

Pozor.

(t, x, y, z)

(t, x, y, z)

STR (18)

• sk. souč. $\eta_{\alpha\beta} V^\alpha U^\beta = V_\alpha U^\alpha = V^\alpha U_\alpha = \eta^{\alpha\beta} V_\alpha U_\beta$

• Pro kontrav. $T \equiv T^\alpha{}_\alpha = \eta_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = T_\alpha{}^\alpha = \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$

• Vnitřní součin je komutativní $\rightarrow$ ~~redukci~~ v pradi

$$\eta_{\alpha\beta} V^\alpha U^\beta = V^\alpha \eta_{\alpha\beta} U^\beta = V^\alpha U^\beta \eta_{\alpha\beta} = U_\alpha V^\alpha = \dots$$

• Form. gradient! sice je kontinuum. tenzor, ALE!
 $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} V^\beta \right) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} V^\beta + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\beta} = \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} V^\beta + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\beta} \end{aligned}$$

$\text{pat} = 0$

$\rightarrow$ člověk se jaro Robert Pouze více lineární transf.

• Metn. tenzor ve sférických souř.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 \rightarrow$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad dV = \sqrt{\det g_{\mu\nu}} \, dr d\theta d\varphi dt$$

$$\left(g_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta} \right)$$

• u metrického tenzor (je symetrický) $\leftrightarrow$ index v libovolném pořadí (obecně neplatí)

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$$

$S_{\mu\nu} \quad A_{\mu\nu}$

Vnitřní součin $S^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0$

• $\rightarrow$ číslo $A_{\mu\nu}$: $\eta_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} = 0 \rightarrow$ stopa je 0 (vše na diagonále je 0)

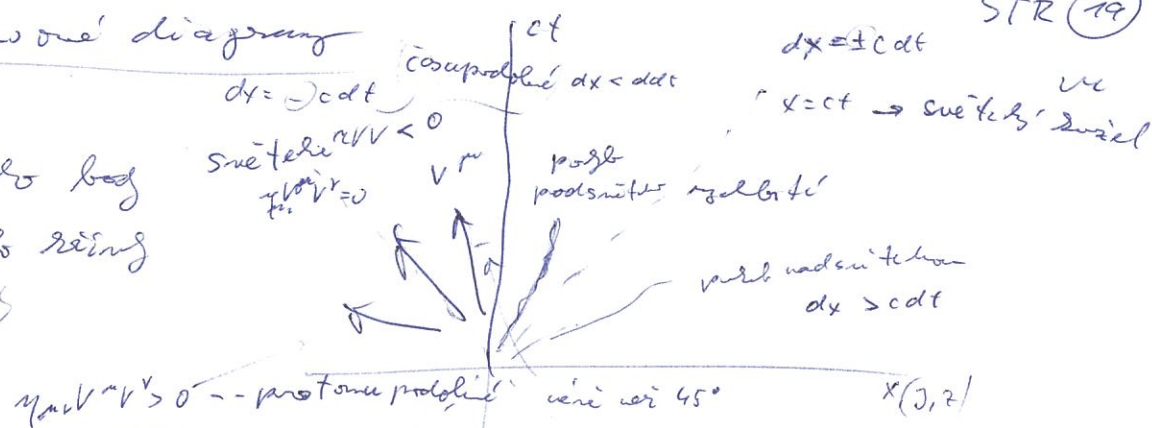
$\rightarrow$ základní invariant $A^{\mu\nu}$ není stopa, ale modul!

$A^{\mu\nu} A_{\mu\nu}$
 $\rightarrow$ Vše platí i pro matice

Prostorová diagram

STR (19)

události jako body
světelný jako řádky
plochy to plochy

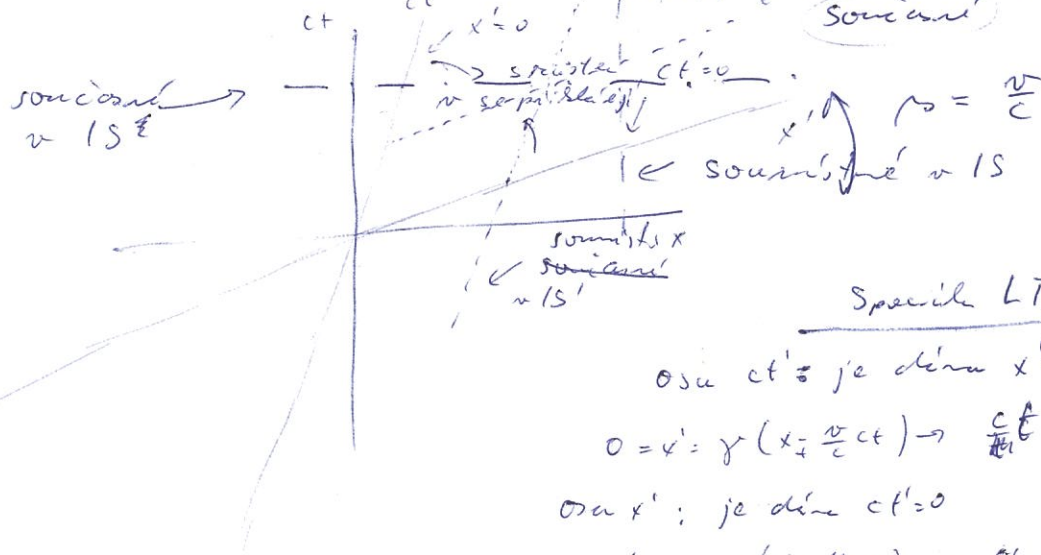


Podobně u plochy - světelný žvazek
alebo jedné teiny $\rightarrow$ je
sítkovější podle rovnice $\leftrightarrow$ naopak nejteiny

Spec. případ je prostorový interval uveď 2 události

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq \left| \frac{dl}{dt} \right|$$

schůzka v x' IS'
 souhlasí



Speciální LT

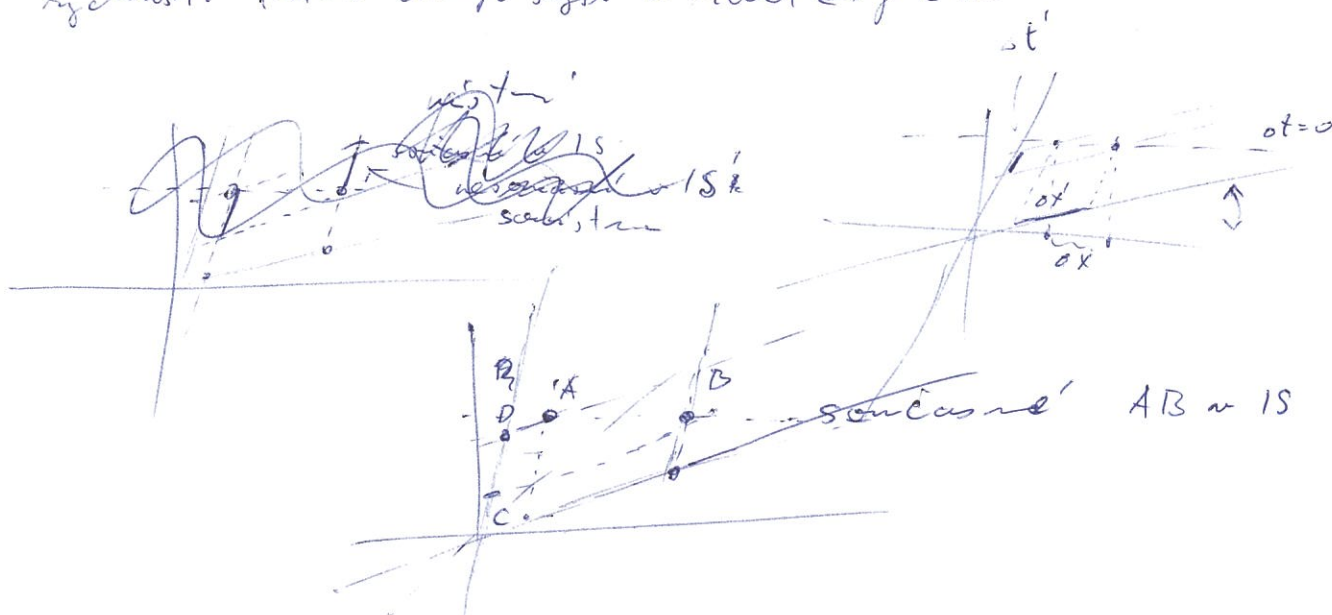
osa ct' je dána $x' = 0$

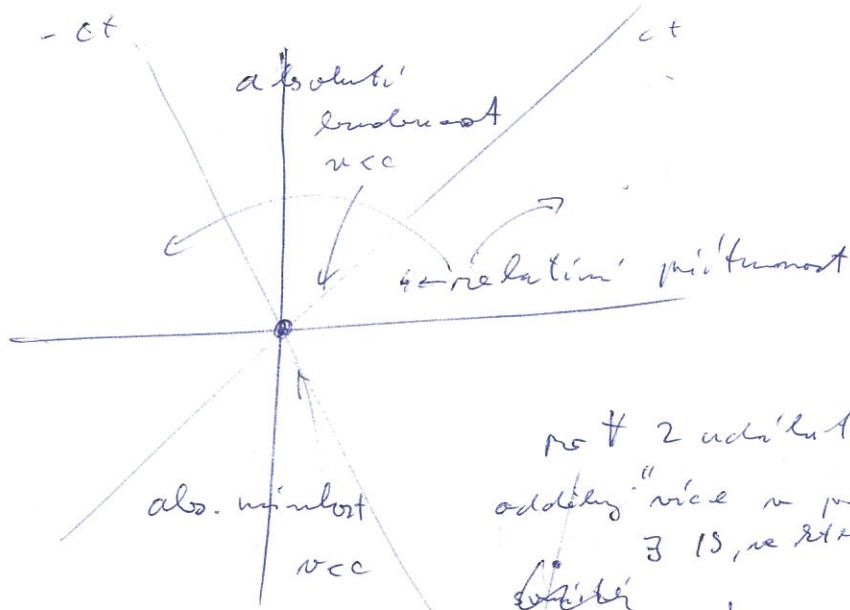
$$0 = x' = \gamma \left(x - \frac{v}{c} ct \right) \rightarrow \frac{ct}{x} = \pm \frac{c}{v}$$

osa x' je dána $ct' = 0$

$$ct' = 0 = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right) \rightarrow ct = \pm \frac{v}{c} x$$

rychlosti $|v| > c$ nemá smysl uvažovat $\leftrightarrow \gamma \in \text{Im}$





ne 2 udalosti, štene je
 oddaljenost "vise v prostoru ali v času"
 3 IS, ne štene je sferična

a analog ; 2 udalosti
 "vise v času ali v prostoru"
 3 IS, ne štene je sferična

$$ds^2 = -c^2 dt^2$$

$$ds^2 = dl_0^2$$

ještě :

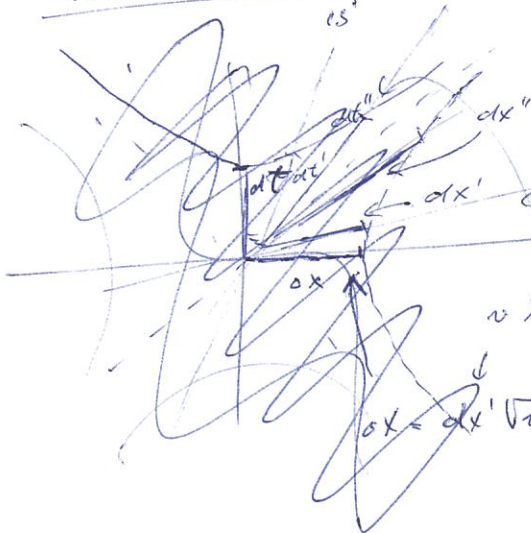
Λ^{μ}_{ν} ... rotace

Kontrakce a dilatace ale nejsou lining povrhu
 projekci. Pri transformaci se nejen vzdalujeji' cos,
 ale i deformuji' jednotky paralel nich -> je triche
 "invariantni" uvisu. $\int ds^2 = konst.$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = konst.$$

$$dx = \sqrt{konst. + c^2 dt^2}$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 = \pm 1 \pm 1$$



vzhledu v IS'

$$-konst. = -c^2 dt^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$$

$$c dt = \sqrt{konst. + dx^2}$$

$$dx = dx' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Skalare
ergibt

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \rightarrow \sin(ix) = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2i} = i \frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \sinh x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \rightarrow \cos(ix) = \frac{e^{-x} + e^{+x}}{2} = \cosh x$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$$

$$\sin(ix+y) = i \sinh(x+y) = i \sinh x \cdot \cosh y + i \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cos(ix+y) = \cosh x \cdot \cosh y - (i i) \sinh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \frac{\sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y}{\cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y} = \frac{\frac{1}{\cosh x} \cdot \cosh y}{\frac{1}{\cosh x} \cdot \cosh y + \frac{\sinh x}{\cosh x} \cdot \sinh y}$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ +\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$V = \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{v}{c}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \gamma \rightarrow \frac{\frac{d\varphi}{d\tau}}{\frac{d\tau}{dt}} = \beta$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{c} \rightarrow \boxed{\tanh \varphi = \frac{v}{c}}$$

$$V = \frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \leftrightarrow \frac{V}{c} = \frac{\frac{u}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{u}{c} \cdot \frac{v}{c}} = \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tanh \varphi_1 + \tanh \varphi_2}{1 + \tanh \varphi_1 \cdot \tanh \varphi_2}$$

$\text{Det } |\Lambda^\mu_\nu| = 1 \rightarrow \text{"rotation"}$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$\rightarrow \det R_z(\varphi) = 1$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det |\Lambda| = \gamma^2 + \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (1 + \beta^2) = 1$$

$\gamma \leftrightarrow \cosh x$
 $-\gamma\beta \leftrightarrow \sinh x$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ al $\cosh x = \gamma$
 $\sinh x = \gamma\beta$ $\beta = \tanh x$

$$\begin{pmatrix} \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \rightarrow \sin(ix) = i \sinh x$$

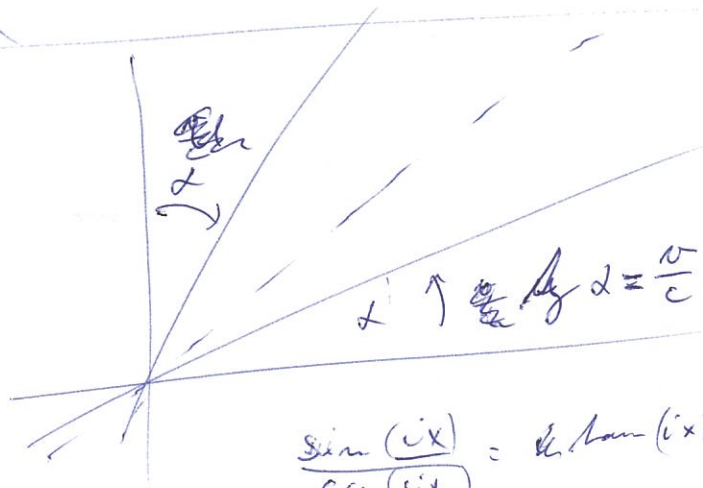
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow \cos(x) = \cosh(ix)$$

• "imaginary" wheel

$$\frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x = \frac{v}{c} = \beta$$

$$u = \text{arctanh } \beta \text{ - "rapidity"}$$

$$\tanh \beta = \frac{v}{c}$$

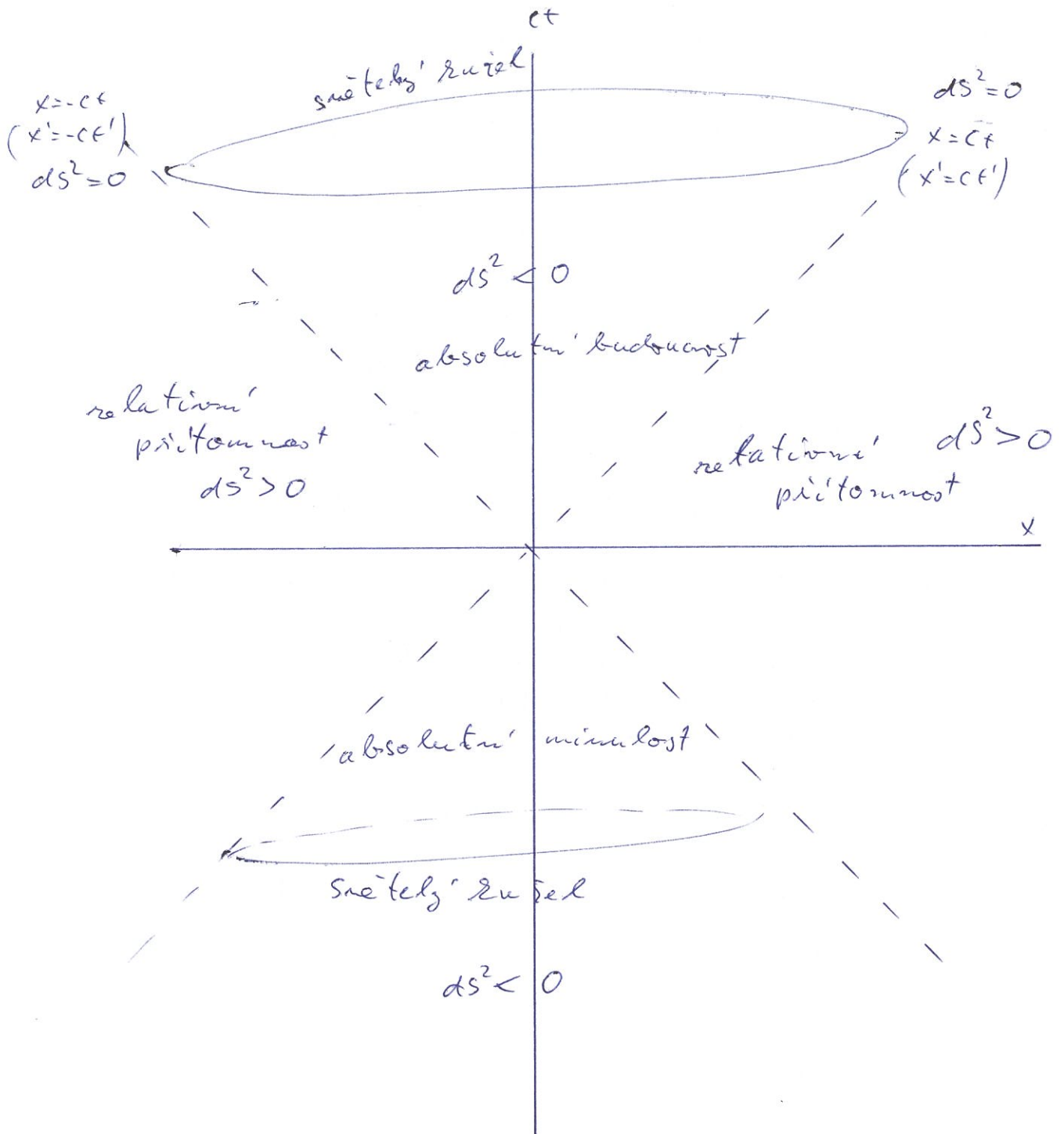


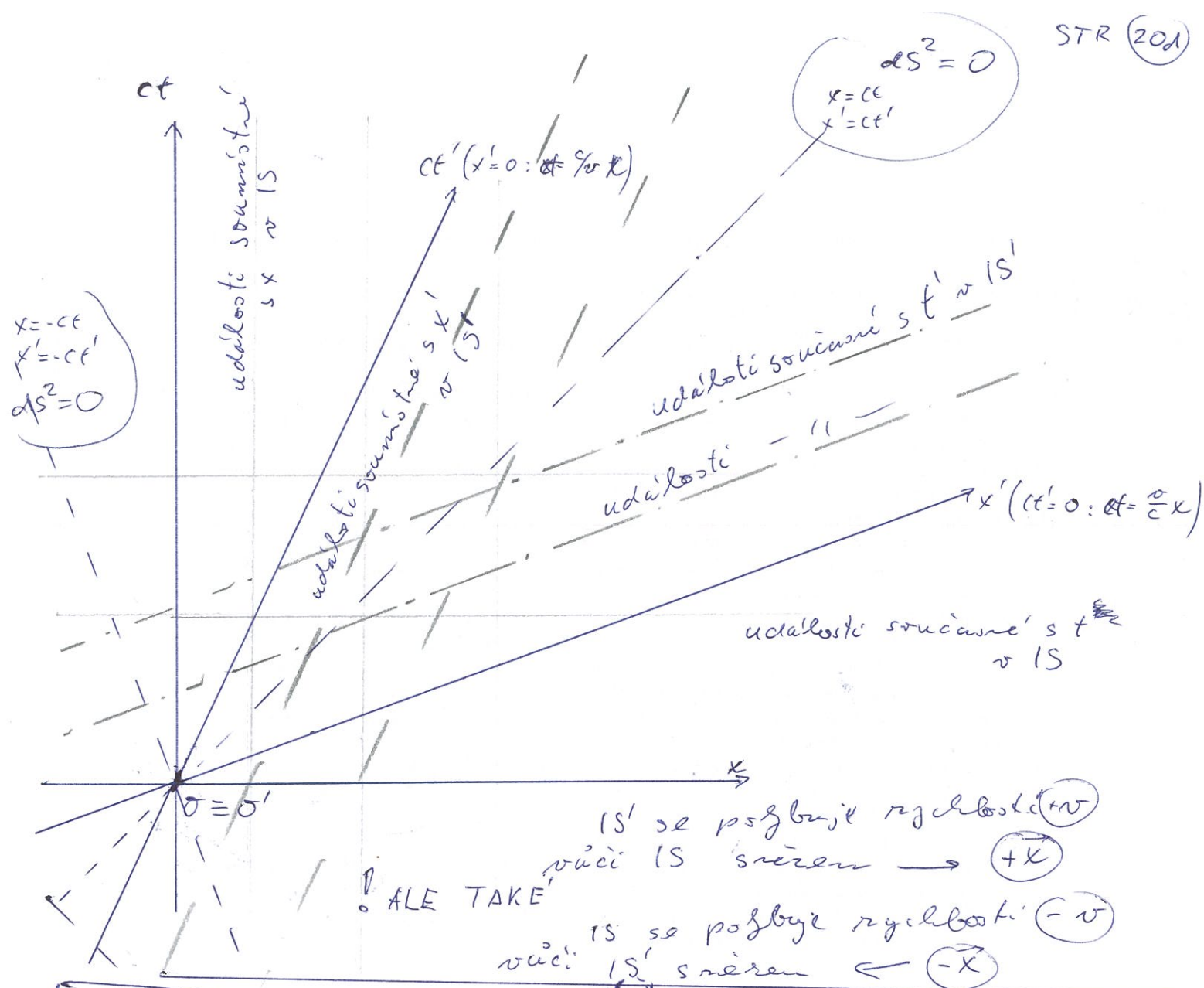
$$\frac{\sin(ix)}{\cos(ix)} = \tanh(ix) = i \tanh x$$

$$\tanh(u_1 + u_2) = \frac{\tanh u_1 \pm \tanh u_2}{1 \pm \tanh u_1 \cdot \tanh u_2} = \frac{V}{c} = \frac{\frac{v_1}{c} \pm \frac{u'}{c}}{1 \pm \frac{v_1 \cdot u'}{c^2}}$$

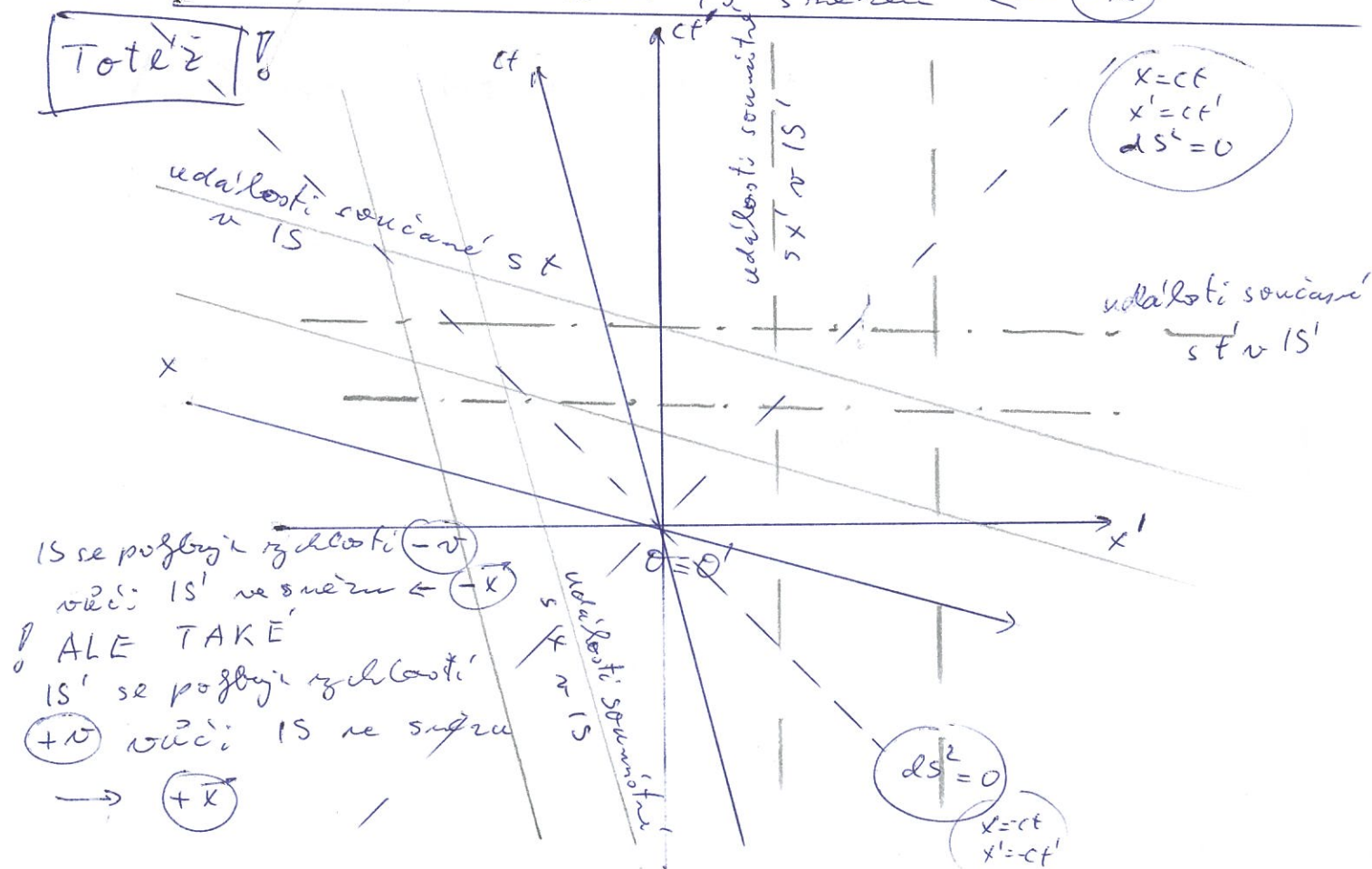
Prostor-časové diagramy

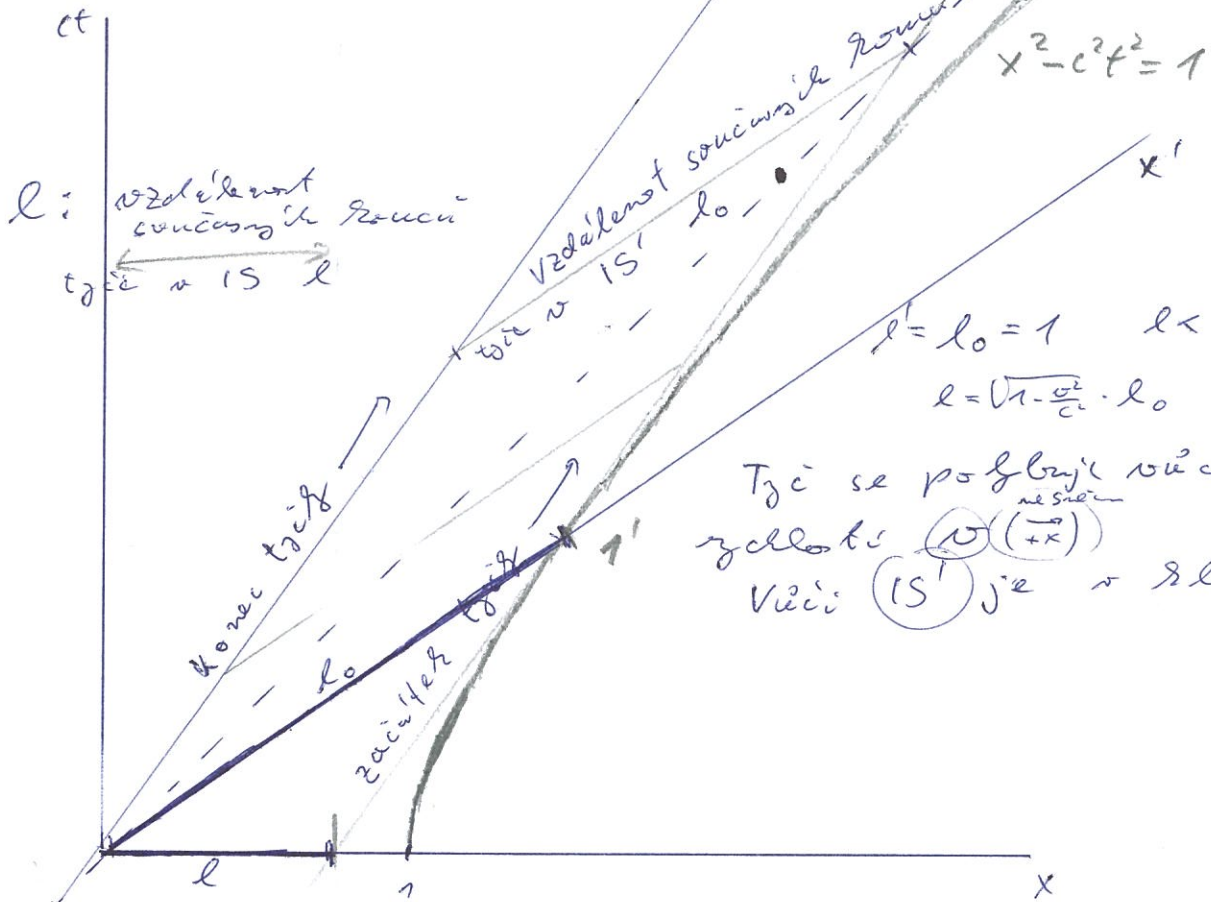
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$





Totéž!



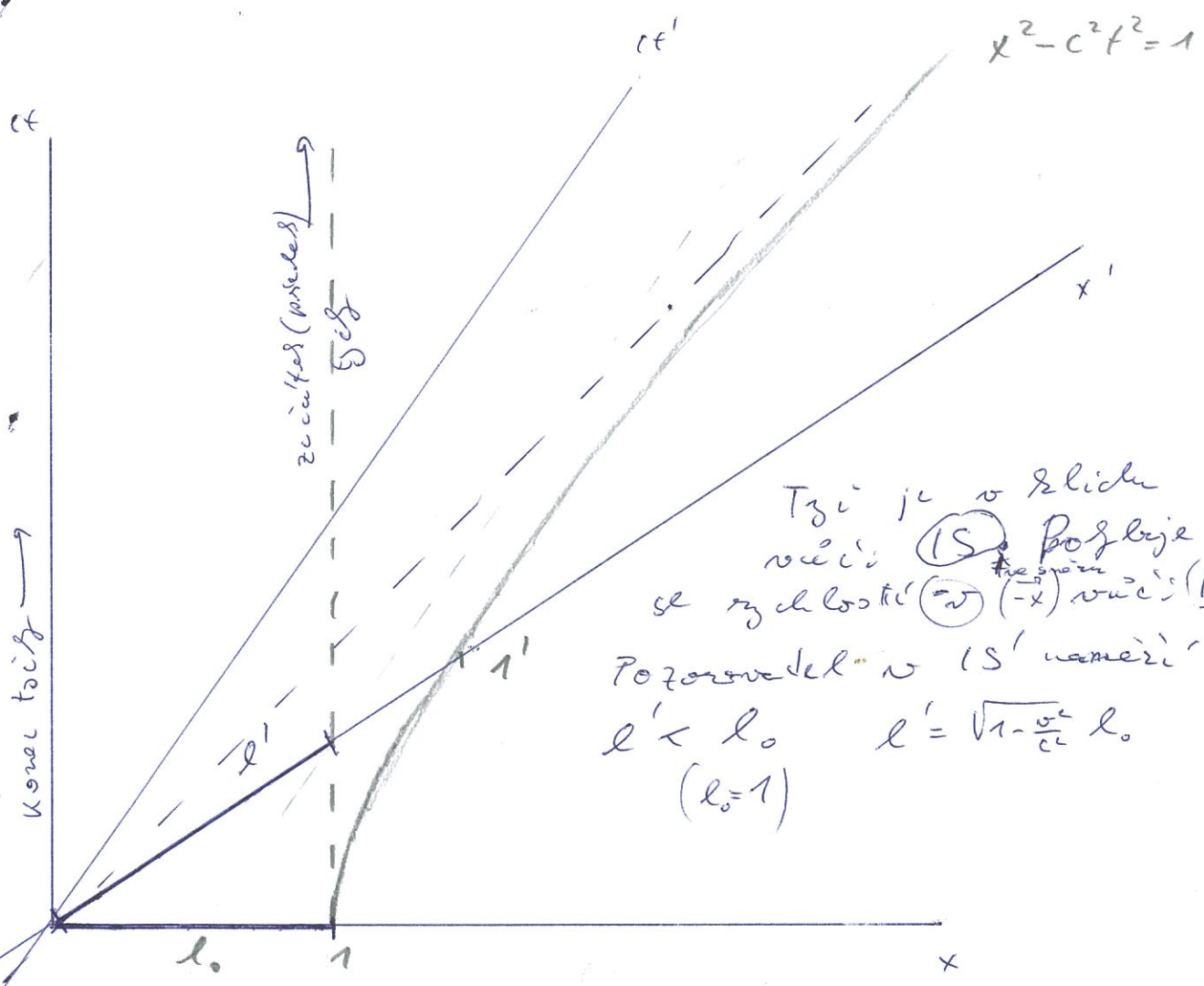


l : vzdálenost současných konců
 t_0 je v IS l

$$l' = l_0 = 1 \quad l < l_0$$

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot l_0$$

Tyč se pohybuje vůči (IS)
 rychlostí v (nešlema)
 vůči (IS') je v klidu.



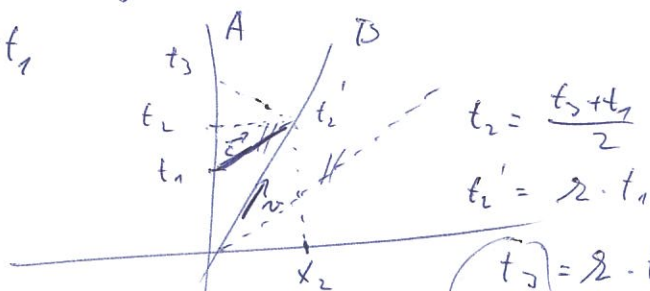
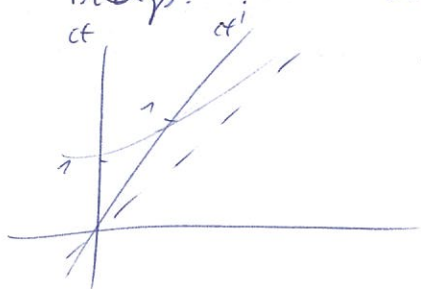
Konec tyče

zváčkový (přesek)
 tyče

Tyč je v klidu
 vůči (IS) . Pohybuje
 se rychlostí v vůči (IS')
 Pozorovatel v IS' naměří
 $l' < l_0$ $l' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_0$
 $(l_0 = 1)$

cf

$$\otimes t'_2 = \otimes t_1$$



$$t_D = \lambda \cdot t_c$$

$$= \lambda^2 t_1$$

Wählen wir x_2 unter t_2 : $x_2 = v \cdot t_2$

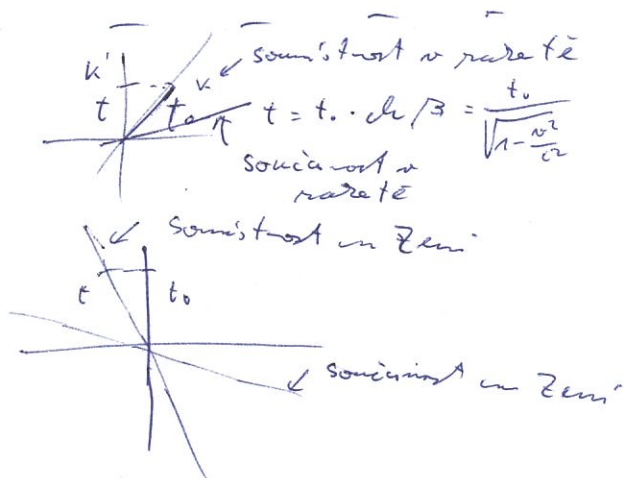
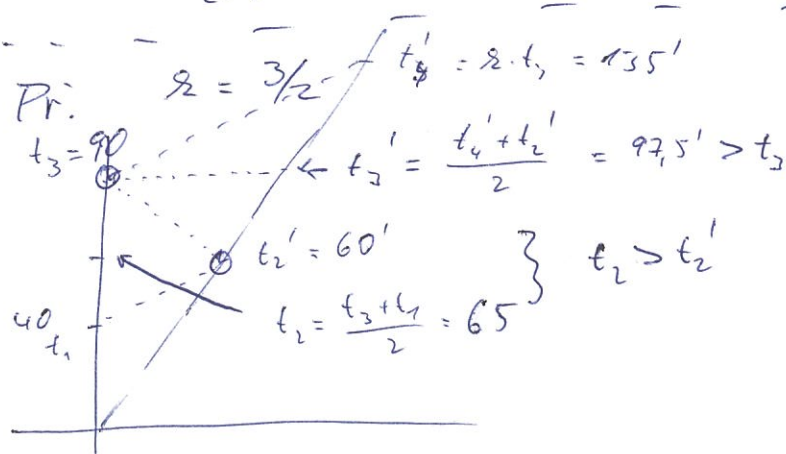
Smallest "possible" (strict) polynomial $\rightarrow$ variable x_1

vorher zu dem: $c \frac{t_2 - t_1}{2} (= x_2) \quad c \frac{t_2 - t_1}{2} = v \cdot \frac{t_2 + t_1}{2} \rightarrow$

$$\frac{c(b^2 - 1)}{2} = \frac{v(b^2 + 1)}{2} \rightarrow b = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Podle pozorovatele A začal B signál v čase $t_2 = \frac{t_1 + t_1'}{2} =$
 $= \frac{1 + 2t_1}{2}$; v okamžiku přijím signálu uvažoval rychlost
 pozorovatele B čas $t_2' = 2t_1$ a tento údaj mohl být uve-
 den v signálu, kt. se vrátil k pozorovateli A. Ten

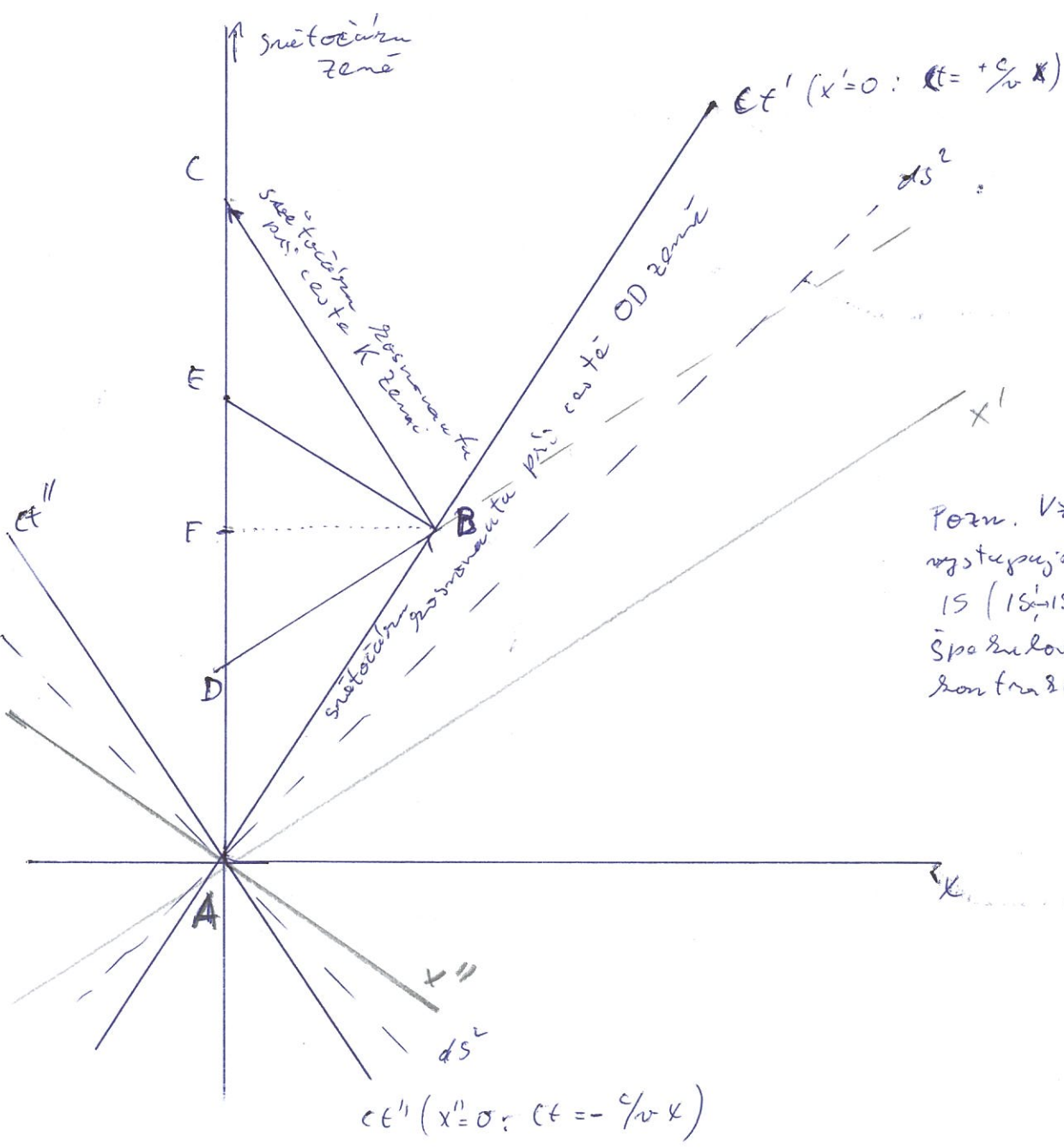
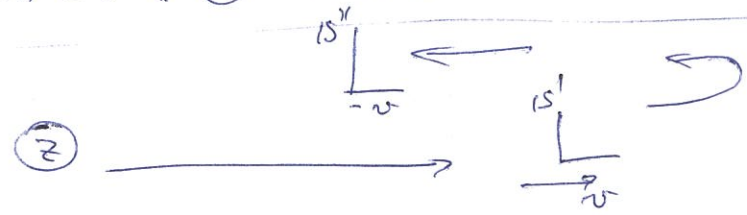
dem v signaturu, zt. se vztah $t_2' = \frac{t_2}{\gamma}$ bude
 může posuvovat $\frac{t_2'}{t_2} = \frac{2t_1}{\frac{1+\beta^2}{2}t_1} = \frac{2\beta}{1+\beta^2} = \frac{2\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}{1+\frac{c+v}{c-v}} =$
 $= \frac{\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}{\frac{c}{c-v}} = \sqrt{\frac{(c+v)(c-v)^2}{(c-v)^2 c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow t_2 = \frac{t_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$



Paradox dvojčat

Kosmonaut se pohybuje vůči Zemi nejprve ve směru $(+\vec{x})$ rychlosti $+v$. V místě B se otočí (s o zrychlením), letí ve směru $(-\vec{x})$ rychlosti $-v$, vrátí se na Zemi. Jeho hodiny by měly ukazovat j. řád méně: $\Delta t_k = \frac{\Delta t_z}{\gamma}$. ALE Země se vůči kosmonautovi pohybuje nejprve ve směru $-\vec{x}$ rychlosti $-v$, poté ve směru $+\vec{x}$ rychlosti $+v$, a vůči kosmonautovi by měly jít pozemské hodiny $\gamma \times$ pomaleji: $\Delta t_z = \frac{\Delta t_k}{\gamma}$. Co je správné?

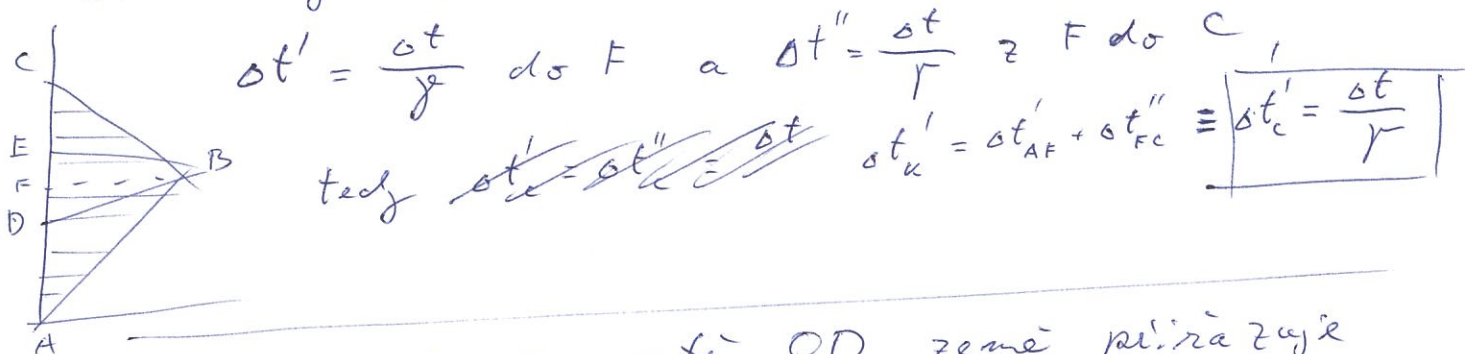
Diagram: ① směrnice ct' je (směrnice ct'' // ② DB je rovnoležná s x' : DB // x' // ③ BC // ct'' // ④ EB // x''



Pozn. Vzdálenost vystupující POUZE v jedné IS ($IS \rightarrow IS'$) Ne-říceme špežkovat nad kontrakcí délky!

① Pozemský pozorovatel přiznává podél ~~kolony~~ vodorovných přímek kosmiontovu události.

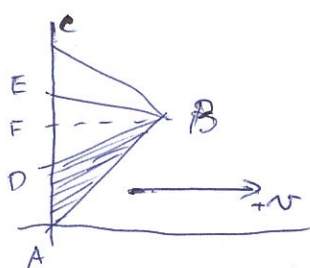
STR 22 B



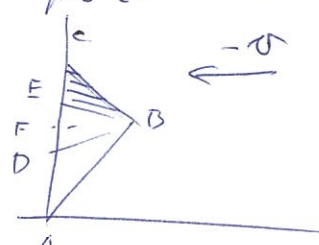
$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} \text{ do F a } \Delta t'' = \frac{\Delta t}{\gamma} \text{ z F do C}$$

$$\Delta t'_x = \Delta t''_x = \Delta t \quad \Delta t'_x = \Delta t'_{AF} + \Delta t'_{FC} \equiv \Delta t'_x = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

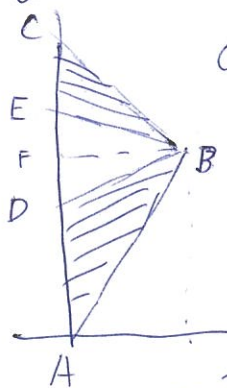
② Kosmonaut při cestě OD země přiznává události na zemi pouze do D



Po otočce přiznává pozemské události A až od E.



Události DB jsou pro IS' kosmonauta současné. Po urovnění hvězdice otočce jsou události BE pro kosmonauta současné z hlediska IS'. Dobromedý: kosmonaut může přiznat pozemské události pouze od A do D a pak až od E do C. O událostech D až E na zemi není vůbec nic.



Jako současnost s událostmi na zemi se shodem zřetří. → tento čas je třeba započítat. z LT $\Delta t_{ED} = 2t_{DF} = 2t_{FE} =$

$$= 2\gamma \left(\Delta t'_{DB} + \frac{v}{c^2} x'_{DB} \right) = \underbrace{2\gamma \left(\Delta t''_{BE} + \frac{v}{c^2} x''_{BE} \right)}_{t_{FE}}$$

víme, že $\Delta t'_{DB} = \Delta t''_{BE} = 0$; Lorentz. transf je inverzní

(z $x', t' \rightarrow x, t$), proto $\oplus$. Celkem tedy $x'_{DB} = x''_{BE}$ je vzdálenost země za polovinu doč je to rykletu, $t'_j = \frac{1}{2} v \Delta t'_c$

$$\Delta t'_c = \Delta t = \frac{\Delta t'_c}{\gamma} + \Delta t_{DE} = \frac{\Delta t'_c}{\gamma} + 2\gamma \frac{v}{c^2} \cdot \Delta t'_c \cdot v = \frac{\Delta t'_c}{\gamma} \left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma \Delta t'_c$$

v IS zemi

$$\left[\text{Tedy } \Delta t'_c = \frac{\Delta t}{\gamma} \right] = \gamma \Delta t'_c$$