

Kapitola 3

Analytická mechanika

3-ANAL.tex; 10. pracovní verze, 2010-05-15. Uvítám všechny kritické připomínky. J.O.

3.1 Plán; pojem principu

3.1.1 Co, proč a jak

Cílem analytické mechaniky je vytvořit jiný, obecnější přístup k řešení fyzikálních problémů, než poskytuje „syntetická“ newtonovská¹ mechanika. Ta postupovala od hmotných bodů („od toho nejmenšího“), z nichž sestavila složitější soustavy. My nyní chceme pohlížet na fyzikální soustavu jako na celek a řešit úlohy z obecnějšího pohledu, na základě vhodných **principů**, které nastoupí namísto pohybových rovnic. Doufáme mj., že takový princip, dostatečně obecně formulovaný, bude jednodušeji použitelný ve složitějších případech, případně i za hranicemi klasické mechaniky. Z té ovšem vyjdeme, protože nám skýtá spolehlivý základ pro výstavbu jakékoli obecnější konstrukce.

3.1.2 Příklad z optiky

Společný problém Světlo má ve vakuu *světelnou rychlost* c_0 , v látce (= hmotném prostředí) rychlost c , kde n je materiálová konstanta (*index lomu*). Jak se pohybuje světlo mezi body A a B?

Popis newtonovský (geometrickou optikou) Zavedeme „foton“² coby „částičku světla“, takže světelný paprsek bude jeho trajektorií. Pohyb tohoto „fotonu“ popíšeme podobně jako pohyb hmotného bodu z Newtonových rovnic, tedy:

- V homogenním izotropním prostředí letí „foton“ rovnoměrně přímočaře.
- Na rozhraní dvou prostředí se některý „foton“ odráží, některý vnikne dovnitř prostředí.
- Pro odražený „foton“ platí $\alpha'_1 = \alpha_1$.
- Pro „foton“ vnikající do prostředí platí $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$.

Popis principem Z optiky známý Fermatův princip říká ve své zjednodušené formě toto:

Fermatův princip: *Světlo se pohybuje mezi dvěma danými body A, B tak, aby celková doba, kterou na tento pohyb potřebuje, byla minimální.*

Tento princip tedy bere trajektorii světla jako celek a vypovídá o ní jako o celku. Snadno z něj vyplyne např. přímočaré šíření světla v homogenním prostředí, stejně jako pravidla lomu a odrazu

¹Je na místě rozlišit *Newtonovu* mechaniku, tj. skutečné, historicky věrné Newtonovy formulace a ideje, a *newtonovskou* mechaniku, tj. pojetí, které se z těchto idejí vyvinulo jistým směrem v dalším rozvoji.

²Ten je zcela klasický a nemá v sobě samozřejmě nic kvantového. Pro odlišení ho proto píšeme v uvozovkách.

světla. Je ale určitě názornější pro určení ohybu trajektorie světla v nehomogenním prostředí (např. ve vzduchu s proměnnou hustotou) než geometrická optika.

3.1.3 Troška filosofie

Jak Fermatův princip, tak geometrická optika vedou (různými cestami) ke stejným výsledkům; příslušný důkaz však nyní není podstatný. Podstatné je uvědomit si *rozdílnost obou přístupů*. Rozdíl je i filosofický: popis podle geometrické optiky je plně kauzální (příčinný), zatímco popis Fermatovým principem je teleologický (účelový).

V geometrické optice se „foton“ v každém okamžiku může poradit s výše uvedenými čtyřmi pravidly, jak a kam se má pohybovat v dalším okamžiku. Nepotřebuje plánovat, nepotřebuje mít paměť: jeho bezprostřední budoucnost je určena přítomným stavem jednak „fotonu“, jednak jeho bezprostředního okolí. „Foton“ je současnými okolnostmi donucen jednat tak, jak jedná,

Naproti tomu podle Fermatova principu se „foton“ pohybuje tak, aby konečkoncům splnil jistý globální požadavek, účel, cíl: mít co nejmenší celkovou dobu letu za dodržení podmínky $v = c_0/n$ v každém okamžiku a místě letu. Jak zákon přímočarého letu v homogenním prostředí, tak i zákon odrazu a zákon lomu na rozhraní už z Fermatova principu) vyplynou. Připomeňme, že účelový, teleologický popis a zdůvodnění je běžný třeba v biologii: zvíře plánuje a jedná globálně tak, aby... (ukojilo hlad, uniklo nebezpečí apod.)

Tyto filosofické rozdíly nás sice nebudou moc zajímat, je ale dobře o nich vědět. V klasické fyzice s její plnou určeností (determinismem) nevedou ke sporu; objektům klasické fyziky nepřisuzujeme svobodnou vůli (resp. nezkoumáme pojem „vůle“ metodami fyziky).

3.1.4 Proč tedy tuto novotu?

1. Pomocí principů se některé úlohy řeší názorněji.
2. V případě potřeby můžeme řešit úlohy kvalitativně a nejen kvantitativně.
3. Můžeme hledat přibližná řešení, tedy řešení na jisté (jednoduché) třídě funkcí, do níž přesné řešení eventuálně nepatří.

Ilustrace Uvažme situaci s indexem lomu vzduchu závislým na nadmořské výšce.

Ad 2) Máte určit tvar cesty v nehomogenním prostředí. Z Fermatova principu je (kvalitativně) ihned jasné, že z řidšího vzduchu ve výšce do hustnějšího vzduchu níže se světlo (i zvuk) budou pohybovat po trajektorii konvexní (a), nikoli konkávní (b) či přímé (c). Důkaz tohoto odhadu geometrickou optikou je jistě možný, ale určitě složitější, a tím i méně názorný.

Ad 3) Máme k tomu dodat ilustrativní obrázek do knížky, kde však jednoduchý grafický program umí kreslit jen kruhové oblouky. Na této třídě najdeme Fermatovým principem oblouk minimalizující danou veličinu (dobu). Naproti dosazování do rovnic geometrické optiky by nás nanejvýš přesvědčilo o tom, že žádný oblouk není přesným řešením úlohy (což jsme věděli už předem taky).

3.2 Rekapitulace vektorové mechaniky

Všude budeme předpokládat analytické funkce s potřebným počtem derivací.

3.2.1 Základní pojmy ve vektorové mechanice

Ve vektorové mechanice (zvané též newtonovská) jsme sledovali v čase t nejprve jedinou částici (hmotný bod, HB) s časově neproměnnou hmotností m a s časově proměnnou polohou

$$\vec{r}(t) \equiv \mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad (3.1)$$

zadanou kartézskými souřadnicemi x, y, z v inerciální vztažné soustavě (1. NZ). Pokud se částice nacházela pod vlivem vnějších³ sil s výslednicí $\mathbf{F}$, pak její pohyb byl popsán pohybovou rovnicí (2. NZ)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} . \quad (3.2)$$

³U částice samozřejmě nepřicházejí v úvahu vnitřní síly; z hlediska částice jsou všechny síly vnější. Připomínáme to však vzhledem k následujícímu zobecnění na soustavu částic.

Ta představuje pro jedinou částici systém tří obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu pro tři neznámé funkce $\vec{r}(t) \equiv (x, y, z)$ s počátečními podmínkami (počátečním stavem) – známou polohou $\vec{r}_0$ a rychlostí $\vec{v}_0$ v čase $t = 0$.

Pro počáteční hodnotu se užívají zápisy např.

$$\vec{r}_0 \equiv \mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}(0) \equiv \mathbf{r}(t=0) \equiv \mathbf{r}|_{t=0} \text{ aj.}$$

Konfigurace jediné částice v daném okamžiku t je určena její polohou $\mathbf{r}(t)$, tedy např. trojicí x, y, z v tomto okamžiku.

♣ Názorně řečeno: konfigurace je to, co poznáme z fotografie.

Stav částice v daném okamžiku t je určen její polohou a rychlostí, tedy $\{\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)\}$.

♣ Stav určuje víc než jen konfigurace. Názorně řečeno: určuje např. vše, co potřebuji jako počáteční podmínku k jednoznačnému vyřešení pohybových rovnic.

Od jedné částice jsme přešli k soustavě částic a k tělesu (tuhému či deformovatelnému). Síly působící mezi jednotlivými částicemi se stanou vnitřními silami z hlediska soustavy; předpokládáme pro ně zákon akce a reakce (3. NZ). Na pohyb soustavy jako celku (např. na pohyb tuhého tělesa) mají vliv jen vnější síly.

Konfigurace soustavy N částic v daném okamžiku t je určena souborem $\{x_i, y_i, z_i\}_{i=1\dots N}$ poloh všech jejích částic v tomto okamžiku.

Stav soustavy N částic v daném okamžiku t je určen souborem $\{x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\}_{i=1\dots N}$ poloh a rychlostí všech jejích částic v tomto okamžiku.

3.2.2 Analogické pojmy v analytické mechanice

V analytické mechanice vyjdeme také z částic. Jejich polohu však popíšeme výhodněji.

Zobecněné souřadnice jsou proměnné q_i libovolného druhu (např. polární souřadnice) vhodné pro popis konfigurace soustavy. Pohyb soustavy (časovou změnu konfigurace, chcete-li) pak budeme zjišťovat pomocí vhodného **principu**. Princip budeme hledět formulovat natolik obecně, aby nám umožnil zjistit časový vývoj nejen jediné částice, ale co nejobecnější fyzikální soustavy, např.:

- soustavy částic podrobené dalším podmínkám — vazbám,
- složitěho pákového mechanismu (v něm zobecněnými souřadnicemi budou např. úhly svírané pákami),
- ale třeba i elektromagnetického pole.

Počet n stupňů volnosti (někdy F z něm. Freiheitsgraden) je počet spojitě proměnných parametrů nutných a postačujících k popisu polohy soustavy (tj. všech jejích částí).

Konfigurace soustavy v daném okamžiku t bude určena souborem $\{q_i\}_{i=1\dots n}$ těchto parametrů, tedy zobecněných souřadnic (poloh).

Stav soustavy bude určen souborem $\{q_i, \dot{q}_i\}_{i=1\dots n}$ zobecněných souřadnic a zobecněných rychlostí anebo ekvivalentními údaji (např. souborem $\{q_i, p_i\}_{i=1\dots n}$ zobecněných souřadnic a zobecněných hybností).

Konfigurační prostor Uvažujme N stejných částic, $k = 1 \dots N$. Všechny mají stejnou hmotnost m a k -tá částice má souřadnice

$$X_i^k, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

Přecísľujeme postupně souřadnice N bodů ve 3-D prostoru na souřadnice jediného bodu v $3N$ -D prostoru, tzv. *konfiguračním prostoru*.

Pak tuto soustavu N částic popíšeme jediným bodem ve $3N$ -rozměrném *konfiguračním prostoru*. Pohybové rovnice zůstávají formálně stejné:

$$F_i = m\ddot{x}_i, \quad (3.4)$$

jen i probíhá do 1 do $3N$.

↔ Definici konfiguračního prostoru později, v 3.3.4, zobecníme pro případ soustavy s vazbami. Konfigurační prostor bude mít vždy právě tolik rozměrů, kolik má soustava stupňů volnosti.

♣ Napište explicitně tvar transformace rov. (3.3).

$$\text{Řešení: } x_j = X_i^k, \quad j = 3(k-1) + i.$$

3.3 Vazby, zobecněné souřadnice

3.3.1 Vazba

Vazba popisuje omezení kladené na polohu nebo pohyb částic.

Příklad 1: Dva body ležící oba na povrchu koule o poloměru R a současně si zachovávající od sebe vzdálenost a . Soustava je popsána třemi vazbami:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0; \quad (3.5)$$

$$x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - R^2 = 0; \quad (3.6)$$

$$(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 - a^2 = 0. \quad (3.7)$$

Vazby jsme zapsali ve tvaru $\varphi_k(x_j) = 0$. Každá z nich definuje podprostor dimenze $N - 1$ (nadplochu). Bod určující v konfiguračním prostoru konfiguraci systému se tedy pohybuje jen po průsečnici nadploch zobrazujících jednotlivé vazby.

Příklad 2: Pohyb v rovině, kdy rychlost ve směru x je vždy dvojnásobek rychlosti ve směru y :

$$\begin{aligned} v_x &= 2v_y & \text{neboli} \\ dx - 2dy &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Příklad 3: K smrti vyděšená myš běžící kamkoliv maximální možnou rychlostí $v(t)$:

$$(dx)^2 + (dy)^2 - (v(t) dt)^2 = 0 \quad (3.9)$$

3.3.2 Typy vazeb

Vazby klasifikujeme z různých hledisek:

• rovnost $\times$ nerovnost

Vazba *oboustranná*, např.:

$$\varphi = 0, \quad (3.10)$$

Bod je vázán na nadplochu, „nemůže z ní ven“.

Vazba *jednostranná*, např.:

$$\varphi \geq 0, \text{ resp. } \varphi \leq 0, \quad (3.11)$$

Bod se může pohybovat po jisté ploše a nad ní, nikoli však pod ní (anebo obráceně).

- závislost na **čase**

Vazba *skleronomní* nezávisí explicitě na čase, např.:

$$\varphi(x_i) = 0. \quad (3.12)$$

Skleronomní vazba nemění energii částice v časově nezávislých silových polích.

Vazba *reonomní* obsahuje explicitní závislost na čase, např.:

$$\varphi(x_i, t) = 0 \quad (3.13)$$

Vazba se s časem mění (nabř. bod na nafukovaném míči). Může proto měnit energii i v časově nezávislých silových polích.

- závislost na **souřadnicích** $\times$ na **diferenciálech** souřadnic (a času)

Vazba *holonomní* obsahuje jenom souřadnice, např.

$$\varphi(x_i, t) = 0. \quad (3.14)$$

Omezuje polohu částice.

Vazba *neholonomní* obsahuje i diferenciály souřadnic, tedy obecně

$$\varphi(x_i, dx_j, t, dt) = 0. \quad (3.15)$$

Omezuje tedy explicitě nikoli polohu, ale směr pohybu (dx/dy) nebo jeho rychlost (dx/dt). (Nesnižuje proto počet stupňů volnosti.)

Smysl mají jen vazby převeditelné na homogenní formu (řádu L) v diferenciálech. Obsahuje-li vazba dt , pak jejím vydělením $(dt)^L$ získáme vazbu obsahující složky rychlosti $\dot{x}_i^L$ namísto diferenciálů; neobsahuje-li, pak podobným způsobem dostaneme vazbu omezující jen směr pohybu (tj. dx_i/dx_k) v daném bodě.

Připomeňme, že lineární forma v diferenciálech se nazývá *Pfaffova forma*:

$$\mathring{d}F = \sum_{k=1}^n a_k dx_k \quad , \text{ kde } a_k \text{ jsou funkcemi obecně všech } x_1 \dots x_n. \quad (3.16)$$

Pro rozlišení od totálního diferenciálu se značí přeškrtnutým $\mathring{d}$, např. v termodynamice

$$\mathring{d}Q = dU + p dV \quad (3.17)$$

Vnitřní energie U a objem V jsou zde nezávislé stavové proměnné, tlak $p(U, V)$ je stavovou funkcí těchto proměnných. Neexistuje však stavová veličina Q , jejímž totálním diferenciálem by byl výraz (3.17). Existuje jen dějová veličina

$$Q = \int_{\Gamma} \mathring{d}Q = \int_{\Gamma} (dU + p dV) \quad (3.18)$$

jehož hodnota však závisí na integrační dráze (křivce) Γ v prostoru proměnných U, V . Fyzikálně řečeno, teplo Q je proto dějová veličina (daná dějem), nikoli stavová (daná stavem).

Neholonomní vazby probereme podrobněji v následujícím odstavci.

3.3.3 $\longleftrightarrow$ Neholonomní vazby integrabilní a neintegrabilní

Tento odstavec přeskočte při prvním čtení.

Každou holonomní vazbu můžeme snadno převést na neholonomní, konkrétně na anulovanou Pfaffovu formu tím, že vytvoříme její diferenciál: např. z holonomní vazby

$$f(x_k) = 0 \quad (3.19)$$

tím vznikne vazba

$$\sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{x_i} dx_k = \sum_k A_k dx_k = 0. \quad (3.20)$$

Je to triviální, protože omezíme-li pohyb na plochu, omezíme tím i možné směry pohybu (na směry tečné k této ploše).

Vazba 3.20 omezuje stejně jako původní holonomní vazba 3.19, je však obecnější: je ekvivalentní vazbě

$$f(x_k) = C$$

s libovolnou na x_k nezávisící konstantou C na pravé straně. Proto se vazbě tohoto typu říká neholonomní vazba **integrabilní** nebo také **pseudoholonomní**.

Obrácený postup je však možný jen někdy: ne každá vazba popsaná anulovanou Pfaffovou formou je integrabilní, tj. převeditelná na holonomní s vhodnou integrační konstantou. Závisí přitom podstatně na počtu proměnných:

1. V případě jediné proměnné je jediná možnost: neholonomní vazba je vždy diferenciálem, tedy pro každou $f(x)$ existuje taková $F(x)$, že platí

$$f(x) dx = dF(x).$$

($F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$.)

2. V případě dvou proměnných jsou dvě možnosti. Neholonomní vazba 2a) buď je totálním diferenciálem (jako u jedné proměnné), tedy pro ni platí

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = dF(x, y), \quad (3.21)$$

čili existuje funkce $F(x, y)$ taková, že

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad (3.22)$$

$$g(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}. \quad (3.23)$$

- 2b) anebo má vazba **integrační faktor** λ , tj. existuje funkce $\lambda(x, y)$ taková, že vazba

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad (3.24)$$

sice nemá tvar $dF(x, y) = 0$, ale získá ho po vynásobení λ :

$$\lambda(x, y) \cdot f(x, y) dx + \lambda(x, y) \cdot g(x, y) dy = dF(x, y), \quad (3.25)$$

neboli existují funkce $F(x, y)$, $\lambda(x, y)$ takové, že

$$\lambda(x, y) \cdot f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad (3.26)$$

$$\lambda(x, y) \cdot g(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}. \quad (3.27)$$

Všechny až doposud popsané vazby nazýváme **integrabilní**.

3. V případě třech a více proměnných existuje vedle uvedených typů navíc možnost, že vazba není integrabilní, tj. neexistují funkce $F(x, y, z)$ a $\lambda(x, y, z)$ takové, aby

$$\lambda(x, y, z) \cdot f(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}, \quad (3.28)$$

$$\lambda(x, y, z) \cdot g(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}, \quad (3.29)$$

$$\lambda(x, y, z) \cdot h(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}. \quad (3.30)$$

Prototyp neintegrabilní vazby ve 3 proměnných x, y, z je

$$x dy + dz = 0 \quad (3.31)$$

a naopak na tento tvar lze vhodnou volbou nových proměnných lokálně převést libovolnou neintegrabilní neholonomní vazbu ve 3 proměnných.

Obecně platí, že pro n proměnných lze libovolnou anulovanou Pfaffovu formu převést vhodnou transformací $x_i \rightarrow y_j$, tj. $y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$ na tvar

$$y_1 dy_2 + y_3 dy_4 + \dots + y_{n-1} dy_n = 0 \quad \text{pro sudé } n, \quad (3.32)$$

$$y_1 dy_2 + y_3 dy_4 + \dots + dy_n = 0 \quad \text{pro liché } n. \quad (3.33)$$

Pro $n \geq 3$ je tato forma neintegrabilní.

3.3.4 Zobecněné souřadnice

Zobecněné souřadnice jsou libovolné spojitě parametry q_i popisující polohu bodu v konfiguračním prostoru. Zpravidla je vybereme tak, aby poslední z nich (s indexy $i = n+1, \dots, 3N$) identicky splňovaly vazby a počítáme pak jen s ostatními, tj. s prvními n souřadnicemi.

Příklad: Uvažujme 2 body vázané na povrch koule jako v odst.3.3.1; zřejmě platí $N = 2$ a $n = 2 \cdot 3 - 3 = 3$ (jsou 3 vazby pro 6 proměnných). Zvolíme sférické souřadnice r_i, θ_i, φ_i ; $i = 1, 2$. Označíme potom např.

$$q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2, \quad q_3 = \varphi_1, \quad q_4 = \varphi_2, \quad q_5 = r_1 - R, \quad q_6 = r_2 - R.$$

Díky vazbám rov. (3.5), (3.6) bude identicky

$$q_5 = 0 \quad (3.34)$$

$$q_6 = 0 \quad (3.35)$$

a zbývá ještě vazba rov. (3.7) vedoucí na vztah

$$\sin q_1 \sin q_2 \cos(q_3 - q_4) + \cos q_1 \cos q_2 + K = 0, \quad (3.36)$$

kde značíme $a^2/2R^2 - 1 = K$; vhodnou volbou jiného tvaru zobecněných souřadnic q_3, q_4 by ho rovněž šlo splnit automaticky formou $q_4 = 0$, čímž by zbyly tři nezávislé zobecněné souřadnice q_1, q_2, q_3 .

↔ Není cílem zde dořešit tuto úlohu a formulovat tuto závislost; stačí, když čtenář nahlédne, jak by to šlo dořešit. Přirovnáme-li oba body ke dvěma lodím na oceánu, pak q_1, q_2 určují polohu první lodi; je-li kdekoli kromě severního a jižního pólu, lze polohu druhé lodi vzdálené o a jednoznačně určit např. orientovaným úhlem φ_{12} od severního směru ke druhé lodi. Tento úhel může sloužit jako poslední zobecněná souřadnice q_3 .

3.3.5 Zobecněné rychlosti

Zobecněné rychlosti definujeme předpisem

$$\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}. \quad (3.37)$$

Zobecněné hybnosti p_i definujeme *nikoli* jako $m\dot{q}_i$, ale složitěji, viz odst. 3.6.6.

3.3.6 Označení prostorů

Uvažujme soustavu N částic podrobených V holonomním vazbám a mající tedy n stupňů volnosti. Zavedeme několik označení:

konfigurační prostor je n -rozměrný prostor $\mathcal{M}(q_i)$ všech zobecněných souřadnic q_i . Konfiguraci soustavy s n stupni volnosti lze popsat bodem v tomto prostoru;

rychlostním prostorem zde nazýváme n -rozměrný prostor $\mathcal{M}(\dot{q}_i)$ všech zobecněných rychlostí $\dot{q}_i$;

hybnostním prostorem zde nazýváme n -rozměrný prostor $\mathcal{M}(p_i)$ všech zobecněných hybností p_i . Zobecněnou hybnost zavedeme až v odst. 3.6.6;

stavový prostor (též **rychlostní fázový prostor**) je $2n$ -rozměrný prostor $\mathcal{M}(q_i, \dot{q}_i)$, který je přímým součinem konfiguračního a rychlostního prostoru. Stav systému lze popsat bodem v tomto prostoru. (Na stavovém prostoru je např. definován lagranžian z kap.3.6.4);

fázový prostor (též **hybnostní fázový prostor**) je $2n$ -rozměrný prostor $\mathcal{M}(q_i, p_i)$, který je přímým součinem konfiguračního prostoru a hybnostního prostoru (odst. 3.6.6). Stav systému lze rovněž popsat bodem v tomto prostoru. Tento prostor má hlubší význam než stavový prostor a lépe vystihuje různé symetrie a zákony zachování (např. tzv. Liouvillova teorém, podle něhož se skupina bodů ve fázovém prostoru pohybuje jako nestlačitelná kapalina). Na tomto prostoru je např. definován hamiltonián z kap.3.6.7.

3.3.7 Zahrnutí vazeb do mechaniky

Uvažujme soustavu N částic s V holonomními vazbami, mající tedy $n = 3N - V$ stupňů volnosti. Vazby lze vystihnout

- tzv. *vazbovými* silami (pohyb je pak popsán $3N + V$ rovnicemi, totiž $3N$ Lagrangeovými rovnicemi 1. druhu a V rovnicemi vazeb);
- použitím *zobecněných souřadnic* q_i , vystihujících vazbu automaticky (pohyb je pak popsán n Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu). Vazby jsou dány V vztahy $q_{n+i} = 0$ pro $i = 1, \dots, V$.

3.4 Lagrangeovy rovnice 1. druhu

Chceme-li vystihnout vazbu „newtonovsky“, tedy silou (*vazbová síla*), pak tato síla

- musí udržet částici v souladu s vazbovou podmínkou
- nesmí konat práci (urychlovat nebo brzdit částici).

Řešení: má-li vazba tvar $f(x_i) = 0$, musí být vazbová síla $\mathbf{F}^{(v)}(x_j)$ kolmá k vazbou definované nadploše (pak nekoná práci), tedy mít směr gradientu: $\mathbf{F}^{(v)} = \lambda \text{grad } f$. Funkci $\lambda(x_i)$ vypočteme dodatečně tak, aby opravdu částice na vazbě $f(x_i) = 0$ zůstala.

Např. pro 1 bod v 3D prostoru a 1 vazbu ($3 - 1 = 2$ stupně volnosti) máme $3 + 1 = 4$ neznámé: x_1, x_2, x_3, λ a pro ně 4 rovnice:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1 + F_1^{(v)} = F_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ m\ddot{x}_2 &= F_2 + F_2^{(v)} = F_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ m\ddot{x}_3 &= F_3 + F_3^{(v)} = F_3 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ f(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned}$$

(Názorně: otec usměrňuje neposedného synka na cestičce v parku.)

3.5 Princip virtuální práce

Pro volnou částici bylo podmínkou rovnováhy $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. To lze říci tak, že při libovolném *virtuálním posunutí* $\delta \mathbf{r}$ je vykonaná *virtuální práce* δW rovna nule:

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x} = 0.$$

Takto formulujeme princip virtuální práce (zvaný též *princip virtuálních posunutí*) i při vázané částici, kde již $\delta \mathbf{r}$ nejsou libovolná, ale vyhovují vazbovým podmínkám. Je-li např. 1 částice v 3D podrobena 2 vazbám f, g , platí:

$$\begin{aligned} F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 + F_3 \delta x_3 &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \delta x_3 &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial g}{\partial x_3} \delta x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jak ukážeme ekvivalenci těchto rovnic Lagrangeovým rovnicím 1. druhu? Můžeme např. „dřevorubecky“ z poslední rovnice vyjádřit δx_3 pomocí δx_2 a δx_1 , dosadit do první a druhé rovnice, pak z poslední rovnice vyjádřit δx_2 pomocí δx_1 a dosadit do první rovnice. Při troše smůly však může náhodný výběr rovnic a eliminovaných proměnných δx_i selhat (např. zde, pokud by v třetí rovnici

náhodou bylo $\frac{\partial g}{\partial x_3} = 0$). Obecnější je proto symetrický postup užívající *Lagrangeových multiplikátorů*: druhou rovnici vynásobíme zatím neznámým λ , třetí μ a sečteme:

$$\left(F_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) \delta x_1 + \left(F_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) \delta x_2 + \left(F_3 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_3} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_3}\right) \delta x_3 = 0.$$

Nyní naopak ponecháme libovolná δx_i a určíme λ, μ tak, aby všechny tři závorky vymizely.

Při postupu užitím principu virtuální práce se prostě zabýváme jen takovým virtuálním posunutím, které respektuje vazby. Sestavení rovnic je pak mnohem snadnější a přehlednější.

Příklady: Rovnováha na páce. Člověk v kleci na kladce.

3.6 Lagrangeovy rovnice 2. druhu. Hamiltonovy rovnice

3.6.1 Zákon zachování energie

Předpokládejme, že síla působící v soustavě částic má potenciál a lze tedy najít skalární funkci $U(x_i)$ tak, že síla je jejím záporně vzatým gradientem: $\mathbf{F} = -\text{grad } U$, resp. složkově $F_i = -\partial U(x_j)/\partial x_i$. Potom z pohybových rovnic v kartézských souřadnicích lze po skalárním vynásobení rychlostí $d\mathbf{r}/dt \equiv \mathbf{v}$ odvodit zákon zachování (mechanické) energie E_0 :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\text{grad } U \quad (\text{tedy 2. NZ}) \quad (3.38)$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\text{grad } U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U \right) = 0 \quad (3.40)$$

$$T + U = \text{const} \equiv E_0, \quad (3.41)$$

kde $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m v^2$ je kinetická a U potenciální energie systému.

3.6.2 Lagrangeovy rovnice 2. druhu v kartézských souřadnicích

Zavedme *Lagrangeovu funkci (lagranžián)* $L = T - U$, resp. $L(x_i, v_i) = T(v_i) - U(x_i)$. Pak platí

$$\partial L / \partial v_i = \partial T / \partial v_i = m v_i \quad (3.42)$$

$$\partial L / \partial x_i = -\partial U / \partial x_i = -F_i \quad (3.43)$$

a Newtonův zákon rov. (3.38) lze zapsat ve tvaru *Lagrangeových rovnic 2. druhu v kartézských souřadnicích*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right)_{x_k, v_k} - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right)_{x_k, v_k} = 0 \quad (3.44)$$

3.6.3 Lagrangeovy rovnice 2. druhu v zobecněných souřadnicích

Rov. (3.44) zachovávají svůj tvar, i když od kartézských souřadnic x_i a rychlostí $v_i = \dot{x}_i \equiv dx_i/dt$ přejdeme k zobecněným souřadnicím $q_j = q_j(x_i)$ a zobecněným rychlostem $\dot{q}_j = dq_j/dt$. Abychom to dokázali, vyjádříme nejprve

$$q_j = q_j(x_i), \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(\dot{x}_i, x_i)$$

a explicitě rozepíšeme

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} = \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \dot{x}_i;$$

odtud plyne „krácení tečkou“

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}.$$

Zapíšeme znovu Lagrangeovu rovnici rov. (3.44) s tím, že nový lagranžián $\mathcal{L}$ bude funkcí zobecněných souřadnic q_j a rychlostí $\dot{q}_j$ a jenom jejich prostřednictvím funkcí kartézských souřadnic x_i a rychlostí v_i . Bude tedy $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k)$, přičemž platí

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \mathcal{L}(q_k(x_i), \dot{q}_k(x_i, \dot{x}_i))$$

Derivacemi $\mathcal{L}$ jako složené funkce odvodíme (toto si prosím *opravdu* zkuste a pište, nejen čtete!):

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (3.45)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial v_i} \right) - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (3.46)$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (3.47)$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (3.48)$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (3.49)$$

$$= \sum_j \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_i}, \quad (3.50)$$

odkud plyne výsledek ve tvaru *Lagrangeových rovnic 2. druhu*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Tyto rovnice jsou tedy pohybovými rovnicemi vhodnými pro práci v zobecněných souřadnicích.

3.6.4 Lagranžián

Lagranžián⁴ $\mathcal{L} = T - U$ je funkcí zobecněných souřadnic q_i a rychlostí $\dot{q}_i$; může být případně i explicitě funkcí času t (např. pro časově proměnná pole):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t).$$

Dosazením konkrétního pohybu $q = q(t)$ a $\dot{q} = \dot{q}(t)$ by se lagranžián stal funkcí $\mathcal{L}'$ samotného času:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(t) = \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \quad (3.51)$$

Obvykle ovšem nerozlišujeme typograficky L , $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$; lagranžián značíme prostě L , ať je funkcí jakýchkoliv proměnných. Je-li to potřeba, vyplyne typ proměnných z kontextu.

3.6.5 Hamiltonův princip, princip minimální akce

V matematice (variační počet) se dokazuje následující tvrzení:

Nechť je dán funkcionál

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt. \quad (3.52)$$

Zadáme-li konkrétní funkce $q_i(t)$, popisující pohyb částic s časem, spočteme-li jejich derivace $\dot{q}_i(t)$ a dosadíme-li je do rov. (3.52), dostaneme konkrétní číslo. Mezi všemi funkcemi $\mathbf{q}(t)$ nabývajících

⁴někdy se píše lagrangian

téže hodnoty $\mathbf{Q}_1$ v čase t_1 a hodnoty $\mathbf{Q}_2$ v čase t_2 nabývá integrál A minimální hodnotu pro tu funkci $\mathbf{q}(t)$, pro niž platí rovnice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Obráceně tedy: skutečný pohyb se děje tak, aby integrál A byl minimální. Tento integrál $\int L dt$ má ve fyzice význam akce, odtud název „princip minimální akce“.

3.6.6 Zobecněné hybnosti. Fázový prostor

Definitorky zavádíme zobecněnou hybnost p_i vztahem

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{resp.} \quad p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.53)$$

(tedy nikoli jako $m\dot{q}_i$). Snadno se přesvědčíme, že přechází v „obyčejnou“ hybnost, má-li kinetická energie tvar $T = \frac{1}{2}m \sum \dot{q}_i^2$). Takto definované hybnosti by byly funkcí zobecněných souřadnic a zobecněných rychlostí. Můžeme však také postupovat obráceně; od dvojic nezávislých veličin $q_i, \dot{q}_i$ a funkcím $p_i = p_i(q_k, \dot{q}_k)$ přejít ke dvojici nezávislých veličin q_i, p_i a funkcím $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_k, p_k)$.

Analogicky výraz $\frac{\partial L}{\partial q}$ nazýváme k -tou složkou zobecněné síly. (Rozmyslete si znaménko!)

$2n$ -rozměrný prostor $\{q_i, p_i\}$ pro $i = 1 \dots n$ nazýváme, jak již víme z (3.3.6), *fázovým prostorem*. Např. 10 částic bez vazeb je popsáno jedním bodem v 60-rozměrném fázovém prostoru; 10 částic s 1 vazbou je popsáno jedním bodem v 58-rozměrném fázovém prostoru.

3.6.7 Hamiltonovy rovnice

Pohybové rovnice získají symetričtější tvar, vyjádříme-li je nikoli v zobecněných souřadnicích q_i a zobecněných rychlostech $\dot{q}_j$, ale v zobecněných souřadnicích q_i a zobecněných hybnostech p_j . Při přechodu k novým proměnným použijeme tzv. Legendreovu duální transformaci: místo funkce $L(q_i, \dot{q}_j)$ zavedeme novou funkci – *hamiltonián* $H(q_i, p_j)$ vztahem

$$H(q_i, p_j) = p_k \dot{q}_k - L(q_i, \dot{q}_j),$$

kde na pravé straně dosadíme systematicky $\dot{q}_m = \dot{q}_m(q_i, p_j)$ tak, aby i pravá strana byla funkcí jen proměnných p_i, q_j a nikoli $\dot{q}_j$; přes index k se sčítá. Pro názornost – úplně rozepsáno:

$$H(q_i, p_j) = \sum_k p_k \dot{q}_k(q_i, p_j) - L(q_i, \dot{q}_m(q_i, p_j))$$

Určíme nyní $\partial H / \partial q_i$ a $\partial H / \partial p_i$ s využitím Lagrangeových rovnic, definičního vztahu $\partial L / \partial \dot{q}_k = p_k$ a relace $\partial p_i / \partial p_j = \delta_{ij}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} = p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = -\frac{dp_i}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \delta_{ji} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt} \end{aligned}$$

Soustava $2n$ diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}$$

se nazývá Hamiltonovy rovnice a představuje pohybové rovnice v $2n$ -rozměrném fázovém prostoru, tvořeném n souřadnicemi q_i a n souřadnicemi p_i (tj. zobecněnými souřadnicemi a jim příslušnými zobecněnými hybnostmi).

3.6.8 Názorný význam hamiltoniánu

$H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - T + U = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + U = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + U$; pokud je kinetická energie T homogenní kvadratickou funkcí rychlostí a potenciální energie U na rychlostech nezávisí, je suma rovna $2T$ a platí, že hamiltonián $H = T + U$ je roven celkové mechanické energii soustavy.

3.6.9 Přednosti analytického přístupu

Řešení úlohy metodami analytické mechaniky může mít specifické výhody.

- Popis pomocí zobecněných souřadnic lze jednoduše použít na mnohem větší třídu úloh než zobecnění soustavy částic řešených vektorovou mechanikou.
- Variační principy umožňují nejen nalezení (skutečného) řešení, ale také nalezení nejlepší aproximace řešení na třídě funkcí, a to i takové, v níž skutečné řešení neleží. Máme-li např. šikmý vrh (po parabole) aproximovat obloukem kružnice, může nás vektorová mechanika jen ujistit, že žádný náš návrh není řešením pohybových rovnic (což víme taky, jen nevíme, který z našich návrhů je špatný a který ještě horší). Naproti tomu variační princip hledající např. minimum akce ukáže, která z uvažovaných funkcí $q(t)$ je onen jednooký mezi slepými.
- Vycházíme-li ze známé jednoduché úlohy a chceme-li ji zobecnit tak, aby postihla i náš, složitější případ, pak ve vektorové mechanice např. můžeme zkusit zobecnit tvar působících sil; ovšem síla je vektor (a zde v $3N$ -rozměrném prostoru) a zobecnění jedné složky může vyžadovat jisté změny i ostatních složek z důvodů vnitřní konzistence, symetrií apod. Naproti tomu zobecnění skalárního lagranžiánu či hamiltoniánu je podstatně jednodušší mj. právě tím, se toto nebezpečí nehrozí: zobecňujeme jedinou funkci.