

3. Závísí-li index lomu n a tím i rychlost $W_0 = c/n$ na frekvenci světla (tj. vyvolává-li prostředí barevnou disperzi světla), je nutno dosadit do vzorce (1a) za W_0 rychlost $W_0(\omega')$ nikoliv $W_0(\omega)$. Udejte příslušný korekční člen ke vzorci (1a) (s přesností do veličin $\approx v$).

4. Zapište v invariantním tvaru materiálové vztahy

$$\mathfrak{P} = \kappa \mathfrak{E} = (4\pi)^{-1} (\epsilon - 1) \mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{M} = \chi \mathfrak{H} = (4\pi)^{-1} (\mu - 1) \mu^{-1} \mathfrak{B}.$$

5. Ve fenomenologické teorii elektromagnetického pole v klidném prostředí se zavádějí elektromagnetické potenciály $\mathfrak{A}$ a φ^* vztahy

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi^* - c^{-1} \partial \mathfrak{A} / \partial t, \quad \mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}$$

a kalibrační podmínkou

$$\text{div } \mathfrak{A} + \epsilon \mu c^{-1} \partial \varphi^* / \partial t = 0.$$

Potenciály pak splňují rovnice

$$\Delta \mathfrak{A} - \epsilon \mu c^{-2} \partial^2 \mathfrak{A} / \partial t^2 = -4\pi \mu c^{-1} \mathfrak{j},$$

$$\Delta \varphi^* - \epsilon \mu c^{-2} \partial^2 \varphi^* / \partial t^2 = -4\pi \epsilon^{-1} \rho^*.$$

(Viz např. [6] kap. V.) Udejte relativisticky invariantní tvar těchto vztahů (platný ve všech inerciálních systémech).

6. Podejte prostoročasově geometrickou interpretaci rozkladu úplného makroskopického čtyřproudu j , na části $j_v^{(\text{konv})}$ a $j_v^{(\text{vod})}$.

7. V pevné nádobě je uzavřena homogenní tekutina (kapalina nebo plyn). Tekutina s nádobou je v klidu v inerciálním systému S' , v němž má konstantní (klidový) objem V' , místně i časově konstantní klidovou hustotu klidové energie h' (a tedy celkovou klidovou energii $\mathcal{E}' = h'V'$), a je pod místně i časově konstantním tlakem p' . Použijte transformačních vzorců (61) a (62) a vypočítejte celkovou energii tekutiny $\mathcal{E}$ i složky její celkové hybnosti $\mathbf{P}$ v inerciálním systému S , vůči němuž se systém S' pohybuje konstantní rychlostí $\mathbf{u} \equiv (u_j)$. Ukažte, že veličiny P_j a $P_4 \equiv \equiv ic^{-1}(\mathcal{E} + pV)$, ale nikoliv veličiny $(P_j, ic^{-1}\mathcal{E})$, tvoří čtyřvektor P_v . Udejte důvod proč netvoří čtyřvektor veličiny $(P_j, ic^{-1}\mathcal{E})$.

8. Vzorec (64) pro úplný tenzor energie a hybnosti se dá použít i na černé (tepelné) záření v evakuované dutině. (Čtyřrychlost U_v je ovšem určena rychlostí pohybu nádoby obsahující černé záření vůči zvolenému systému S .) Pro záření lze však použít i tenzor (VI 33), který splňuje invariantní rovnici $T_{vv}^{(E)} \equiv 0$. Vypočítejte z toho vztah mezi tlakem černého záření p a hustotou jeho energie h' v klidovém systému dutiny.

KAPITOLA IX

RELATIVITA

A

GRAVITACE

V přehledu nejdůležitějších zákonů relativistické fyziky v kapitolách VI–VIII jsme zcela pominuli zákony gravitace. Úkolem následujících závěrečných poznámek je spíše vysvětlit toto zanedbání, než uspokojivě zaplnit vzniklou mezeru. Pojďme v nich jenom o základních rysech problému relativistické teorie gravitace. Podrobný výklad této značně složité a obsáhlé teorie podává Kuchařova učebnice Základy obecné teorie relativity.

1. EINSTEINŮV SPECIÁLNÍ PRINCIP RELATIVITY A TEORIE GRAVITACE

1.1. NEWTONOVA TEORIE GRAVITACE A PRVNÍ POKUSY O JEJÍ PŘÍZPUSOBENÍ POŽADAVKŮM SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

Gravitační interakce elementárních částic je ve srovnání s ostatními druhy jejich vzájemného působení *velmi slabá*. Např. poměr velikostí gravitační a elektrické síly mezi dvěma elektrony je $\approx 10^{-42}$. U dvou protonů je sice příznivější („jen“ $\approx 10^{-35}$), ale mezi nukleony působí i síly mezické (jaderné), které jsou ještě asi stokrát větší než elektrické. (Vzhledem k různé závislosti mezické a elektrické nebo gravitační síly na vzdálenosti musíme je při nukleonech srovnávat ve vzdálenosti $r \lesssim \kappa^{-1} \approx 10^{-13}$ cm, kde se ještě neprojevuje vliv exponenciálního součinitele $\exp(-\kappa r)$; viz (VI 122).) Při výkladu jevů, na nichž se podílí jen několik málo elementárních částic, můžeme tedy jejich gravitační interakci bezpečně zanedbat. Můžeme ji skutečně zanedbávat netoliko v teorii stavby atomových jader a atomů nebo molekul, ale i při teoretickém výkladu vlastností makroskopických vzorků látky, které mají obvyklé „laboratorní rozměry“. Proto jsme ani v kapitolách VI a VII ani v kapitole VIII teorii gravitace nepostrádali.

Na druhé straně však známe experimentální podmínky nebo situace, v nichž naopak gravitační působení je pro výklad pozorovaných jevů hlavní a rozhodující, nebo kdy se nedá zanedbat. To souvisí s dalšími pozoruhodnými vlastnostmi gravitační interakce: S tím, že je *všeobecná*, že gravitační síly jsou *vždy přitažlivé* a že

mají daleký dosah. U velikých hmotných těles (hvězd, planet), složených z ohromného počtu elektricky nabitých částic (elektronů i protonů), jejichž elektrické působení se na venek prakticky ruší, zatímco gravitační se sčítá, může pak gravitační působení převládnout. Teorie gravitace má zatím praktické použití hlavně v astronomii (nebeské mechanice a kosmonautice), geofyzice a astrofyzice. I když se při většině aplikací vystačí se starou (Newtonovou) teorií gravitace, má její *relativistická reformulace zřejmě zásadní význam*.

Všimněme si nejprve zběžně stavu, v němž byl celý problém v samých počátcích teorie relativity. Newtonův gravitační zákon (I 25, 25a, 26) lze vyjádřit takto: Gravitační síla $f^{(G)}(M)$ působící v okamžiku t na hmotnou částici M je určena vztahem

$$f^{(G)}(M) = -k^{\frac{1}{2}} m_M \text{grad } \psi(\mathbf{x}(M), t), \quad (1)$$

v němž

$$\psi = -\sum_N k^{\frac{1}{2}} m_N |\mathbf{x}(N) - \mathbf{x}(M)|^{-1} \quad (2)$$

a polohové vektory $\mathbf{x}(M)$, $\mathbf{x}(N)$ udávají polohy hmotných částic M , N v *tomtéž čase t* . Nahradíme-li veličiny $k^{\frac{1}{2}} m_M$, $k^{\frac{1}{2}} m_N$ elektrickými náboji e_M , e_N , stane se výraz (2) až na znaménko shodným s výrazem pro elektrický potenciál φ vzbuzený v místě $\mathbf{x}(M)$ soustavou (prakticky klidných) bodových nábojů e_N uložených v místech $\mathbf{x}(N)$, a výraz (1) pak formálně shodným s výrazem pro elektrickou sílu na bodový náboj e_M . Můžeme tedy veličiny $k^{\frac{1}{2}} m_M$, $k^{\frac{1}{2}} m_N$ nazvat *Newtonovými gravitačními náboji hmotných částic M , N* a veličinu ψ *Newtonovým gravitačním potenciálem* popisujícím *gravitační pole* vzbuzené uvažovanou soustavou hmotných částic N .

Na tomto místě je nutné poznamenat, že *Newton sám nezavedl pojem nebo představu gravitačního pole, tj. něčeho co existuje v prostoru nezávisle na tom, zda je nebo není „do něho vložena“ hmotná částice M , na niž působí síla $f^{(G)}(M)$* . Podle Newtona existovalo pouze *vzájemné silové (gravitační) působení mezi hmotnými tělesy*. Představa gravitačního pole byla vytvořena teprve v analogii s Faradayovými-Maxwellovými představami o poli elektrickém a magnetickém. Vzhledem k tomu, že v relativistické fyzice je pojem pole obecně velmi vhodný a užitečný, lze důvodně očekávat, že se i při formulaci relativistické teorie gravitace představa o (gravitačním) poli osvědčí.

Veličiny m_N ve výrazu (2) pro potenciál ψ se nazývají *aktivní tíhové hmoty částic* (budících gravitační pole) a veličina m_M ve vztahu (1) pro sílu $f^{(G)}(M)$ se nazývá *pasivní tíhová hmota částice* (podléhající působení gravitační síly). Z Newtonova principu akce a reakce ovšem plyne, že aktivní tíhové hmoty jsou u všech hmotných částic stejné jako pasivní. Proto jsme je ve vztazích (1) a (2) už ani nerozlišovali zvláštním označením (např. $m_M^{(p)}$, $m_N^{(a)}$). Od dob Newtonových je také známo, že vhodnou volbou *jediné, univerzální gravitační konstanty k* lze docílit toho, že se u všech částic (nezávisle na látce, z níž jsou „vyrobeny“) jejich *tíhové hmoty* rovnají Newtonovým *setrvačným hmotám*. K otázce, s jakou přesností je rovnost tíhové a setrvačné hmoty dnes experimentálně potvrzena, se vrátíme v následujícím odstavci.

Poznamenejme ještě, že když jsou bodové hmotné částice nahrazeny hmotnými tělesy konečných rozměrů, s objemovou hustotou hmoty $\rho^{(m)}$, platí místo vztahů (1) a (2) vztahy

$$f^{(G)}(M) = \int_{V_M} \phi^{(G)} dV, \quad (1a)$$

$$\phi^{(G)} = -k^{\frac{1}{2}} \rho^{(m)} \text{grad } \psi, \quad (1b)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = - \int_{V_N} k^{\frac{1}{2}} \rho^{(m)}(\mathbf{x}^+) |\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}|^{-1} dV^+. \quad (2a)$$

Význam symbolů v těchto vztazích, i fyzikální význam veličiny $\phi^{(G)}$ je zřejmý. Potenciál ψ daný vztahem (2a) splňuje Poissonovu rovnici

$$\Delta\psi = 4\pi k^{\frac{1}{2}} \rho^{(m)}, \quad (3)$$

kterou lze pokládat za *obecné vyjádření zákona Newtonova gravitačního potenciálu*. Diferenciální rovnice (3) je pro obecné úvahy o gravitačním poli výhodnější než vztahy (2a) nebo (2).

Newtonova teorie gravitace stála na samém počátku novodobé fyziky. A je možno říci, že pokusy o formulaci *relativistické teorie gravitace* lze sledovat rovněž od prvopočátku teorie relativity. Skutečný úspěch těchto pokusů se však dostavil později než v jiných oborech fyziky. V odst. III 6,2 jsme se již zmínili o tom, že Poincaré první navrhl úpravu Newtonova gravitačního zákona na tvar invariantní vůči Lorentzovým transformacím. Poincaré upravoval přímo Newtonovy vztahy pro gravitační síly, jimiž na sebe vzájemně působí dvě bodové hmotné částice. Newtonovy vztahy vyjadřují, jak víme, okamžité působení do dálky a jsou proto neslučitelné s požadavky teorie relativity, která dovoluje přenos vzájemného působení nejvýše rychlostí světla. V druhé z citovaných prací [29] Poincaré ukázal, že nutnou úpravu lze provést několika různými způsoby. Při všech jsou odchylky nových výrazů pro gravitační síly od starých Newtonových vztahů druhého řádu v poměrech rychlostí těles k rychlosti světla. Pro tělesa v sluneční soustavě (planety a jejich družice) jsou tedy poměrně velmi malé a proto jsou nové i staré vztahy pro gravitační síly ve stejné době souhlasné s astronomickými pozorováními.

Poincaréův postup, při němž se vychází z velmi speciálních vztahů, nebyl však pro obecnou teorii gravitace příliš vhodný a uspokojujivý. Bylo zřejmé, že větší naději na nalezení jednoduchých (a jednoznačných) obecných zákonů relativistické teorie gravitace dávají pokusy, které by chtěly přizpůsobit požadavkům teorie relativity diferenciální rovnici (3) a vzorec pro hustotu síly (1b). Také tato cesta byla nastoupena už v začátcích teorie relativity, ale k úspěšnému konci byla ve skutečnosti dovedena teprve v současné době, téměř po šedesáti letech (a to, jak se zdá, ještě jen proto, že správný tvar rovnic nahrazujících rovnici (3) našel Einstein dříve jiným postupem).

Porovnejme nejprve rovnici (3) a vzorce (1) popř. (1b) s rovnici

$$\Delta\varphi = -4\pi\varrho^{(e)} \quad (4)$$

a vzorci

$$\mathbf{f}^{(E)} = -e \text{ grad } \varphi, \quad (5)$$

popř.

$$\phi^{(E)} = -\varrho^{(e)} \text{ grad } \varphi, \quad (5a)$$

které představují elektrostatické (nebo kvazistatické) přiblížení k rovnicím (VI 142) a vzorcům (VI 151) popř. (VI 147) relativistické elektrodynamiky. Vidíme, že při korespondenci $\varphi \leftrightarrow \psi$, $\varrho^{(e)} \leftrightarrow k^{\frac{1}{2}}\varrho^{(m)}$, $e \leftrightarrow k^{\frac{1}{2}}m$ vzorce (5), (5a) formálně souhlasí se vzorci (1), (1b), kdežto rovnice (4) a (3) se liší pouze znaménkem pravé strany. Tento rozdíl ovšem právě odpovídá tomu, že stejnojmenné elektrické náboje se odpuzují, kdežto stejnojmenné gravitační náboje se přitahují.

Podnícen touto blízkou příbuzností Newtonovy gravitační teorie a kvazistatické aproximace své elektronové teorie, pokusil se Lorentz už před vybudováním teorie relativity také o formulaci „maxwellovské“ teorie gravitačního pole a jeho dynamického působení [60]. Lorentzova gravitační teorie se sice neosvědčila, ale její prostá pojmová struktura je tak typická a důvod jejího selhání natolik zajímavý, že stojí za krátkou zmínku.

Ačkoliv Lorentz tehdy ještě nepoužíval matematického aparátu teorie relativity, jeho gravitační teorie (podobně jako elektronová teorie) splňuje požadavky relativistické invariance. S použitím tenzorového počtu teorie relativity a v relativistické teorii gravitace obvyklých reálných prostoročasových souřadnic x^ν můžeme Lorentzovu gravitační teorii formulovat takto: Předpokládáme, že gravitační pole lze popsat gravitačním čtyřpotenciálem $\psi^\nu \equiv (\psi, \psi^4)$, který podrobíme Lorentzově podmínce $\partial_\nu \psi^\nu = 0$. Definujeme si také antisymetrický tenzor intenzit gravitačního pole $G_{\alpha\nu} = \partial_\alpha \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\alpha$. Za jednoduchý model látky (matérie), která budí gravitační pole a je podrobena jeho působení, použijeme hmotného prachu popsaného klidovou hustotou jeho klidové hmoty $\mu_{00}(x) \geq 0$ a polem jeho čtyřrychlosti $U^\nu(x)$. O hmotném prachu budeme pro jednoduchost předpokládat, že je elektricky (i mezicky) neutrální a interaguje pouze s gravitačním polem.

Z veličin μ_{00} a U^ν lze utvořit čtyřvektor $J^{(m)\nu} = \mu_{00}U^\nu \equiv (\mu_0\mathbf{u}, c\mu_0)$; $\mu_0 = \mu_{00}\gamma$ je hustota klidové hmoty. Čtyřvektor proudu hmoty $J^{(m)\nu}$ je vlastním zdrojem Lorentzova gravitačního pole, jež budí podle rovnice

$$\partial_\nu G^{\alpha\nu} = -4\pi c^{-1} k^{\frac{1}{2}} J^{(m)\alpha}. \quad (6)$$

Z nich dosazením za $G^{\alpha\nu}$ a užitím Lorentzovy podmínky pro ψ^ν dostáváme d'Alembertovy vlnové rovnice

$$\partial_\nu \partial^\nu \psi^\alpha \equiv \square \psi^\alpha = +4\pi c^{-1} k^{\frac{1}{2}} J^{(m)\alpha}. \quad (6a)$$

Ve statickém (nebo kvazistatickém) případě máme $\mathbf{u} \doteq 0$, $J^{(m)} \doteq 0$, $J^{(m)4} = c\mu_0(\mathbf{x})$, a pole $\psi \doteq 0$, $\psi^4 = \psi(\mathbf{x})$ pak splňuje rovnici (3) s $\varrho^{(m)} = \mu_0$. Tím je zároveň určen

přesný význam, který Lorentzova gravitační teorie přisuzuje newtonovským veličinám ψ a $\varrho^{(m)}$. V kvazistatickém případě, odpovídající Newtonově teorii, je ovšem $\mu_0 \doteq \mu_{00} = \mu = \varrho^{(m)}$, neboť $\gamma \doteq 1$.

Vraťme se nyní k rovnicím (6), z nichž plyne rovnice kontinuity $\partial_\alpha J^{(m)\alpha} = 0$, čili

$$\partial\mu_0/\partial t + \text{div}(\mu_0\mathbf{u}) = 0. \quad (7)$$

Použijeme-li vztahů (VII 86, 78), vyplyne z rovnice (7) podmínka $d(\mu_0 \Delta V)/dt = 0$. Rovnice gravitačního pole (6) tedy vyžadují zachování klidových hmot $\Delta m_0 = \mu_0 \Delta V = \mu_{00} \Delta V_0$ elementů (částic) hmotného prachu.

Vlastní hustotu Lorentzovy (gravitační) čtyřsily nyní musíme definovat vzorcem

$$\phi_\alpha^{(G)} = c^{-1} k^{\frac{1}{2}} G_{\alpha\nu} J^{(m)\nu}, \quad (8)$$

který v kvazistatickém případě dává $\phi_j^{(G)} \doteq -k^{\frac{1}{2}}\mu_0 \partial_j \psi$, ve shodě s newtonovským vzorcem (1b). Pro gravitační čtyřsílu působící na prachový element pak z rovnice (8) dostáváme vyjádření

$$F_\alpha^{(G)} = \phi_\alpha^{(G)} \Delta V_0 = c^{-1} k^{\frac{1}{2}} \Delta m_0 G_{\alpha\nu} U^\nu. \quad (9)$$

Podobně jako v elektrodynamice jsou čtyřvektory (8) a (9) kolmé k čtyřrychlosti.

Pohybové rovnice prachového elementu

$$d(\Delta m_0 U^\nu)/d\tau = F^{(G)\nu} \quad (10)$$

jsou tedy v souladu s konstantností klidové hmoty, neboť z nich známým způsobem plyne $d\Delta m_0/d\tau = 0$. Po dosazení z (9) do (10) pak vidíme, že pohybové rovnice hmotné částice v Lorentzově gravitačním poli je možno psát ve tvaru

$$dU_\alpha/d\tau = c^{-1} k^{\frac{1}{2}} G_{\alpha\nu} U^\nu, \quad (10a)$$

v němž už hmota částice explicitě nevystupuje. To je obecným vyjádřením známé, staré zkušenosti, že v daném vnějším gravitačním poli padají všechna hmotná tělesa se stejným zrychlením. V kvazistatickém případě se rovnice (10a) zjednoduší na tvar

$$d^2\mathbf{x}/dt^2 = -k^{\frac{1}{2}} \text{grad } \psi. \quad (10b)$$

Pro potenciál ψ platí nyní vzorec (2a). Máme tedy opět pohybový zákon, který se v nebeské mechanice znamenitě osvědčil.

Poznamenejme ještě, že rovnice pole (6) i pohybové rovnice (10a) můžeme odvodit z jediného variačního principu

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega = 0 \quad (11)$$

s Lagrangeovou hustotou

$$\mathcal{L} = +(16\pi)^{-1} G^{\alpha\nu} G_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \mu_{00} U_\alpha U^\alpha + c^{-1} k^{\frac{1}{2}} \psi_\alpha J^{(m)\alpha}. \quad (12)$$

Nezávislé variace $\delta\psi_\alpha(x)$ vedou známým způsobem na rovnice (6). K odvození rovnice (10a) píšeme $d\Omega = c \Delta V_0 d\tau$, $\mu_{00} \Delta V_0 = \Delta m_0$ a integrál v rovnici (11) z posledních dvou členů výrazu (12) upravíme na tvar

$$c \int \Delta m_0 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Lambda(x, U) d\tau,$$

kde

$$\Lambda(x, U) = \frac{1}{2} U_\alpha U^\alpha + c^{-1} k^{\frac{1}{2}} \psi_\alpha U^\alpha.$$

Podobně jako v (VII 64) se integrál podle τ vztahuje na úsek světočáry Γ hmotného elementu Δm_0 mezi světobody, v nichž světočára protíná hraniční nadplochu Σ oboru Ω . Vypočteme-li nyní variaci tohoto integrálu způsobenou variacemi $\delta x^\alpha(\tau)$ souřadnic světobodů na Γ postupem vyloženým v „Poznámce“ na konci odst. VII 2,3, nebo použijeme-li přímo příslušných Eulerových rovnic (VII 17A), dostaneme ihned pohybové rovnice (10a).

Zatím se tedy zdá všechno v pořádku. Ale zbývají nám ještě nepříjemná překvapení: Rovnice (6) a (10a) mají i jisté důsledky, které Lorentzovu teorii gravitace fyzikálně znehodnocují. Píšeme-li v rovnicích (10a) $dU^\alpha/d\tau = U^\nu \partial_\nu U^\alpha$, násobíme je pak μ_{00} , a při úpravě použijeme rovnice kontinuity $\partial_\nu(\mu_{00} U^\nu) = 0$, můžeme je zapsat ve tvaru podmínky

$$\partial_\nu T^{(H)\alpha\nu} = \phi^{(G)\alpha} \quad (13)$$

pro kinetický tenzor energie a hybnosti hmotného prachu

$$T^{(H)\alpha\nu} \equiv \mu_{00} U^\alpha U^\nu. \quad (14)$$

Rovnice (13) a (14) odpovídají rovnicím (VII 66a,b) a (VII 67). Definujme dále tenzor $T^{(G)\alpha\nu}$ energie a hybnosti Lorentzova gravitačního pole jako tenzor, který na základě rovnic pole (6) splňuje podmínky

$$\partial_\nu T^{(G)\alpha\nu} = -\phi^{(G)\alpha} \quad (15)$$

analogické podmínkám (VII 68, 69) pro tenzory energie a hybnosti elektromagnetického a mezického pole. Potom je možno zapsat rovnice (13) ve tvaru podmínek

$$\partial_\nu T^{\alpha\nu} = 0 \quad (16)$$

pro úplný tenzor $T^{\alpha\nu} = T^{(H)\alpha\nu} + T^{(G)\alpha\nu}$. Rovnice (16) vyjadřují v diferenciální formě zákony zachování energie a hybnosti soustavy složené z hmotného prachu a gravitačního pole.

Vzhledem k tomu, že se výraz (8) pro $\phi_\alpha^{(G)}$ shoduje s výrazem (VI 147) pro $\phi_\alpha^{(E)}$, ale rovnice (6) se liší od rovnic (VI 146) znaménkem pravé strany, dostaneme pro tenzor $T^{(G)\alpha\nu}$ (splňující rovnici (15) shodnou s (VI 149)) výraz

$$T^{(G)\alpha\nu} = -(4\pi)^{-1} (G^\alpha_\beta G^{\nu\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\nu} G_{\beta\gamma} G^{\beta\gamma}),$$

který se od obdobného výrazu $T^{(E)\alpha\nu}$ (určeného vzorcem (VI 148)) liší právě znaménkem. Poněvadž výraz pro hustotu energie $T^{(E)44}$ elektromagnetického pole je, jak víme, pozitivně definitní, vychází tedy hustota energie $T^{(G)44}$ Lorentzova gravitačního pole záporná. Naproti tomu hustota energie hmotného prachu

$$T^{(H)44} = \mu_{00} U^4 U^4 = \mu_{00} c^2 \gamma^2 = \mu c^2$$

je kladná (popř. nezáporná) jsou-li klidové hmoty Δm_0 prachových elementů (které se zachovávají) v jistém počátečním čase vesměs kladné. Také klidová hustota klidové energie hmotného prachu, kterou můžeme pomocí kinetického tenzoru vyjádřit známým vztahem

$$\mu_{00} c^2 = -T^{(H)\alpha}_\alpha,$$

je kladná (popř. nezáporná), zatímco pro Lorentzovo gravitační pole (podobně jako pro elektromagnetické pole) je odpovídající veličina $-T^{(G)\alpha}_\alpha$ identicky nulová.

Všimněme si nyní praktického i teoretického významu záporné energie Lorentzova gravitačního pole. Poněvadž rovnice (6) jsou rovnice vlnové, mají existovat gravitační vlny. Hmotné soustavy, např. sluneční planetární soustava nebo dvojhvězdy, mají takové vlny vysílat a přitom získávat mechanickou energii, neboť energie vysílaných vln je záporná. Empiricky zatím není tento jev ani potvrzen ani vyvrácen, neboť „očekávaný“ vliv je zřejmě proti jiným podobným (např. ztrátám energie světelným zářením) zcela zanedbatelný a nepozorovatelný. Z tohoto praktického hlediska by tedy uvažovaná neobvyklá vlastnost Lorentzova gravitačního pole nemusela být nutně pokládána za závadnou. Ale horší je to z hlediska principů relativistické teorie polí. V relativistické kvantové teorii polí, obvyklé dnešní formě teorie matérie (elementárních částic), patří požadavek pozitivní definitnosti energie tenzorových polí k základním postulátům, neboť na něm spočívá jeden z jejích hlavních teorémů, totiž tzv. Pauliho zákon o vztahu mezi spinem elementárních částic a jejich statistikou. (Kvantovaná tenzorová pole popisují částice s celočíselnými spiny a ty se řídí Boseho statistikou, která vyžaduje pozitivní definitnost energie pole.) Z tohoto principiálního důvodu je tedy nutno Lorentzovu teorii gravitace zamítnout. Další, podobná závada této teorie je v tom, že ji nelze použít na jiné modely matérie než právě model hmotného prachu, poněvadž v jiných modelech (teoriích matérie) nelze definovat potřebný čtyřvektor $J^{(m)\alpha}$. V relativistické teorii pole např. je pouze tenzor $T^{\alpha\beta}$ energie a hybnosti, z něhož lze vypočítat hustotu μ_{00} . Není však pole čtyřrychlosti $U^\nu(x)$.

Po selhání Lorentzovy „vektorové“ teorie gravitačního pole, v níž byl Newtonův gravitační potenciál ψ identifikován se čtvrtou složkou čtyřpotenciálu ψ^α a hustota

Newtonovy hmoty $\varrho^{(m)}$ s relativistickou hustotou klidové hmoty $\mu_0 = c^{-1}\mu_{00}U^4$, zbývají pro zamýšlenou přestavbu Newtonovy gravitační teorie na relativistickou teorii pole pouze dvě možnosti: Hustotu $\varrho^{(m)}$ je možno identifikovat buď s veličinou $\mu_{00} = -c^{-2}T_{\alpha}^{\alpha}$, nebo s veličinou $\mu = c^{-2}T^{44}$. V prvním případě, kdy $\varrho^{(m)}$ identifikujeme s *prostorčasovým skalárem*, bude také *gravitační pole skalární* a rovnice (3) bude patrně nahrazena invariantní rovnicí

$$\square\psi = 4\pi k^{\frac{1}{2}}\mu_{00} = -4\pi k^{\frac{1}{2}}c^{-2}T_{\alpha}^{\alpha}, \quad (17)$$

obdobnou rovnicí (VI 119) popř. (VII 45) skalárního mezického pole.

Teorii skalárního gravitačního pole založenou na rovnici (17) navrhl a rozpracoval Nordström [61] a vytvořil tím první teoreticky nezávadnou relativistickou teorii gravitace. Z odst. VI 7,2 a VII 3,2 víme, že mezické skalární pole zajišťuje *přitahování stejnojmenných mezických nábojů při kladné energii volného pole*. Tyto dobré vlastnosti se ovšem přenáší i na skalární pole gravitační. Kromě toho teorie skalárního gravitačního pole není už vázána jen na model hmotného prachu, neboť veličina T_{α}^{α} je definována v každé relativistické teorii matérie. Jelikož tenzor $T^{\alpha\beta}$, jehož stopa T_{α}^{α} stojí na pravé straně rovnice (17), není vázán na žádné zvláštní podmínky (např. typu (16)), může se volit různě, a tak se dají vytvořit různé verze Nordströmovy teorie. Důležité je to, že k veličině μ_{00} nepřispívá ani kinetická energie hmotných částic ani elektromagnetická energie (neboť $T^{(E)\alpha}_{\alpha} \equiv 0$).

I když jsou zásadní závady vytýkané Lorentzově teorii gravitace v Nordströmově teorii odstraněny, ukázalo se, že *i ona je ve skutečnosti nesprávná*. Jak doložíme v následujícím odstavci, novější, přesná empirická data o gravitačních jevech ji odporují a tím ji vyvracejí. Proto se skalární teorií dále zabývat nebudeme. Podrobnější výklad původní Nordströmovy teorie podává učebnice Kuchařova (kap. IV, odst. 1,3). Z hlediska obecných principů teorie pole (jednotného variačního principu pro rovnice gravitačního pole i pro pohybové rovnice hmotných částic apod.) je skalární gravitační teorie zkoumána např. v pojednáních [62] a [63]. Z hlediska astronomických a kosmologických aplikací je hodnocena v práci [62] a ve sborníku [64].

Nakonec tedy zbývá pro relativistickou úpravu rovnice (3) jen ta možnost, že veličina $\varrho^{(m)}$ je vlastně totožná s veličinou $\mu = c^{-2}T^{44}$. Poněvadž se při této identifikaci *pravá strana rovnice (3) stává složkou symetrického tenzoru*, lze soudit, že nyní i samo gravitační pole bude popsáno symetrickým tenzorem. Označíme-li jeho složky $\psi^{\alpha\beta}$, můžeme očekávat, že rovnice (3) bude v obecném případě nahrazena invariantní soustavou tenzorových rovnic

$$\square\psi^{\alpha\beta} = 4\pi k^{\frac{1}{2}}c^{-2}T^{\alpha\beta}. \quad (18)$$

K bližšímu rozboru této soustavy i charakteristických rysů tenzorové gravitační teorie se vrátíme v odst. 1,3. Dříve však uvedeme nejdůležitější empirická fakta, která svědčí proti skalárnímu a pro tenzorové gravitační pole.

1,2. NOVĚJŠÍ EMPIRICKÁ DATA O GRAVITACI

Jevy, které v zásadě dovolují rozhodnout mezi skalární a tenzorovou teorií gravitace, lze snadno udat. Nepotřebujeme k tomu ani úplnou matematickou formulaci těchto teorií ani přesné explicitní vzorce pro gravitační potenciály nebo gravitační síly. Stačí především uvážit, co podle jedné nebo druhé teorie může (popř. co nemůže) přispívat k tíhovým hmotám hmotných těles. Z výrazu na pravé straně rovnice (17) vyplývá, jak jsme si již všimli, že k aktivní tíhové hmotě tělesa podle skalární teorie nepřispívá ani kinetická ani elektromagnetická energie. Z kapitoly VI však víme, že obě tyto energie nutně přispívají k jeho hmotě setrvačné. Podle skalární teorie měl by se tedy poměr tíhové a setrvačné hmoty hmotného tělesa změnit, když to těleso např. zahřejeme. Snadný výpočet však ukazuje, že prakticky dosažitelný účinek je příliš malý na to, aby mohl být experimentálně prokázán, i kdyby skalární teorie byla správná a vliv vskutku existoval. Podle tenzorové teorie přispívá kinetická energie i k tíhové hmotě, neboť tato hmota je nyní určena (stejně jako setrvačná hmota) veličinou T^{44} . Podle rovnice (18) určuje sice veličina T^{44} jenom potenciál ψ^{44} , ale ten je v kvazistatickém případě jedinou dynamicky významnou složkou tenzorového potenciálu $\psi^{\alpha\beta}$.

Poznamenejme ještě, že totéž, co bylo řečeno o aktivní tíhové hmotě, platí i pro pasivní tíhovou hmotu tělesa, neboť (jak jsme viděli při matematické formulaci Lorentzovy gravitační teorie) výraz pro gravitační sílu vzniká z téhož členu v Lagrangeově funkci jako pravá strana v rovnici pro gravitační potenciál.

Z praktického hlediska nadějnější než zmíněný tepelně gravitační vliv jsou vlivy elektromagneticko-gravitační. Podle skalární teorie by poměr tíhové a setrvačné hmoty měl být např. u neutronu jiný než u elektronu, neboť podíl setrvačné hmoty elektromagnetického původu v celkové setrvačné hmotě je bezpochyby u každé z těchto částic jiný. Také podíl elektromagnetické setrvačné hmoty v setrvačných hmotách rozličných atomů (např. atomu zlata a atomu hliníku) se dosti liší.

V odst. I 3,2 jsme už vzpomenuli známých měření, která konali Newton a Eötvös, aby zjistili poměr tíhové a setrvačné hmoty těles z různých látek. Zatímco Newton mohl zaručit, že se hodnota tohoto poměru u všech zkoumaných látek rovná jedné s přesností $\pm 10^{-3}$, Eötvös již udává přesnost $\pm 3 \cdot 10^{-9}$. Připomeňme ještě, že zatímco všichni Eötvösovi předchůdci zkoumali při svých pokusech *pohyby těles pod účinkem jejich váhy*, Eötvös první použil *metody statické* (rovnovážné), při níž na torzních vahách srovnával u různých těles poměr jejich váhy k odstředivé síle vyvolané rotací Země. V posledních letech Roll, Krotkov a Dicke [65] opakovali Eötvösova měření v podstatně zdokonalené úpravě (při níž místo gravitace zemské použili gravitace sluneční) a dospěli k výsledku, který je možno vyjádřit takto: Volíme-li poměr tíhové a setrvačné hmoty zlatého závaží rovný přesně jedné, liší se tento poměr u hliníkového závaží od zvolené jednotky nejvýše o $\pm 3 \cdot 10^{-11}$. To je už dostatečná přesnost k tomu, abychom mohli bezpečně tvrdit, že *elektromagnetická energie obsažená v tělese přispívá i k jeho tíhové hmotě* (v rozporu se skalární teorií gravitačního pole).

Známe ještě jeden důležitý elektromagneticko-gravitační jev, který svědčí o tom, že s elektromagnetickou energií je spojena i tíhová hmota. Astronomická pozorování ukazují, že se světelné paprsky, které na cestě od hvězd k nám přicházejí do blízkosti Slunce, v jeho gravitačním poli odchylují od svého původního směru („padají“ ke Slunci). Můžeme to interpretovat v tom smyslu, že fotony mají nenulovou tíhovou hmotu a interagují s gravitačním polem, ačkoliv mají pouze elektromagnetickou energii (a nulovou „klidovou“ hmotu).

Třetí gravitační ukaz, který vyřazuje skalární teorii, je v odst. I 4 vzpomenuté stáčení Merkurova perihelu. Pohybové rovnice odvozené z *relativistické skalární* gravitační teorie sice už dávají (na rozdíl od Newtonovy teorie) nenulovou hodnotu, ale hodnotu kvantitativně nesprávnou. (Je šestkrát menší a ještě opačného znaménka než pozorovaná. Viz např. [62].)

Podrobný popis všech uvedených (i dalších) gravitačních jevů podává učebnice Kuchařova. V ní čtenář také nalezne úplný kvantitativní rozbor a výklad všech pozorovaných ukazů podle Einsteinovy (tenzorové) gravitační teorie.

1.3. SPECIÁLNĚ RELATIVISTICKÁ TEORIE GRAVITACE A JEJÍ POTÍŽE

Všimněme si nyní krátce problémů spojených s formulací teorie *tenzorového* gravitačního pole v rámci speciální teorie relativity. Vyjdeme z rovnic (18) a z předpokladu, že tenzor $T^{\alpha\beta}$ na pravé straně je symetrickým tenzorem energie a hybnosti *všech druhů matérie popř. polí, s výjimkou samotného pole gravitačního*. K tomuto předpokladu vybízí jednak empirická fakta uvedená v předchozím odstavci, jednak relativistické teorie polí, s nimiž jsme setkali v kap. VI a VII, a na nichž jsme viděli, že *pro volné pole platily vždy lineární, homogenní, parciální diferenciální rovnice*.

Pro gravitační pole ve vakuu tedy máme rovnice

$$\square \psi^{\alpha\beta} \equiv \partial^\nu \partial_\nu \psi^{\alpha\beta} = 0, \quad (\psi^{\alpha\beta} = \psi^{\beta\alpha}), \quad (19)$$

kteří plynou z variačního principu tvaru (11) s Lagrangeovou hustotou

$$\mathcal{L}^{(G)} = -(8\pi)^{-1} \partial^\nu \psi^{\alpha\beta} \cdot \partial_\nu \psi_{\alpha\beta}. \quad (20)$$

Pro kanonický tenzor energie a hybnosti gravitačního pole pak podle obecného vzorce (VII 120) dostáváme výraz

$$\begin{aligned} \Theta_e^\nu &= - \frac{\partial \mathcal{L}^{(G)}}{\partial (\partial_\nu \psi_{\alpha\beta})} \partial_\alpha \psi_{\beta\gamma} + \delta_e^\nu \mathcal{L}^{(G)} = \\ &= (4\pi)^{-1} (\partial^\nu \psi^{\alpha\beta} \cdot \partial_\alpha \psi_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \delta_e^\nu \partial^\sigma \psi^{\alpha\beta} \cdot \partial_\sigma \psi_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Tento tenzor, splňující na základě rovnic (19) podmínky $\partial_\nu \Theta_e^\nu = 0$, je už také symetrický ($\Theta_{e\nu} = \Theta_{\nu e}$), ale má tu vadu, že ani hustota energie $h^{(G)} = \Theta_{44}$, ani úhrnná energie pole $\mathcal{E}^{(G)} = \int \Theta_{44} dV$ obecně není kladná.

Teorie gravitačního pole založená na rovnicích (19) je formálně obdobná té formulaci teorie elektromagnetického pole, která vychází z vlnových rovnic $\square \varphi_\alpha = 0$ (viz např. Ú VII 5). Tam jsme viděli, že základní rovnice bylo nutno dodatečně doplnit Lorentzovou podmínkou, která teprve učinila celou teorii rovnocennou teorii Maxwellově a mimo jiné také způsobila, že se úhrnná kanonická energie pole stala pozitivní. Je tedy nasnadě postupovat podobně i nyní. A skutečně lze ukázat, že se veličina $\mathcal{E}^{(G)}$ stane kladnou, jestliže fyzikálně přípustná řešení rovnic (19) omezíme dodatečnými podmínkami

$$\partial_\nu \psi_\alpha^\nu = 0, \quad (21)$$

kteří jsou obdobné Lorentzově podmínce $\partial_\nu \varphi^\nu = 0$. Dostí složitý a zdlouhavý důkaz tohoto tvrzení zde podávat nebudeme. (Lze jej nalézt např. v Thirringově práci [66].) Místo toho si všimněme jiných závažných důsledků podmínek (21).

Na první pohled by se mohlo zdát, že v rovnicích (19) a (21), popř. (18) a (21) už máme zcela uspokojivou formulaci teorie tenzorového gravitačního pole, obdobnou teorii elektromagnetického pole založené na rovnicích $\square \varphi^\alpha = -4\pi c^{-1} J^\alpha$, $\partial_\alpha \varphi^\alpha = 0$. Ale není tomu tak, protože z rovnic (18) a (21) plynou pro tenzor $T^{\alpha\beta}$ fyzikálně nepřijatelné podmínky $\partial_\nu T^{\alpha\nu} = 0$. Takovéto rovnice (a příslušné zákony zachování) totiž mohou platit pouze při zanedbávání gravitačního pole. To jsme si mohli dovolit v předchozích kapitolách, ale nemůžeme to dělat v teorii gravitace. Nyní rovnice tvaru (16) mohou (a musí) platit pouze pro úplný tenzor energie a hybnosti, který zahrnuje také energii a hybnost gravitačního pole samotného.

Vidíme tedy, že nutné doplnění výchozích gravitačních rovnic dodatečnými podmínkami (21) nutí ke změně základních rovnic v tom smyslu, že tenzorem $T^{\alpha\beta}$ na pravé straně rovnic (18) je třeba rozumět *úplný* tenzor energie a hybnosti. To ovšem dále znamená, že volné (vakuové) gravitační pole bude určeno místo lineárními rovnicemi (19) rovnicemi, na jejichž pravé straně bude (místo nuly) násobek tenzoru energie a hybnosti samotného gravitačního pole. Tak docházíme k důležitému závěru, že *rovnice gravitačního pole* (na rozdíl od rovnic všech ostatních druhů polí) *zásadně musí být nelineární*.

Zároveň ovšem vzniká obtížná otázka, jak znějí přesné rovnice gravitačního pole. Abychom je mohli napsat (třebas i jen pro pole ve vakuu), potřebujeme totiž podle předchozího rozboru znát přesný výraz pro tenzor energie a hybnosti gravitačního pole. Ale ten je zase možno určit teprve z přesných rovnic pole (nebo přesné Lagrangeovy funkce). Kanonický tenzor Θ_e^ν ještě není tím požadovaným přesným výrazem, neboť odpovídá pouze hrubé aproximaci přesných rovnic pole lineárními rov-

nicemi (19), které platí jen v dostatečně slabém poli. Gupta [67] se pokoušel dospět k přesným rovnicím gravitačního pole ve vakuu touto metodou postupných aproximací: *Vyjedeme od rovnic (19) jakožto nulté aproximace. V první aproximaci je pak nahradíme rovnicemi*

$$\square \psi^{\alpha\beta} = \kappa \overset{0}{\Theta}^{\alpha\beta}, \quad (19_1)$$

v nichž $\kappa = 4\pi c^{-2} k^{\frac{1}{2}}$ a $\overset{0}{\Theta}^{\alpha\beta}$ je kanonický tenzor příslušný k nulté aproximaci rovnic pole. K rovnicím (19₁) patří nová Lagrangeova hustota $\overset{0}{\mathcal{L}}^{(G)} + \kappa \overset{1}{\mathcal{L}}^{(G)}$ a z ní vyplývá nový kanonický tenzor $\overset{0}{\Theta}^{\alpha\beta} + \kappa \overset{1}{\Theta}^{\alpha\beta}$. Ten dosadíme na místo $\overset{0}{\Theta}^{\alpha\beta}$ do rovnic (19₁), tím získáme rovnice pole (19₂) v druhé aproximaci atd. Kdyby se měl tento postup úspěšně dokončit, bylo by ovšem nutno za prvé jednoznačně určit všechny výrazy $\overset{n}{\mathcal{L}}^{(G)}$, za druhé sečíst nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \overset{n}{\mathcal{L}}^{(G)} = \overset{\infty}{\mathcal{L}}^{(G)}$$

a tím určit přesnou Lagrangeovu hustotu gravitačního pole v konečném uzavřeném tvaru, a za třetí ukázat, že výsledná přesná teorie vakuového gravitačního pole je vskutku matematicky bezesporná i fyzikálně vyhovuje.

Tento obtížný úkol se už Guptaovi splnit nepodařilo, neboť běžné principy teorie polí nedovolují (neumožňují) jednoznačně určit výrazy $\overset{n}{\mathcal{L}}^{(G)}$. Nicméně správný výsledek známe, poněvadž Einstein už roku 1916 našel přesný tvar nelineárních rovnic gravitačního pole jiným postupem. Gupta proto mohl prostě rozvinout Lagrangeovu hustotu $\overset{0}{\mathcal{L}}^{(G)}$ Einsteinovy teorie podle mocnin konstanty κ a tím zjistit, jak musí být voleny výrazy $\overset{n}{\mathcal{L}}^{(G)}$, aby jeho metoda vedla v limitě $n \rightarrow \infty$ ke správné teorii. To ovšem nelze pokládat za důsledné splnění stanoveného programu, neboť původní Einsteinovo odvození gravitačních rovnic je založeno na představách a zásadách podstatně odlišných od představ a principů konvenční speciálně relativistické teorie polí. Úspěšnější metodu nedávno navrhli Ogieveckij a Polubarinov [68]. Jejich odvození správné Lagrangeovy hustoty není založeno na postupných aproximacích a nepoužívá Einsteinových výsledků (i když ovšem je celý postup jimi podnícen); je však příliš složitá a zdlouhavá na to, aby se zde mohlo uvést, byť i jen stručně.

Dnes tedy můžeme říci, že *správný tvar základních rovnic relativistické teorie gravitačního pole je možno odvodit a jejich výjimečné postavení zdůvodnit i v rámci principů konvenční speciálně relativistické teorie polí*. Ale tím ještě nejsou překonány všechny potíže a nemůžeme tvrdit, že gravitační jevy lze uspokojivě popsat v rámci speciální teorie relativity. O tom nás přesvědčí letmý pohled na *pohybové rovnice hmotných částic v gravitačním poli*. Omezíme se pro jednoduchost na model neutrálního hmotného prachu popsaného čtyřrychlostí $U^\nu(x)$ a klidovou hustotou klidové hmoty

$\bar{\mu}_{00}(x)$. (Na rozdíl od hmotného prachu v Lorentzově vektorovém gravitačním poli, nebo v elektromagnetickém poli, musí se u hmotného prachu v tenzorovém i skalárním gravitačním poli, podobně jako ve skalárním mezickém poli, rozeznávat veličina $\bar{\mu}_{00}$ od hustoty μ_{00} , která závisí explicitě na potenciálech pole a redukuje se na $\bar{\mu}_{00}$ pouze při $\psi^{\alpha\beta} = 0$.) Veličina $\bar{\mu}_{00}$ bude mít nadále podobný význam (i vlastnosti) jako stejně označená veličina v odst. VII 4. Nebude (explicitě) záviset na potenciálech pole a čtyřvektor $\bar{J}^\alpha \equiv \bar{\mu}_{00} U^\alpha$ bude splňovat rovnici kontinuity $\partial_\nu \bar{J}^\nu = 0$, takže „pruhované“ klidové hmoty $\Delta \bar{m}_0 = \bar{\mu}_{00} \Delta V_0 \geq 0$ elementů hmotného prachu se budou při jejich pohybu zachovávat ($d\Delta \bar{m}_0/d\tau = 0$). Také při variaci světočár skutečného pohybu budou veličiny $\Delta \bar{m}_0$ konstantní ($\delta \Delta \bar{m}_0 = 0$).

Při popisu gravitačního pole vzbuzeného hmotným prachem (a popř. vnějšími zdroji) se omezíme na „nultou aproximaci“ charakterizovanou rovnicemi

$$\square \psi^{\alpha\beta} = 4\pi c^{-2} k^{\frac{1}{2}} \bar{T}^{(H)\alpha\beta}, \quad (18)$$

v nichž

$$\bar{T}^{(H)\alpha\beta} = \bar{\mu}_{00} U^\alpha U^\beta.$$

(Přídavné podmínky (21) jsou sice, jak víme, v rozporu s přibližnými rovnicemi (18), ale to nám nyní nevadí. Nebudeme je při našich dalších úvahách potřebovat, a proto je nemusíme zavádět.) Rovnice pole (18) i pohybové rovnice hmotného prachu lze odvodit z variačního principu (11) s Lagrangeovou hustotou $\mathcal{L}$ danou součtem

$$\mathcal{L} = \overset{0}{\mathcal{L}}^{(G)} + \bar{\mathcal{L}}^{(H)} + \mathcal{L}^{(int)}, \quad (22)$$

v němž člen $\overset{0}{\mathcal{L}}^{(G)}$ je určen vztahem (20). Člen

$$\bar{\mathcal{L}}^{(H)} = \frac{1}{2} \bar{\mu}_{00} U_\alpha U^\alpha \equiv \frac{1}{2} \bar{\mu}_{00} \eta_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta \quad (22a)$$

je Lagrangeova hustota hmotného prachu a *třetí člen*

$$\mathcal{L}^{(int)} = -c^{-2} k^{\frac{1}{2}} \bar{T}^{(H)\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta} \quad (22b)$$

určuje interakci pole a prachu.

Rovnice (18) se dostanou variacemi $\delta \psi_{\alpha\beta}$ a pohybové rovnice libovolného elementu hmotného prachu se snadno odvodí stejným postupem jako v Lorentzově gravitační teorii v odst. 1,1. (Nyní je ovšem podél světočáry a při její variaci konstantní veličina $\Delta \bar{m}_0$.) Dostaneme tak rovnice

$$\frac{d}{d\tau} (U_\alpha - 2c^{-2} k^{\frac{1}{2}} \psi_{\alpha\beta} U^\beta) = -c^{-2} k^{\frac{1}{2}} U^\beta U^\nu \partial_\alpha \psi_{\beta\nu}, \quad (23)$$

které v tenzorové teorii nahrazují rovnice (10a) z teorie vektorové. Násobíme-li je $\bar{\mu}_{00}$, lze je použitím rovnice kontinuity $\partial_\nu (\bar{\mu}_{00} U^\nu) = 0$ a formule $U^\nu \partial_\nu f(x) = df/d\tau$ zapsat ve tvaru

$$\partial_\nu T_\alpha^{(H)\nu} = \phi_\alpha^{(G)} \equiv -c^{-2} k^{\frac{1}{2}} \bar{T}^{(H)\beta\nu} \partial_\alpha \psi_{\beta\nu}. \quad (24)$$

Přitom tenzor

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{(H)\nu} &\equiv \bar{\mu}_{00} U^{\nu} (U_{\alpha} - 2c^{-2} k^{\frac{1}{2}} \psi_{\alpha\beta} U^{\beta}) = \\ &= \bar{T}_{\alpha}^{(H)\nu} - 2c^{-2} k^{\frac{1}{2}} \bar{T}^{(H)\nu\beta} \psi_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (25)$$

představuje tenzor energie a hybnosti *hmotného prachu v gravitačním poli*. (Druhý člen je interakčního původu a obsahuje gravitační potenciální energii prachu.) Z tenzoru (25) je možno také odvodit hustotu μ_{00} podle vzorce $\mu_{00} = -c^{-2} T_{\alpha}^{(H)\alpha}$. Poně-
vadž tenzor Θ_{α}^{ν} splňuje na základě rovnic (18) rovnice

$$\partial_{\nu} \Theta_{\alpha}^{\nu} = -\phi_{\alpha}^{(G)}, \quad (26)$$

můžeme rovnice (24) zapsat též ve tvaru podmínek

$$\partial_{\nu} (T_{\alpha}^{(H)\nu} + \Theta_{\alpha}^{\nu}) = 0$$

pro úplný tenzor energie a hybnosti naší soustavy (v uvažované aproximaci).

Na těchto důsledcích přibližných rovnic pole (18) a pohybových rovnic (23) není zatím nic nenormálního. Odpovídají plně tomu, s čím jsme se setkali v odst. VII 4 při teorii interakce hmotného prachu a skalárního mezického pole, a zdánlivě nepřesahují rámec speciální teorie relativity. Nyní si však ukážeme, že pohybové rovnice (23) mají pozoruhodnou vlastnost, která z tohoto rámce zřejmě vybočuje. Připomeňme si nejprve, že ve všech dosud vyšetřovaných případech relativistický invariantních pohybových rovnic hmotné částice jsme mohli předpokládat, že na světočarách skutečného pohybu je u čtyřrychlosti $U^{\nu} \equiv dx^{\nu}/d\tau$ splněna podmínka

$$\eta_{\alpha\beta} U^{\alpha} U^{\beta} = -c^2. \quad (27)$$

Mohli jsme tedy volit

$$d\tau = c^{-1} (-\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta})^{\frac{1}{2}}, \quad (27a)$$

což je v podstatě element *pseudoeuklidovského oblouku* světočáry hmotné částice. Rovnice (23) jsou v tomto ohledu výjimkou, neboť vztahy (27) popř. (27a) jsou s nimi v netriviálním případě $\psi_{\alpha\beta}(x) \neq 0$ v rozporu.

Abychom to dokázali, zavedeme symetrický tenzor

$$g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} - 2c^{-2} k^{\frac{1}{2}} \psi_{\alpha\beta} \quad (28)$$

a rovnice (23) zapíšeme ve tvaru

$$\frac{d}{d\tau} (g_{\alpha\beta} U^{\beta}) = \frac{1}{2} U^{\beta} U^{\nu} \partial_{\alpha} g_{\beta\nu}. \quad (29)$$

Provedeme-li derivaci naznačenou na levé straně, dostaneme

$$g_{\alpha\beta} dU^{\beta}/d\tau + U^{\beta} U^{\nu} \partial_{\nu} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} U^{\beta} U^{\nu} \partial_{\alpha} g_{\beta\nu}.$$

Nyní převedeme polovinu druhého členu z levé strany na pravou a násobíme celou rovnici činitelem $2U^{\alpha}$. Získáme tak rovnici

$$2g_{\alpha\beta} U^{\alpha} dU^{\beta}/d\tau + U^{\alpha} U^{\beta} d g_{\alpha\beta}/d\tau = 0,$$

čili

$$\frac{d}{d\tau} (g_{\alpha\beta} U^{\alpha} U^{\beta}) = 0.$$

Odtud vidíme, že výraz

$$g_{\alpha\beta} U^{\alpha} U^{\beta} = K \quad (30)$$

je prvním integrálem pohybových rovnic (23).

Všimněme si nyní možné fyzikální interpretace tohoto výsledku. Vidíme, že při $\psi_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ ($g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$) levá strana rovnice (30) souhlasí s levou stranou rovnice (27). Proto volíme integrační konstantu $K = -c^2$ a rovnici (30) upravíme takto:

$$d\tau = c^{-1} (-g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta})^{\frac{1}{2}}. \quad (30a)$$

Poněvadž při $\psi_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ vzorec (30a) souhlasí se vzorcem (27a), je nasnadě pokládat obecně veličinu $d\tau$ určenou vzorcem (30a) za vlastní čas hmotné částice v gravitačním poli. To znamená, že chod standardních hodin má záviset nejenom na rychlosti jejich pohybu, ale i na potenciálech gravitačního pole, v němž jsou uloženy. Tento vliv gravitačního pole byl v posledních letech experimentálně vskutku potvrzen. (Popis experimentů, jejich teorii a rozbor výsledků podává podrobně učebnice Kuchařova.)

V duchu a smyslu relativistického pojetí prostoru a času je nutno uvedenou interpretaci vzorce (30a) dále rozšířit v tom smyslu, že výraz

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (31)$$

udává zcela obecně čtverec prostoročasového intervalu dvou blízkých světobodů (x) a ($x + dx$). Gravitační potenciály musí tedy ovlivňovat nejen hodiny, ale i délková měřítka. V geometrické terminologii můžeme říci, že podle vzorců (28) a (31) gravitační pole určuje zároveň metriku prostoročasu: prostoročas se stává Riemannovým prostorem s metrickým tenzorem $g_{\alpha\beta}(x)$. Z toho je zřejmé, že uspokojivý výklad všech gravitačních jevů vyžaduje nejenom zásadní revizi fyzikálních pojmů speciální teorie relativity, ale i zobecnění jejího matematického aparátu (tenzory v křivém, Riemannově prostoru).

Podrobnější matematickou formulaci i fyzikální rozbor, zhodnocení a rozličné aplikace naznačeného přístupu k relativistické teorii gravitace lze nalézt v práci [63]. Zde jsme pro stručnost a přehlednost podali celou teorii ve formě značně zjednodušené.

2. ZÁKLADNÍ IDEJE EINSTEINOVY OBECNÉ TEORIE RELATIVITY A JEHO PŘÍSTUPU K TEORII GRAVITACE

Jak jsme již uvedli, Einstein, který první dospěl k teoreticky důsledné i empiricky vyhovující formulaci relativistické teorie gravitace, našel cestou popsanou v předchozím odstavci. Jeho přístup k problému gravitace byl v jistém smyslu právě opačný (z druhého konce). V jeho pojetí totiž *metrika prostoročasu určuje to, čemu ve fyzice říkáme gravitační pole*. Gravitace je pouze *projev metriky prostoročasu*.

Východiskem, z něhož Einstein dospěl k této své zcela originální a nikým jiným netušené koncepci, bylo jeho přesvědčení o platnosti tzv. *obecného principu relativity*. Tento princip v podstatě tvrdí, že nejenom inerciální referenční soustavy a s nimi spojené systémy pseudokartézských prostoročasových souřadnic, ale i *libovolné jiné systémy prostoročasových souřadnic jsou pro formulaci obecných fyzikálních zákonů zcela rovnocenné*. Einstein se inspiroval staršími idejemi Machovými a v přesvědčení o správnosti svého obecného principu relativity se nenechal mýlit existencí tzv. zdánlivých sil v neinerciálních soustavách. Původ těchto sil lze v rámci teorie Minkowského prostoročasu snadno vysvětlit a jejich zákony formulovat obecně invariantním způsobem.

Neinerciální systémy jsou vlastně systémy *křivočarých souřadnic v prostoročase* a v nich metrický tenzor pseudo-euklidovského prostoročasu už ovšem není konstantní. Vskutku, vyjdeme-li např. od Minkowského systému $\bar{S}$ souřadnic $\bar{x}^\mu$, v němž je čtverec intervalu ds^2 dán vztahem

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \quad (\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}),$$

a přejdeme-li k *libovolnému* systému S souřadnic x^μ transformací

$$x^\mu = x^\mu(\bar{x}), \quad \text{popř.} \quad \bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x), \quad (32)$$

dostaneme, že

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta$$

a

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial \bar{x}^\mu(x)}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{x}^\nu(x)}{\partial x^\beta} \cdot \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (32a)$$

Tvar funkční závislosti veličin $g_{\alpha\beta}(x)$ na souřadnicích x^μ dostatečně charakterizuje vztah systému S k inerciálním systémům a není proto divu, že pomocí těchto veličin lze vyjádřit i zdánlivé síly působící v systému S na hmotnou částici. (Obecně invariantní vzorec podává učebnice Kuchařova.)

Abychom měli teorii vyhovující Einsteinovu obecnému principu relativity, nesmíme ovšem být při určování přípustných funkcí $g_{\alpha\beta}(x)$ odkázáni na vzorec (32a). Potřebujeme obecně invariantní diferenciální rovnice, které funkce $g_{\alpha\beta}$ omezují stejně jako vzorec (32a), ale neobsahují žádné explicitě dané veličiny určující vztah systému S k inerciálním systémům. Teprve konkrétní řešení těchto rovnic bude takový vztah určovat.

Požadované rovnice lze vskutku nalézt. Mají tvar

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(g, \partial g, \partial\partial g) = 0. \quad (33)$$

Výrazy $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, *sestrojené jistým předepsaným způsobem ze složek metrického tenzoru a jeho prvních i druhých derivací podle souřadnic, jsou složky tzv. Riemannova tenzoru křivosti*. Jejich anulování vyjadřuje obecně invariantním způsobem, že prostor, jemuž přísluší metrický tenzor $g_{\alpha\beta}(x)$, je plochý a lze v něm proto zavést kartézský systém. Výrazy $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ jsou složité a nelineární.

Také *všecky ostatní obecné fyzikální zákony* (např. rovnice elektromagnetického pole nebo pohybové rovnice nabitých částic v elektromagnetickém poli) lze zapsat v obecně invariantním tvaru, v němž platí v libovolném systému S . V takových rovnicích ovšem vystupují explicitě i složky metrického tenzoru $g_{\alpha\beta}$ (a jejich derivace podle souřadnic x^μ) vyjadřující např. zdánlivé síly působící v systému S na hmotnou částici, nebo vlivy neinerciálnosti systému S na elektromagnetické jevy, ap.

Od obecně invariantní teorie zdánlivých sil k Einsteinově teorii gravitace vede druhý základní princip, tzv. *princip ekvivalence*. Ten zase v podstatě říká, že *gravitační síla působící na libovolnou hmotnou částici je lokálně nerozeznatelná od zdánlivé síly*. Einstein z toho usoudil, že i *gravitační pole je v libovolném systému plně určeno a popsáno* (zároveň s „polem zdánlivých sil“) *metrickým tenzorem prostoročasu* $g_{\alpha\beta}(x)$. Rozdíl mezi polem zdánlivých sil (např. v rotující soustavě) a pravým gravitačním polem je v tom, že v druhém případě *prostoročas není pseudo-euklidovský* (plochý). Jeho metrický tenzor už tedy nespĺňuje rovnice (33), nýbrž méně omezující soustavu rovnic. Einstein našel, že jako rovnice gravitačního pole ve vakuu vyhovují obecně invariantní rovnice

$$R_{\alpha\gamma} = 0, \quad (34)$$

jejichž levá strana vznikne obecně invariantním zúžením tenzoru $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ v druhém a čtvrtém indexu. Je zřejmé, že každé řešení rovnic (33) splňuje i Einsteinovy gravitační rovnice (34). Tyto rovnice však mají i řešení obecnější, např. řešení popisující gravitační pole bodové hmotné částice, nebo řešení popisující rozličné gravitační vlny. V prostoru spojitě vyplněném materií, již přísluší obecně kovariantní tenzor energie a hybnosti $T_{\alpha\gamma}$, mají rovnice gravitačního pole tvar

$$R_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}g_{\alpha\gamma}R = -8\pi c^{-4}kT_{\alpha\gamma}. \quad (35)$$

Výraz R je obecně invariantní stopa tenzoru $R_{\alpha\gamma}$ (tzv. Gaussova skalární křivost). Při $T_{\alpha\gamma} = 0$ plyne z rovnic (35) i $R = 0$ a rovnice se redukují na tvar (34). Z levé strany rovnic (35) lze oddělit kanonický tenzor energie a hybnosti gravitačního pole a rovnice zapsat ve speciálně relativistickém tvaru Guptaově [67].

Jako pohybové rovnice hmotné částice v gravitačním poli platí i v Einsteinově teorii beze změny rovnice (29), které v ní mají velmi přirozené zdůvodnění. Z geometrického hlediska totiž představují rovnice *geodetických světočar* (zobecnění po-

jmu nejkratší spojnice dvou bodů na křivé ploše). V pseudoeuklidovském prostoročase a pseudokartézském systému Σ přejdou rovnice (29) na rovnice $d\bar{U}^a/d\tau = 0$ a určují tedy přímé světočáry odpovídající pohybu volných hmotných bodů v inerciálním systému. Platnost rovnic (29) v neinerciálních systémech (v poli zdánlivých sil) je proto samozřejmá. V pravém gravitačním poli lze pak na jejich platnost soudit z principu ekvivalence nebo z toho, že geodetická čára je přirozeným zobecněním pojmu přímky pro křivý, riemannovský prostor.

Z podané stručné charakteristiky Einsteinovy obecné teorie relativity a jeho teorie gravitace je snad patrné, že logická stavba a pojmová struktura této teorie je poměrně jednoduchá. To však už nelze říci o jejím matematickém vyjádření a její prakticko-fyzikální interpretaci. Základní rovnice teorie jsou vesměs složité (tvoří soustavu nelineárních parciálních diferenciálních rovnic) a jejich řešení je proto obtížné. Kromě toho vztah těchto řešení (tj. matematicky vyjádřených předpovědí teorie) k fyzikální zkušenosti (tj. k výsledkům měření prováděných použitím délkových měřitek, hodin, dalekohledů, spektrografů, setrvačnickových kompasů atp.) nijak není bezprostřední a evidentní. Z těchto důvodů je k zvládnutí uvažovaných partií Einsteinovy teorie relativity zapotřebí podrobného výkladu a pečlivého fyzikálního rozboru, jaký podává např. Kuchařova učebnice „Základy obecné teorie relativity“.

3. PROSTOROČAS A DNEŠNÍ FYZIKA

Einsteinova obecná teorie relativity (uveřejněná v roce 1916 v práci [69]) měla tak skvělý úspěch, že stoupence speciálně relativistické teorie gravitace zcela odzbrojila a další výzkum v tomto směru na čtyřicet let zastavila. Tendence teoretické fyziky k zobecňování nových idejí a k unifikaci základních představ se přirozeně projevila tím, že Einsteinova geometrická interpretace gravitačního pole dala podnět k pokusům o podobný, geometrický výklad elektromagnetického pole i ostatních polí. Konečným cílem se stala *unitární*, čistě geometrická *teorie* veškerého materiálního světa. Musíme však říci, že úsilí řady vynikajících matematiků a fyziků (i samotného Einsteina, který se tímto problémem zabýval až do konce svého života) nevedlo k přesvědčivému kladnému výsledku. A s rozvojem fyziky elementárních částic, která odhaluje stále složitější strukturu matérie, se vyhlídky na unitární, geometrickou teorii zjevně zhoršují.

Někteří fyzikové, např. Fok, Møller, Rosenfeld i jiní, jsou toho názoru, že zvláštní povaha gravitačního pole, odlišná od povahy druhých, materiálních polí, není z teoretického hlediska na závadu. Soudí také, že gravitační pole na rozdíl od ostatních nemusí být polem kvantovaným a že dosud hypotetické gravitony, obdobné fotonům, vůbec nemusí existovat. V takovém případě by asi gravitace měla pro fyziku elementárních částic definitivně podružný význam a zůstala by jevem důležitým jen z makroskopického (kosmického) hlediska.

Gravitačnímu poli však přísluší energie a podobné vlastnosti charakteristické pro materii. Proto jiní fyzikové soudí, že gravitační pole stejně jako ostatní pole má materiální povahu a je kvantováno. Ukazují rovněž, že gravitony mají v systému elementárních částic stejně přirozené místo a význačné postavení jako fotony. Tyto názory jsou podepřeny úspěchy speciálně relativistické teorie kvantovaných polí při popisu elementárních částic a jejich interakcí; v padesátých letech vedly k obnovení starých pokusů o formulaci zákonů gravitace v rámci běžné teorie polí. V odst. 1,3 jsme se již seznámili s výsledky tohoto badání, které vedlo k zásadně novému odvození Einsteinových nelineárních a obecně invariantních rovnic gravitačního pole. Rovnice jsou tedy stejné jako v Einsteinově teorii, ale jejich zdůvodnění je jiné. Problém kvantování tenzorového pole popsaného takovými složitými rovnicemi je však velmi obtížný a jeho uspokojivé řešení se dosud nepodařilo. Přehled o dnešním stavu tohoto problému a o významu tohoto pojetí gravitace podává např. Kibble [70].

Někteří fyzikové pracující v teorii elementárních částic došli k názoru, že pojem prostoročasového kontinua a pojem pole nejsou ani nutným ani vhodným jejím základem a že mají pouze „makroskopický“ význam [71]. Z historického hlediska je zajímavé, že na takovou možnost (že by pojem prostoročasu mohl mít jen „makroskopický“ smysl, podobně jako např. pojem teploty, a že jeho používání při popisu světa elementárních částic by mohlo být nepřipustnou extrapolací) poukazyval Einstein už v roce 1921 ve své proslulé přednášce Geometrie a zkušenost [72]. Podobné obavy vyjádřil v tomtéž roce i Pauli v závěru svého referátu v Encyklopedii matematických věd [58]. Empiricky se ovšem pseudoeuklidovské nebo riemannovské prostoročasové *kontinuum* vskutku nedá ověřit, protože nemůžeme provádět *přímá* prostorová a časová měření v *libovolně malých* oblastech. O možných metodách *nepřímého* zkoumání vlastností *extrémně malých* prostoročasových oblastí pojednává např. Blochincevův článek v UFN [30]. Problém, čím v mikrofyzice nahradit popis založený na představě prostoročasového kontinua a pole není ovšem jednoduchý. V posledních letech se zkoumá a používá při popisu elementárních částic a jejich interakcí matematická metoda, tzv. teorie matice S , která pojmu prostoročasového kontinua a pole zjevně nepoužívá. Zatím však není prokázáno, že je na nich logicky zcela nezávislá.

Otázky vztahu teorie prostoročasu (a gravitace) k teorii elementárních částic patří k nejzajímavějším problémům v dnešní teoretické fyzice. Nelze vyloučit (a dokonce se může očekávat), že jejich vyjasnění způsobí ve fyzice podobný převrat (a přinese i podobný pokrok) jako vytvoření teorie relativity a teorie kvant.