, 0)$, dostaneme složky tenzoru elastických napětí τ_{jk} vyjádřeny takto:

$$\tau_{jk} = \begin{pmatrix} \tau'_{11} & \gamma\tau'_{12} & \gamma\tau'_{13} \\ \gamma^{-1}\tau'_{21} & \tau'_{22} & \tau'_{23} \\ \gamma^{-1}\tau'_{31} & \tau'_{32} & \tau'_{33} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Snadno se ověří, že transformační vzorce (56a,b) a (57) jsou v souladu i se vztahy (54).

Má-li rychlost $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ klidového systému S' vůči systému S obecný směr (složky u_j), nabývají transformační vzorce (56a,b) a (57) tohoto tvaru

$$h = \gamma^2(h' + c^{-2}u_j\tau'_{jk}u_k), \quad (58a)$$

$$w_j = \gamma^2 c^{-2} u_j [h' + (1 - \gamma^{-1}) u^{-2} u_k \tau'_{ki} u_i] + \gamma c^{-2} \tau'_{jk} u_k, \quad (58b)$$

$$\tau_{jk} = \tau'_{jk} + (\gamma - 1) u^{-2} [u_j u_i \tau'_{ik} - \gamma^{-1} \tau'_{ji} u_i u_k - (1 - \gamma^{-1}) u^{-2} u_j u_k u_i \tau'_{im} u_m]. \quad (57')$$

Uvedme nakonec ještě několik důsledků těchto vzorců ve speciálních případech. Budiž nejprve $\tau'_{jk} = 0$. Podle (57) pak máme také $\tau_{jk} = 0$. Je-li tedy těleso nenapjaté z hlediska klidového systému S' , je bez napětí i z hlediska systému S (vůči němuž koná rovnoměrný translační pohyb) přesto, že z hlediska tohoto systému je „deformováno Lorentzovou kontrakcí“. Vzorce (58a,b) přejdou při $\tau'_{jk} = 0$ na jednodušší tvar

$$h = \gamma^2 h', \quad (58a)$$

$$w_j = \gamma^2 c^{-2} h' u_j = (h/c^2) u_j. \quad (58b)$$

Velmi prostým teoretickým modelem látky, pro niž je tenzor elastických napětí τ_{jk} identicky nulový, je nenabitý hmotný prach. Podle teorie z odst. VII 4,3 je pro takovou látku úplný tenzor energie a hybnosti dán prostě kinetickým tenzorem $T_{\nu\alpha}^{(H)}$ určeným vzorcí (VII 67) popř. (VII 67a). Vypočteme-li z tenzoru (VII 67a) prostorový tenzor elastických napětí podle vzorců (50), dostaneme $\tau_{jk}^{(H)} \equiv 0$. V okamžitém, lokálním klidovém systému S' má (v daném místě a čase) tenzor $T_{\nu\alpha}^{(H)'} = 0$ různou pouze složku $T_{44}^{(H)'} = -h^{(H)'} = -\mu_{00}c^2$. Je tedy $w_j^{(H)'} = c^{-2}S_j^{(H)'} = 0$ a $T_{jk}^{(H)'} = \tau_{jk}^{(H)'} = 0$. Z rovnic (57) pak plyne opět $\tau_{jk}^{(H)} = 0$ a vzorce (58a) a (58b) se zjednoduší na tvar

$$h^{(H)} = \mu c^2 = \gamma^2 h^{(H)'} = \gamma^2 \mu_{00} c^2,$$

$$w_j^{(H)} = \mu u_j,$$

s nímž jsme se již setkali v odst. VII 4,3 (viz tamní vzorec $\mu = \gamma^2 \mu_{00}$ a vzorec (VII 74) pro $w_j^{(H)}$). Obecné transformační vzorce (58a,b) představují zobecnění starých, nám již dobře známých vzorců (58a,b) pro případ elasticky napjaté látky.

Jiným důležitým (idealizovaným, teoretickým) modelem látky je dokonalá tekutina. V takové látce působí pouze izotropní tlak p , tj. síla na libovolný v látce „zakotvený“ plošný element má vždy směr jeho normály $\mathbf{N}$ a její velikost je (v daném místě a čase) nezávislá na směru $\mathbf{N}$. Plošná hustota síly bude nyní vyjádřena vztahem

$$\psi_j \equiv -\tau_{jk} N_k = -p N_j, \quad (59)$$

takže

$$\tau_{jk} = p \delta_{jk}. \quad (60)$$

Píšeme-li v (okamžitém, lokálním) klidovém systému S'

$$\tau'_{jk} = p' \delta_{jk}, \quad (60')$$

z transformačních formulí (57) dostáváme vztahy $\tau_{jk} = \tau'_{jk}$, a tedy $p = p'$. Izotropní tlak se při Lorentzově transformaci nemění (je to prostoročasový skalár). Tuto důležitou poučku teorie relativity odvodil první Planck.

Dosadíme-li z (60') do transformačních vzorců (56a,b), budou hustota energie a hybnosti proudící dokonalé tekutiny vyjádřeny takto:

$$h = \gamma^2(h' + \beta^2 p'), \quad (61)$$

$$w_j = c^{-2} S_j = \gamma^2 c^{-2} (h' + p') u_j. \quad (62)$$

Užijeme-li vztahu $p = p'$, můžeme transformační vzorec (61) zapsat též v symetričtější tvaru $h + p = \gamma^2(h' + p')$. Dosadíme-li nakonec z (60) a (62) do formulí (49), dostaneme

$$T_{jk} = \gamma^2 c^{-2} (h' + p') u_j u_k + p' \delta_{jk}. \quad (63)$$

Vzorce (61) až (63) lze shrnout v prostoročasový tenzorový vzorec

$$T_{\alpha\alpha} = (h' + p') c^{-2} U_\alpha U_\alpha + p' \delta_{\alpha\alpha}, \quad (64)$$

v němž $U_\alpha = (\gamma u, i\gamma c)$.

Z uvedených vztahů vidíme, že v dokonalé tekutině má hustota hybnosti a proud energie směr rychlosti pohybu tekutiny a že tenzor elastických napětí τ_{jk} zůstává ve všech inerciálních systémech symetrický. V pevné látce, v níž jsou možná nenulová tečná (smyková) napětí, to už neplatí, jak je patrné ze vzorců (56b) a (57), popř. (56b) a (57). Tato vlastnost tenzoru τ_{jk} je velmi důležitá; umožňuje např. výklad „záporného“ výsledku pokusu Troutonova-Nobleova. Podrobně je propočten tento příklad i jiné podobné např. v [57, 58].

5. INVARIANTNÍ TVAR ZÁKONŮ TERMODYNAMIKY

Již v odstavci VI 7,1 a také později při různých příležitostech (odst. VII 4,4 a VIII 3) jsme viděli, že teplo dodané hmotnému tělesu během nějakého děje se přepočítává (transformuje) z klidového systému tělesa S_0 do systému S , vůči němuž se těleso pohybuje konstantní rychlostí u , podle vzorce

$$dQ = \gamma^{-1} dQ_0 \quad (\gamma = \gamma(u)) \quad (65)$$

a tedy jinak než energie tělesa. Transformační formule (65) plyne z požadavku invariance první hlavní věty termodynamické, která je v klidovém systému S_0 vyjádřena rovnicí

$$d\mathcal{E}_0 = dQ_0 + dW_0 \quad (66)$$

a v systému S tedy rovnicí stejného tvaru

$$d\mathcal{E} = dQ + dW. \quad (67)$$

Přitom $\mathcal{E}$ je úhrnná energie tělesa a $d\mathcal{E}$ její přírůstek při uvažovaném ději, dále dQ je tělesu dodané teplo a dW na tělese vykonaná práce (vše z hlediska systému S).

V odstavci VI 7,1 jsme uvažovali pouze o tom zvláštním případě, kdy těleso bylo před dějem i po něm izolované a kdy v klidovém systému $S' \equiv S_0$ byla vykonaná práce nulová ($dW' = dW_0 = 0$). Odvodme si proto transformační formuli (65) ještě jednou pro poněkud obecnější případ a použijme přitom výsledků předchozího odstavce. Mějme homogenní tekutinu (např. plyn) uzavřenou v nádobě pod počátečním izotropním invariantním tlakem $p = p' = p_0$. Počáteční klidový objem tekutiny budiž $V' = V_0$. Místně konstantní, počáteční klidová hustota klidové energie tekutiny budiž $h' = h_{00}$ (a hustota hybnosti $w' = w_0 = 0$). Z hlediska systému S je objem tekutiny $V = \gamma^{-1} V_0$, hustota její energie h a hustota hybnosti w . Veličiny h a w jsou určeny vztahy (61) a (62), z nichž pro úhrnnou energii $\mathcal{E} = hV$ a hybnost $P = wV$ plynou výrazy

$$\mathcal{E} = \gamma(\mathcal{E}_0 + \beta^2 p_0 V_0), \quad (68)$$

$$P = c^{-2}(\mathcal{E}_0 + p_0 V_0) \gamma u. \quad (69)$$

Platí také vztah $\mathcal{E} + pV = \gamma(\mathcal{E}_0 + p_0 V_0)$. (Viz též Ů 6.)

Nechť je nyní v klidovém systému S_0 za dobu dt_0 tekutině dodáno teplo dQ_0 a její objem nechť se zvětší o dV_0 , čímž se na tekutině vykoná práce

$$dW_0 = -p_0 dV_0.$$

Tekutina zůstane vůči systému S_0 v klidu, ale její energie $\mathcal{E}_0$ (klidová) se zvětší o $d\mathcal{E}_0$. Podle (66) platí vztah

$$dQ_0 = d\mathcal{E}_0 + p_0 dV_0. \quad (66a)$$

Z hlediska systému S trval uvažovaný děj dobu $dt = \gamma^{-1} dt_0$. Po jeho skončení se objem tekutiny zvětšil o $dV = \gamma dV_0$, ale rychlost pohybu nádoby i tekutiny zůstala stejná, tj. u . Energie $\mathcal{E}$ se tedy podle (68) změnila o

$$d\mathcal{E} = \gamma[d\mathcal{E}_0 + \beta^2 d(p_0 V_0)], \quad (68a)$$

neboť také veličiny γ a $\beta = u/c$ zůstaly stejné. Teplo dQ dodané tekutině z hlediska systému S je určeno rovnicí (67), tj.

$$dQ = d\mathcal{E} - dW. \quad (67a)$$

Abychom mohli dQ porovnat s dQ_0 , musíme ještě vypočítat dW . Objem V se zvětšil o dV . Poněvadž $p = p_0$, vykonala se při zvětšení objemu na tekutině práce $-p dV$. Ale to ještě není veškerá vykonaná práce z hlediska systému S . Vzhledem k tomu, že se zvětšila klidová energie tekutiny o $d\mathcal{E}_0$ a její klidový objem o dV_0 , kdežto rychlost u vůči S zůstala stejná, zvětšila se podle vzorce (69) celková hybnost P o

$$dP = c^{-2}[d\mathcal{E}_0 + d(p_0 V_0)] \gamma u. \quad (69a)$$

To se stalo za dobu dt . Musela tedy na tekutinu v nádobě působit z hlediska systému S ještě také síla $f = dP/dt$ (srovnej s (VI 113)). Poněvadž její působíště se v systému S

pohybovalo rychlostí $\mathbf{u}$, vykonala síla $\mathbf{f}$ za dobu dt *dodatečnou práci* $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dt = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$, takže celkem má vykonaná práce hodnotu

$$dW = -p dV + \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P} = -p_0 \gamma^{-1} dV_0 + \gamma \beta^2 [d\mathcal{E}_0 + d(p_0 V_0)] . \quad (70)$$

Dosazením z (68a) a (70) do (67a) dostáváme s přihlédnutím k (66a)

$$\begin{aligned} dQ &= \gamma^{-1} p_0 dV_0 + \gamma(1 - \beta^2) d\mathcal{E}_0 = \\ &= \gamma^{-1}(d\mathcal{E}_0 + p_0 dV_0) = \gamma^{-1} dQ_0 , \end{aligned}$$

což je právě vztah (65).

Dalšími důležitými termodynamickými veličinami jsou *entropie* S a *teplota* T . Úhrnná entropie tělesa S , podobně jako jeho úhrnný elektrický náboj e , je *veličina invariantní*, nezávislá na volbě systému souřadnic, nebo (při aktivní interpretaci transformace) nezávislá na rychlosti $\mathbf{u}$ rovnoměrného translačního pohybu tělesa vůči danému systému. Tuto základní vlastnost entropie lze odvodit popř. zdůvodnit dvěma poučnými způsoby.

Ve statistické fyzice (kinetické teorii je plynů) entropie, jak známo, definována jako veličina univerzálně úměrná logaritmu tzv. termodynamické pravděpodobnosti daného makroskopického stavu tělesa (plynu). Tato pravděpodobnost se však definuje jako *počet způsobů*, jimiž lze realizovat příslušné statistické rozdělení molekul do jejich přípustných (možných) stavů. Je to tedy vždy (velké) *celé číslo* a proto musí být při Lorentzových transformacích invariantní. (Kdyby nebylo invariantní, muselo by se při infinitezimální Lorentzově transformaci změnit o nekonečně malou hodnotu – a to nemůže.)

Ve fenomenologické termodynamice se entropie definuje tak, že její přírůstek dS při přechodu od jednoho termodynamického stavu tělesa ke druhému je dán známým vzorcem

$$dS = dQ/T , \quad (71)$$

v němž dQ značí teplo dodané tělesu při *vratném* procesu vedoucím od počátečního ke koncovému stavu. Entropii S lze vyjádřit jako *funkci* nezávislých *stavových proměnných* (veličin určujících stav tělesa). Výraz dS daný vzorcem (71) je pak úplným diferenciálem funkce S , kdežto dQ není úplným diferenciálem žádné takové funkce. To je obsah *druhé hlavní věty* termodynamické. Poněvadž chceme, aby i druhá věta byla invariantní, definujeme v klidovém systému S_0 entropii S_0 vztahem

$$dS_0 = dQ_0/T_0 , \quad (72)$$

kteří má *stejný tvar* jako (71). Veličiny dS a dQ i dS_0 a dQ_0 se vztahují k témuž vratnému procesu, jenomže jednou je popisován z hlediska systému S , podruhé z hlediska klidového systému S_0 . Při *aktivní interpretaci Lorentzovy transformace fyzikálních veličin* se přechod od systému S_0 k systému S nahrazuje uvedením hmotného tělesa do rovnoměrného translačního pohybu vůči pevně zvolenému systému. Tuto

operaci můžeme uskutečnit jako *vratný adiabatický* proces, při němž se entropie nemění. Proto musí být entropie při Lorentzových transformacích invariantní a platí tedy

$$dS = dS_0 , \quad S = S_0 . \quad (73)$$

Z rovnice

$$dQ_0/T = dQ/T$$

a ze vztahu (65) pak plyne pro teplotu transformační vzorec

$$T = \gamma^{-1} T_0 . \quad (74)$$

Z hlediska systému, vůči němuž se dané hmotné těleso pohybuje, je tedy jeho teplota menší než z hlediska jeho klidového systému.

Podrobnější informace o relativistické termodynamice a jejích aplikacích jsou např. v Tolmanově knize [59] a v Laueho učebnici [57]. O problémech diskutovaných v poslední době je možno se poučit v obou uvedených nových pracích, Kuchařově a Bičákové [59].

ÚLOHY

1. Mějme homogenní, izotropní, průhledné prostředí s indexem lomu n (jeho závislost na frekvenci světla zanedbáme). Prostředí nechť je v klidu v inerciálním systému S' . Vyšleme světelný signál (vlnové klubko) ve směru $\mathbf{e}' \equiv (\cos \vartheta' > 0, \sin \vartheta' > 0, 0)$. Poněvadž index lomu n nezávisí na frekvenci světla, bude se velikost skupinové rychlosti klubka rovnat fázové rychlosti světelných vln: $V' = W' = W_0 = c/n$, $\mathbf{V}' = W_0 \mathbf{e}'$. Vlnové klubko se pohybuje jako volná hmotná částice. Vypočítejte jeho rychlost $\mathbf{V}$ vůči systému S určenému Lorentzovou transformací (12).

2. Mějme látkové prostředí a inerciální systémy S' a S jako v předchozí úloze. Prostředím nechť postupuje rovinná, harmonická světelná vlna. Z hlediska systému S' nechť má cyklickou frekvenci ω' . Směr normály k vlnoplochám $\mathbf{N}'$ (shodný se směrem paprsku $\mathbf{e}'$) nechť má opět složky $N'_1 = \cos \vartheta' \geq 0$, $N'_2 = \sin \vartheta' \geq 0$, $N'_3 = 0$. Fáze vlny je určena vzorcem

$$F'(\mathbf{x}', t') \equiv \omega'(t' - W_0^{-1} \mathbf{N}' \cdot \mathbf{x}') .$$

V systému S se naše vlna jeví opět jako rovinná harmonická vlna s fází

$$F(\mathbf{x}, t) \equiv \omega(t - W^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}) = F'(\mathbf{x}', t') .$$

Definujte vlnový čtyřvektor této vlny a z jeho transformace vypočítejte ω , $\mathbf{N}$ a *fázovou rychlost* W v systému S . Srovnajte rychlost W a směr $\mathbf{N}$ s rychlostí V a směrem $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$ z předchozí úlohy. Vyšetřete také speciální případ $\vartheta' = 0$ a $\mathbf{v} \equiv (-W_0, 0, 0)$.

3. Závísí-li index lomu n a tím i rychlost $W_0 = c/n$ na frekvenci světla (tj. vyvolává-li prostředí barevnou disperzi světla), je nutno dosadit do vzorce (1a) za W_0 rychlost $W_0(\omega')$ nikoliv $W_0(\omega)$. Udejte příslušný korekční člen ke vzorci (1a) (s přesností do veličin $\approx v$).

4. Zapište v invariantním tvaru materiálové vztahy

$$\mathfrak{P} = \kappa \mathfrak{E} = (4\pi)^{-1} (\varepsilon - 1) \mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{M} = \chi \mathfrak{H} = (4\pi)^{-1} (\mu - 1) \mu^{-1} \mathfrak{B}.$$

5. Ve fenomenologické teorii elektromagnetického pole v klidném prostředí se zavádějí elektromagnetické potenciály $\mathfrak{A}$ a φ^* vztahy

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi^* - c^{-1} \partial \mathfrak{A} / \partial t, \quad \mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}$$

a kalibrační podmínkou

$$\text{div } \mathfrak{A} + \varepsilon \mu c^{-1} \partial \varphi^* / \partial t = 0.$$

Potenciály pak splňují rovnice

$$\Delta \mathfrak{A} - \varepsilon \mu c^{-2} \partial^2 \mathfrak{A} / \partial t^2 = -4\pi \mu c^{-1} \mathfrak{j},$$

$$\Delta \varphi^* - \varepsilon \mu c^{-2} \partial^2 \varphi^* / \partial t^2 = -4\pi \varepsilon^{-1} \rho^*.$$

(Viz např. [6] kap. V.) Udejte relativisticky invariantní tvar těchto vztahů (platný ve všech inerciálních systémech).

6. Podejte prostoročasově geometrickou interpretaci rozkladu úplného makroskopického čtyřproudu j , na části $j_v^{(\text{konv})}$ a $j_v^{(\text{vod})}$.

7. V pevné nádobě je uzavřena homogenní tekutina (kapalina nebo plyn). Tekutina s nádobou je v klidu v inerciálním systému S' , v němž má konstantní (klidový) objem V' , místně i časově konstantní klidovou hustotu klidové energie h' (a tedy celkovou klidovou energii $\mathcal{E}' = h'V'$), a je pod místně i časově konstantním tlakem p' . Použijte transformačních vzorců (61) a (62) a vypočítejte celkovou energii tekutiny $\mathcal{E}$ i složky její celkové hybnosti $\mathbf{P}$ v inerciálním systému S , vůči němuž se systém S' pohybuje konstantní rychlostí $\mathbf{u} \equiv (u_j)$. Ukažte, že veličiny P_j a $P_4 \equiv \equiv ic^{-1}(\mathcal{E} + pV)$, ale nikoliv veličiny $(P_j, ic^{-1}\mathcal{E})$, tvoří čtyřvektor P_μ . Udejte důvod proč netvoří čtyřvektor veličiny $(P_j, ic^{-1}\mathcal{E})$.

8. Vzorec (64) pro úplný tenzor energie a hybnosti se dá použít i na černé (tepelné) záření v evakuované dutině. (Čtyřrychlost U_μ je ovšem určena rychlostí pohybu nádoby obsahující černé záření vůči zvolenému systému S .) Pro záření lze však použít i tenzor (VI 33), který splňuje invariantní rovnici $T_{\nu\nu}^{(E)} \equiv 0$. Vypočítejte z toho vztah mezi tlakem černého záření p a hustotou jeho energie h' v klidovém systému dutiny.

KAPITOLA IX

RELATIVITA

A

GRAVITACE

V přehledu nejdůležitějších zákonů relativistické fyziky v kapitolách VI–VIII jsme zcela pominuli zákony gravitace. Úkolem následujících závěrečných poznámek je spíše vysvětlit toto zanedbání, než uspokojivě zaplnit vzniklou mezeru. Pojednáme v nich jenom o základních rysech problému relativistické teorie gravitace. Podrobný výklad této značně složité a obsáhlé teorie podává Kuchařova učebnice Základy obecné teorie relativity.

1. EINSTEINŮV SPECIÁLNÍ PRINCIP RELATIVITY A TEORIE GRAVITACE

1.1. NEWTONOVA TEORIE GRAVITACE A PRVNÍ POKUSY O JEJÍ PŘÍZPUSOBENÍ POŽADAVKŮM SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

Gravitační interakce elementárních částic je ve srovnání s ostatními druhy jejich vzájemného působení *velmi slabá*. Např. poměr velikostí gravitační a elektrické síly mezi dvěma elektrony je $\approx 10^{-42}$. U dvou protonů je sice příznivější („jen“ $\approx 10^{-35}$), ale mezi nukleony působí i síly mezické (jaderné), které jsou ještě asi stokrát větší než elektrické. (Vzhledem k různé závislosti mezické a elektrické nebo gravitační síly na vzdálenosti musíme je při nukleonech srovnávat ve vzdálenosti $r \lesssim \kappa^{-1} \approx 10^{-13}$ cm, kde se ještě neprojevuje vliv exponenciálního součinitele $\exp(-\kappa r)$; viz (VI 122).) Při výkladu jevů, na nichž se podílí jen několik málo elementárních částic, můžeme tedy jejich gravitační interakci bezpečně zanedbat. Můžeme ji skutečně zanedbávat netoliko v teorii stavby atomových jader a atomů nebo molekul, ale i při teoretickém výkladu vlastností makroskopických vzorků látky, které mají obvyklé „laboratorní rozměry“. Proto jsme ani v kapitolách VI a VII ani v kapitole VIII teorii gravitace nepostrádali.

Na druhé straně však známe experimentální podmínky nebo situace, v nichž naopak gravitační působení je pro výklad pozorovaných jevů hlavní a rozhodující, nebo kdy se nedá zanedbat. To souvisí s dalšími *pozoruhodnými vlastnostmi gravitační interakce*: S tím, že je *všeobecná*, že gravitační síly jsou *vždy přitažlivé* a že