

1. Historický úvod, přehled probíraných témat, 2.N.Z. a vektorové pole, značení vektorů, Newtonův absolutní prostor a čas, Afinní prostor, dimenze afinního prostoru, souřadnice vektoru, afinní souřadnice bodu, transformace souřadnic afinního prostoru, křivočaré souřadnice
2. Klasifikace veličin vzhledem k jejich transformačním vlastnostem (skaláry, vektory, tenzory, hustoty), invariantní tenzor, definice a transformace skalárního a vektorového pole, Euklidovský afinní prostor, kartézská soustava souřadnic ortogonální transformace
3. Orientace, pravotočivá levotočivá soustava, pseudovelichny, Vztažná soustava, přechody mezi vztažnými soustavami, trajektorie, polohový vektor, rychlost zrychlení, 1.N.Z, inerciální vztažná soustava, Galileiho transformace a princip relativity, 2.N.Z. v neinerciální soustavě, vektor úhlové rychlosti, setrvačné síly
4. Gravitační a elastická síla, třetí Newtonův zákon, Mechanika soustav částic, první věta impulsová, soustava hmotného středu, druhá věta impulsová, věta o energii, Königova věta (pro kinetickou energii), Izolovaná soustava, Věta o viriálu, časová střední hodnota, Eulerova věta pro homogenní funkce
5. Mechanika tuhého tělesa, vztažné soustavy (laboratorní, HMS a tělesová) a přechody mezi nimi, úhlová rychlost rotace, kinetická energie a tenzor momentu setrvačnosti, pohyb tuhého tělesa, 1. a 2. věta impulsová, eulerovy setrvačnickové rovnice, diagonalizace tenzoru momentu setrvačnosti, hlavní osy setrvačnosti
6. Eulerovy úhly a jejich vztah k úhlové rychlosti, rotace, precese, nutace, Setrvačníky, volný kulový a volný symetrický setrvačnick, Země jako volný a těžký setrvačnick, Analytická mechanika - Lagrangeova formulace mechaniky, počet stupňů volnosti, konfigurační prostor poprvé (bez vazeb), klasifikace vazeb, skryté holonomní vazby, Holonomní soustava, vazbové síly holonomních vazeb, Lagrangeův multiplikátor
7. Lagrangeovy rovnice prvního druhu pro holonomní soustavu, operátor totální (úplné) časové derivace, druhy vtíštěných sil - potenciální síly, potenciály homogenní tíhové pole, elastické pole, gravitační pole, zobecněný potenciál pro Lorentzovu sílu, Lagrangeova funkce v kartézských souřadnicích
8. Nejednoznačnost Lagrangeovy funkce, křivočaré souřadnice, Newtonovy rovnice v křivočarých souřadnicích Konfigurační prostor (podruhé), nezávislost vazeb, obecné souřadnice, obecné rychlosti, Lagrangeovy rovnice druhého druhu (odvození z LR1D)
9. Lagrangeovy rovnice druhého druhu (odvození z LR1D), Lagrangeova funkce v obecných souřadnicích, Pozorovatelné veličiny, kinetická energie v obecných souřadnicích , obecná síla, obecná hybnost a rozdíl oproti klasické hybnosti, obecná energie a vztah k celkové energii, Integrály pohybu, integrál obecná energie, cyklické souřadnice
10. Teorém Noetherové, důkaz a infinitesimální formulace, diferenciální principy mechaniky, princip virtuální práce, statická rovnováha soustavy hmotných bodů volných/ podrobených holonomním skleronomním vazbám
11. virtuální, možná a skutečná posunutí, virtuální a skutečná práce, (ideální vazby), odvození Lagrangeových rovnic 2. druhu z d'Alembertova principu, d'Alembertův princip, pohybové rovnice pro případ neholonomních vazeb lineárně závislých na rychlostech
12. Integrální principy mechaniky, Fermatův princip, ústřední rovnice Lagrangeova, Hamiltonův princip, variace křivky s pevnými konci, variace funkcionálu, Euler-Lagrangeovy rovnice
13. Routhova funkce, vyloučení cyklické souřadnice, Jacobiho princip, Řešitelné modely mechaniky: omezení plynoucí na síly mezi částicemi plynoucí z Galileovské invariance, centrální izotropní síla je potenciální, úloha dvou těles

(nestihlo se: pohyb částice ve sféricky symetrickém poli, Keplerova úloha, jednorozměrný konzervativní systém)

Teoretická Fyzika

<https://physics.fjfi.cvut.cz/studium/predmety/67-02/lef1>

- Literatura
1. Glabikář analytické mechaniky [Dlhařský] skriptá web (kouse 1. semestr)
 2. Klasická teoretická fyzika [Štoll, Šolár, Jex] kniha 2017
 3. Teoretická fyzika [Štoll, Šolár] skriptá ČVUT

Matf. předměty

- Tef1
- Newtonova mechanika (vektora)
 - Analytická mechanika (skalární)
 - Lagrangeův formalismus
 - diferenciální principy
 - integrační (variační) principy

- Tef2
- Analytická mechanika
 - Hamiltonův formalismus

- Speciální teorie relativity
- Teorie elektromagnetického pole
- Elektromagnetické vlny

Newton (1687) - Matematické principy přirodní filosofie - 1. dílo teoretické fyziky
- 3 Newtonovy zákony a gravitační zákon

2. N. Z. $m \vec{a} = \vec{F}$

$m = \text{konst.}$ setrvačinná hmotnost (skalár)

$\vec{a} = \vec{a}(t)$ okamžité zrychlení (vektor)

$\vec{F} = \vec{F}(b, \vec{v}, t)$ vniklá síla (vektorové pole)

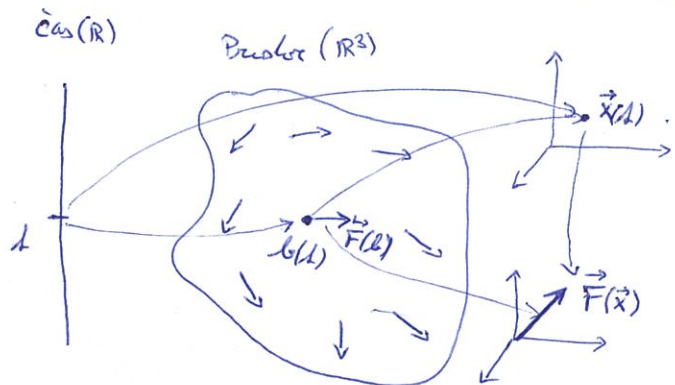
pro jednoduchost předpokládáme $\vec{F} = \vec{F}(b)$

$$m \vec{a}(t) = \vec{F}(b(t))$$

v kartézských souřadnicích $m \ddot{x}^j(t) = F^j(\vec{x}(t)) \quad j=1,2,3$

$$m \ddot{x}^j(t) = F^j(x^1(t), x^2(t), x^3(t))$$

Pohybové rovnice.



obvyklé dif. 2. řádu pro nespojitelné funkce $x^j = x^j(t) \quad j=1,2,3$

obtížnost řešení rovnice má dvojí důvod
rozšířených $F^j = F^j(\vec{x}) \quad F^j: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

absolutní čas je univerzální parametr, nezávislý na pohybu těles, všude stejně plynoucí
 $t \in \mathbb{R}$ spojitý, rovnoměrný, jednosměrný, jednovázný

absolutní prostor je soubor míst, kde se mohou nacházet hm. body, není ovlivněn přítomností těles,
je homogenní, izotropní, 3-dimenzionální, euklidovský

Pozn: STR - prostorčas

OTR - -11- je zakřivená hmotnost

Značení vektor $\vec{v} \in V$ jako prvek vektorového prostoru V (ne skriptu tučně $\vec{v} \equiv \vec{v}$)

m -tice $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ m -tice reálných čísel $\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}$ např. složky vektoru $\vec{v}$ v nějaké bázi B
 $\vec{v} = (\vec{v})_B$

$$f = f(\vec{v}) = f(v^1, \dots, v^m)$$

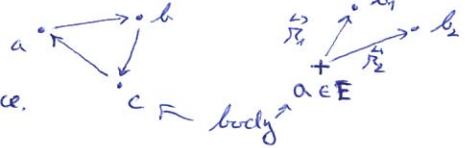
Afinní prostor - matematický model fyzikálního prostoru mechaniky (Newtonův absolutní prostor)

Afinním prostorem nazýváme uspořádanou trojici $(E, \varphi, \vec{E})$ kde $E \neq \emptyset$ je množina bodů,

$\vec{E}$ je přidružený vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (tj. s měřítkem) a $\varphi: E \times E \rightarrow \vec{E}$ zobrazení splňující:

1) $\forall a, b, c \in E \quad \varphi(a, b) + \varphi(b, c) + \varphi(c, a) = \vec{0}$

2) $\forall a \in E$ je zobrazení $\varphi_a: E \rightarrow \vec{E} \quad \varphi_a: b \rightarrow \varphi(a, b)$ je bijekce.



Značení
 a) $\varphi(a, b) = b - a = \vec{ab} = \vec{r}_{ab} \in \vec{E} \dots$ lze odčíst body $\rightarrow$ vektor $a - a = \varphi(a, a) = \vec{0} \Leftarrow 1$
 b) $\forall a \in E \quad \forall \vec{r} \in \vec{E} \quad \exists! b \in E$ tak, že $\vec{r} = b - a = \varphi(a, b) = \varphi_a(b) \Rightarrow b = \varphi_a^{-1}(\vec{r}) =: a + \vec{r}$

Př: • lib. vekt. pr. (V, φ, V)
 • $W \subset V, \vec{W} \subset V \quad (\vec{W} + W, \varphi, W)$ lineární podprostor
 $E = \{f: x \rightarrow \cos x + ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \quad \varphi(f, g) = g - f$
 $\vec{E} = \{p: x \rightarrow ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Dimenze afinního prostoru nazýváme číslo $\dim \vec{E}$. Je-li $\dim \vec{E} = m \in \mathbb{N}$ pak lze zavést na $\vec{E}$ bázi a souřad.

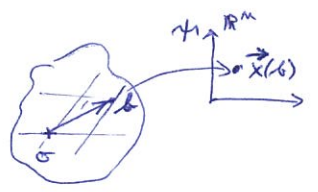
Souřadnice vektoru $\vec{v} \in \vec{E}$ v bázi $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ prostoru $\vec{E}$

$\vec{v} = v^i \vec{e}_i \rightarrow \vec{v} = (\vec{v})_B = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$
 $\uparrow$ Einstein Σ

i-ty souřadnicový funkcionál v bázi $B \quad \phi^i: \vec{E} \rightarrow \mathbb{R} \quad \phi^i(\vec{v}) = v^i$ tak $\vec{v} = \phi^i(\vec{v}) \vec{e}_i$ (jiné jm. $\vec{e}_i^{\#}, \vec{e}^i$)

(Afinní) souřadnice bodu $b \in E$ v soustavě souřadnic $\langle \sigma, (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rangle$

$b = \sigma + (b - \sigma) = \sigma + \phi^i(b - \sigma) \vec{e}_i$
 $\vec{x}(b) \dots$ složkový vektor bodu b
 $x^i(b)$ souřadnice bodu b v soustavě $\langle \sigma, B \rangle$

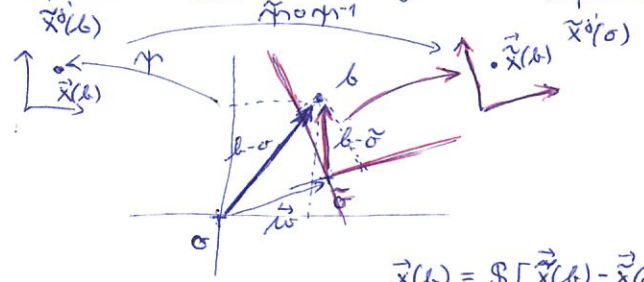


maka (afinní zobrazení)
 $\gamma: E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \gamma: b \rightarrow \vec{x}(b) = \begin{pmatrix} x^1(b) \\ \vdots \\ x^m(b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ kde $x^i(b) = \gamma^i(b) = \phi^i(b - \sigma)$

Transformace souřadnic (afinní transformace souřadnic bodů, lineární transformace souřadnic vektorů)

$b \rightarrow x^i(b) \text{ v } \langle \sigma, (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rangle \quad \tilde{\sigma} = \sigma + \vec{w}_{\vec{E}}$
 $\tilde{x}^i(b) \text{ v } \langle \tilde{\sigma}, (\tilde{\vec{e}}_1, \dots, \tilde{\vec{e}}_m) \rangle \quad \tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S_j^i$
 kde $S = (S_j^i) = \begin{pmatrix} S_1^1 & \dots & S_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ S_m^1 & \dots & S_m^m \end{pmatrix} = ((\vec{e}_1)_{\tilde{B}}, \dots, (\vec{e}_m)_{\tilde{B}}) = \tilde{B} B^{-1} = \tilde{B}^T B^{-1}$

$x^i(b) = \gamma^i(b) = \phi^i(b - \sigma) = \phi^i(\tilde{\phi}^j(b - \sigma) \tilde{\vec{e}}_j) = \phi^i(\tilde{\phi}^j(b - \sigma) \tilde{\vec{e}}_j S_j^k) = S_j^k \tilde{\phi}^j(b - \sigma) \phi^i(\tilde{\vec{e}}_k) = S_j^k \tilde{\phi}^j(b - \sigma) \delta_k^i =$
 $= S_j^i \tilde{\phi}^j(b - \sigma + \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}) = S_j^i \tilde{\phi}^j(b - \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} - \sigma) = S_j^i [\tilde{\phi}^j(b - \tilde{\sigma}) + \tilde{\phi}^j(\tilde{\sigma} - \sigma)] = \delta_j^i S_j^k [\tilde{x}^k(b) - \tilde{x}^k(\tilde{\sigma})]$
 $= S_j^i [\tilde{x}^j(b) - \tilde{x}^j(\tilde{\sigma})]$



inverse

1) $b = \tilde{\sigma} \quad x^i(\tilde{\sigma}) = S_j^i [\tilde{x}^j(\tilde{\sigma}) - \tilde{x}^j(\sigma)] = -S_j^i \tilde{x}^j(\sigma)$

2) $x^i(b) = S_j^i \tilde{x}^j(b) - S_j^i \tilde{x}^j(\sigma) = S_j^i \tilde{x}^j(b) + x^i(\tilde{\sigma})$

$x^i(b) - x^i(\tilde{\sigma}) = S_j^i \tilde{x}^j(b) \quad / (S^{-1})^k_i$

$(S^{-1})^k_i (x^i(b) - x^i(\tilde{\sigma})) = (S^{-1})^k_i S_j^i \tilde{x}^j(b) = \delta_j^k \tilde{x}^j(b) = \tilde{x}^k(b)$

$\tilde{x}^k(b) = (S^{-1})^k_i [x^i(b) - x^i(\tilde{\sigma})]$

$\vec{x}(b) = S [\vec{x}(b) - \vec{x}(\tilde{\sigma})]$

$\vec{x}(b) = S^{-1} [\vec{x}(b) - \vec{x}(\tilde{\sigma})]$

Klasifikace veličin vzhledem k transformacím souřadnic (změna báze v $\vec{E}$) $\dim \vec{E} = m \in \mathbb{N}$

Veličiny jsou prvky $\vec{E}$ resp. nějaké struktury (tj. tenzorové algebry) vybudované na $\vec{E}$, kde je buďme charakterizovat podle toho kolik mají složek (souřadnic) a jak se tyto souřadnice mění při změně báze $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\tilde{\vec{e}}_1, \dots, \tilde{\vec{e}}_m)$ kde $\boxed{\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j}$ $S = (S^i_j) \in GL(m, \mathbb{R})$ matice přechodu od B k $\tilde{B}$

1) skaláry $\Delta \in \mathbb{R}$ $\tilde{\Delta} = \Delta$ ve fyzice veličiny charakterizované pouze velikostí (a jednotkou)
(invarianty) např.: teplota, hmotnost, náboj, energie, práce, ...

2) vektory $\vec{v} \in \vec{E}$ ($\vec{v} \in \mathbb{R}^m$) ve fyzice veličiny charakterizované velikostí a směrem
např.: síla, rychlost, zrychlení, hybnost, intenzita elektrického pole, ...

$$\boxed{\tilde{v}^k = (S^{-1})^k_i v^i}$$

• kontravariantní

transformace $\vec{v} = v^i \vec{e}_i = \tilde{v}^j \tilde{\vec{e}}_j = \tilde{v}^j \vec{e}_i S^i_j \Rightarrow v^i = S^i_j \tilde{v}^j \quad / \quad (S^{-1})^k_i v^i = (S^{-1})^k_j \tilde{v}^j = \tilde{v}^k$
 $(\mathbb{1})^k_j = \delta^k_j$

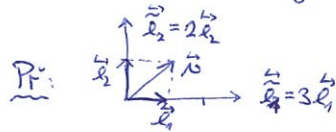
lineární funkcionál $\omega \in \vec{E}^* = \{\phi: \vec{E} \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi \text{ je lineární}\}$

↑ dualní vektorový prostor k $\vec{E}$ a dualní bázi $B^* = (\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^m)$ k bázi $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$
souřadnice ω v bázi B^* $\omega = \omega_i \vec{e}^i$ $\omega(\vec{e}_j) = \omega_i \vec{e}^i(\vec{e}_j) = \omega_i \delta^i_j = \omega_j$
 $\vec{e}^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ $\nearrow$ souřadnicové funkcionály v bázi B

souřadnice ω v bázi $\tilde{B}^*$ $\tilde{\omega}_j = \omega_i \tilde{\vec{e}}^i = \omega_i (\vec{e}^i S^i_j) = \omega_i \delta^i_j S^i_j = \omega_i S^i_j$

$$\boxed{\tilde{\omega}_j = \omega_i S^i_j}$$

• kovariantní (kovektory)



$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \tilde{v}^1 = \frac{1}{3} v^1 \quad \tilde{v}^2 = \frac{1}{2} v^2$$

3, tenzory

Př.: tenzor 2. řádu T definujeme pomocí jeho složek v libovolné bázi $T^{ij} := v^i u^j$ kde $\vec{v}, \vec{u} \in \vec{E}$
(kontravariantní) pak $\boxed{\tilde{T}^{ij} = \tilde{v}^i \tilde{u}^j = (S^{-1})^i_k v^k (S^{-1})^j_l u^l = (S^{-1})^i_k (S^{-1})^j_l v^k u^l = (S^{-1})^i_k (S^{-1})^j_l T^{kl}}$

ne reprezentovat maticově $\tilde{T}^{ij} = (S^{-1})^i_k T^{kl} (S^{-1})^j_l = (S^{-1} T)^{il} (S^{-1})^j_l = (S^{-1})^j_l ((S^{-1} T)^T)^{li} = (S^{-1} (S^{-1} T)^T)^{ij}$
 $= (S^{-1} T (S^{-1})^T)^{ij}$ tedy $\tilde{T} = S^{-1} T (S^{-1})^T$

tenzor 2. řádu $\tilde{K}_{ij} = K_{kl} S^k_i S^l_j$ maticově $\tilde{K} = S^T K S$
(kovariantní)

Def. Tenzorem typu $\binom{p}{q}$ tj. kontravariantním řádu $p \in \mathbb{N}_0$ a kovariantním řádu $q \in \mathbb{N}_0$ nazýváme veličinu T reprezentovanou (v bázi B) m^{p+q} reálnými čísly $T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q}$
kde se při změně báze $B \rightarrow \tilde{B}$ transformuje vzhledem

$$\tilde{T}^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} = (S^{-1})^{i_1}_{k_1} \dots (S^{-1})^{i_p}_{k_p} T^{k_1, \dots, k_p}_{l_1, \dots, l_q} S^{l_1}_{j_1} \dots S^{l_q}_{j_q} \quad \text{řád tenzoru} = p + q$$

ve fyzice například: tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \int_V \rho (x_l^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV$ $I_j = I_{jk} \omega_k$ $T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$
• elektrický kvadrupolový moment $Q_{jk} = \int_V (3x_j x_k - \delta_{jk} r^2) \rho dV$
• tenzor mechanického napětí
• tenzor elektromagnetického pole $F^{\mu\nu}$, tenzor energie a hybnosti

Pozn: skalár = tenzor nulového řádu vektor = tenzor prvního řádu

4) tenzorová hustota typu $\binom{p}{q}$ váhy $\alpha \in \mathbb{Z}$ $\tilde{T}^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} = (\det S)^\alpha (S^{-1})^{i_1}_{k_1} \dots (S^{-1})^{i_p}_{k_p} T^{k_1, \dots, k_p}_{l_1, \dots, l_q} S^{l_1}_{j_1} \dots S^{l_q}_{j_q}$

Invariantní tenzory

Bud' $G \subset GL(m, \mathbb{R})$ podgrupa, pak tenzor T nazýváme G -invariantní, pokud se jeho složky nemění při změně báze $\tilde{e}_i = e_i S^i_j \quad \forall S \in G$. (tj. $\tilde{T}_{a,b,\dots}^{i,j,\dots} = T_{a,b,\dots}^{i,j,\dots}$).

Př: $GL(m)$ -invariantní tenzory - skaláry
 - nulový vektor
 - tenzor typu (1) $T^i_j := \delta^i_j$

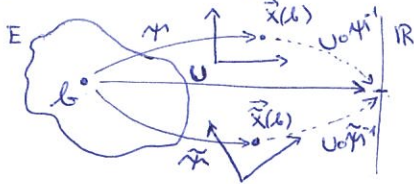
Pozn: Grupa transformací vůči nimž se charakterizují veličiny závisí na teorii

$\propto$ mechanice - ortogonální transformace $O(3)$

$\propto$ STR - Lorentzovy transformace $O(1,3)$

$\propto$ OTR - obecné lineární transf. $GL(4)$

Skalární pole je zobrazení $U: E \rightarrow \mathbb{R}$ $\propto$ souřadnicích $U: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (obvykle alekton-čísly $C^{(2)}$)
 $U = U(b)$ $U = U(\vec{x}(b))$



transformace $\boxed{\tilde{U}(\vec{x}(b)) = U(\vec{x}(b))} \rightarrow \tilde{U}(\vec{x}) = U(\vec{x}) = U(S(\vec{x} - \vec{x}(0)))$

Vektrové pole (kontravariantní) je zobrazení $\vec{F}: E \rightarrow \vec{E}$ $\propto$ souřadnicích $\vec{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $\vec{F} = \vec{F}(b)$ $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}(b))$

transformace $\boxed{\tilde{F}^i(\vec{x}(b)) = (S^{-1})^i_j F^j(\vec{x}(b))} \rightarrow \tilde{F}(\vec{x}) = S^{-1} \vec{F}(\vec{x}) = S^{-1} \vec{F}(S(\vec{x} - \vec{x}(0)))$

obdobně pro kovariantní pole

$\propto$ mechanice používáme Euklidovský afinní prostor (nad $\mathbb{R}$) tj. afinní prostor se skalárním součinem na $\vec{E}$

Skalárním součinem na $\vec{E}$ nazýváme bilineární zobrazení $g: \vec{E} \times \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ které je

- symetrické $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$
- pozitivně definitní $g(\vec{u}, \vec{u}) > 0 \quad \forall \vec{u} \neq \vec{0}$

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = g(\vec{u}, \vec{v}) = g(u^i \vec{e}_i, v^j \vec{e}_j) = u^i v^j g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g_{ij} u^i v^j = \vec{u}^T g \vec{v} = (\dots) \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
 $\uparrow$ báze B $g_{ij} \dots$ gramova matice $g = (g_{ij}) \dots$ tenzor typu (2)

je-li báze B ortonormální tak $g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ tj. $g = \mathbb{I}$.

Def: Soustava souřadnic $\langle \sigma, (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \rangle$ se nazývá kartézská, je-li báze B ortonormální.

Ortogonalní transformace (přechody mezi ortonormálními bázemi) $\tilde{e}_i = e_i S^i_j$

- pasivní - měřivý invariantní metrický tenzor (nemění svoji hodnotu podle kterého se počítá skalární součin)
 $\propto$ O.N. báze $\boxed{\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij} = g_{kl} S^k_i S^l_j = \delta_{kl} S^k_i S^l_j = S^k_i S^k_j}$

- aktivní $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v})$ - zachovávají hodnotu skalárního součinu (délky a úhly)

$\vec{u} = S \vec{\tilde{u}} \quad \vec{\tilde{u}}^T g \vec{\tilde{u}} = (S \vec{\tilde{u}})^T g (S \vec{\tilde{u}}) = \vec{\tilde{u}}^T S^T g S \vec{\tilde{u}} = \vec{\tilde{u}}^T g \vec{\tilde{u}} \quad \forall \vec{\tilde{u}}, \vec{\tilde{v}} \Rightarrow S^T g S = g$

$S \in O(m) = \{A \in \mathbb{R}^{m,m} / A^T A = A A^T = \mathbb{I}\}$ ortogonalní grupa

$\propto$ O.N. báze ($g = \mathbb{I}$) $\boxed{S^T S = \mathbb{I}} \quad \boxed{S^{-1} = S^T}$

transformace kovariantní $\tilde{u}_i = u_i S^i_j \Rightarrow \tilde{u}^T = \tilde{u}^T S \Rightarrow \left. \begin{aligned} \tilde{u} &= S^T \tilde{u} \\ \tilde{v} &= S^T \tilde{v} \end{aligned} \right\}$ jsou tři ortogonalních transformací stejné

kontravariantní $\tilde{v}^i = (S^{-1})^i_j v^j \Rightarrow \tilde{v} = S^{-1} \tilde{v} \Rightarrow \tilde{v} = S^T \tilde{v}$ vektory a kovektory jsou

pole $\propto$ mechanice metrizibilitní a když od teď (viz do STR) budeme psát indexy dole $\boxed{\tilde{u}_i = g_{ij} \tilde{u}^j} \quad S \in O$

Orientace vektorového prostoru je zobrazení $\omega: \{B \mid B \text{ báze } \vec{E}^3\} \rightarrow \{+1, -1\}$ takové, že pro $\forall B, \tilde{B}$ báze platí
 $\det S > 0 \Rightarrow \omega(B) = \omega(\tilde{B})$... souhlasně orientované báze
 $\det S < 0 \Rightarrow \omega(B) = -\omega(\tilde{B})$... opačně orientované báze
 $\uparrow$ matice přechodu od B k $\tilde{B}$

Báze B pro kterou je $\omega(B) = +1$ se nazývá kladně orientovaná.

Př: vektorový součin $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ tvoří kladně orientovanou bázi

Pozn: Reálný fyzikální prostor mechaniky není orientovaný, orientaci si můžeme volit podle pravidla pravé (levé) ruky



v mechanice se orientace píše jako volba báze, která je vždy kladně orientovaná - matematická standardní báze v $\mathbb{R}^3$ která má kladnou orientaci.



Pseudotenzory jsou veličiny, jejichž definice závisí na orientaci, a to tak, že při změně orientace mění znaménko.

např. magnetická indukce $\vec{B}_\omega = -\vec{B}_{-\omega}$
 nebo moment hybnosti, moment síly, úhlová rychlost, ...

Vztahová soustava

- vzájemné těleso - tuhé hmotné těleso ke kterému vztahujeme pohyb skoumaných těl
- metoda měření času - obvykle pomocí periodických jevů (hodiny)
- kartézská soustava souřadnic jejíž počátek i osy jsou pevně spojeny se vztažným tělem

Vztahovou soustavu budeme reprezentovat soustavou kartézských souřadnic $\langle \sigma(t), (\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t)) \rangle$
 • počátek σ lze díky homogenitě prostoru volit kdekoliv, $\sigma = \sigma(t)$ translace vůči N.A.P. O.N. báze $B(t)$ (převotivní)
 • Osy dané O.N. bází B mohou být libovolně natočeny (díky isotropii prostoru), $B = B(t)$ rotace vůči Newtonově Absolutnímu Prostoru

Transformace souřadnic mezi kartézskými vztahovými soustavami (převotivními)

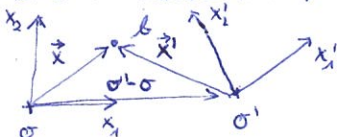
$$\vec{x} = S^T(t) (\vec{x} - \vec{x}(\sigma(t))) \quad \vec{x}_i = S_{ji}(t) [x_j - x_j(\sigma(t))] \quad S(t) \in SO(3)$$

Př: rychlost (absolutní vůči N.A.P.) $\vec{v}(b(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b(t+\Delta t) - b(t)}{\Delta t}$ vyjadřuje rychlost vůči absolutnímu prostoru a proto ale dokážeme měřit rychlost pouze vůči vztahovým tělům, proto definujeme

Relativní veličiny - definované vůči vztahové soustavě $\langle \sigma, (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \rangle$ (kartézské ?) O.N. báze B

- Polohový vektor $\vec{x}(b)$ $x_i = (b - \sigma) \cdot \vec{e}_i$
- Vektor rychlosti $\vec{v}(b) = \dot{\vec{x}}(b) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(b(t+\Delta t)) - \vec{x}(b(t))}{\Delta t}$ $v_i = \dot{x}_i$
- Vektor zrychlení $\vec{a}(b) = \dot{\vec{v}}(b) = \ddot{\vec{x}}(b)$ $a_i = \dot{v}_i = \ddot{x}_i$

Pozn: při změně báze se transformují jako vektory, ale při změně vztahové soustavy je "transformace" složitější, jde totiž o změnu vektoru, nejen jeho složek



Newtonovy pohybové zákony (1687) formulované v Newtonově absolutním prostoru

1. N. Z. Těleso na které nepůsobí vnější síly se pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Těleso $\rightarrow$ hmotný bod - idealizace, objekt charakterizovaný hmotností a polohou

Vnější síly - právě (ne seberačn) síly u kterých lze určit objekt, který je jejich původcem

Rovnoměrný přímočarý pohyb - v kartézských souřadnicích $x_i(t) = \underbrace{v_i t + x_{0i}}_{\substack{\text{lineární závislost} \\ \text{na čase}}} \quad \dot{x}_i = v_i = \text{konst.}$
 $\ddot{x}_i = 0 \quad \forall i$
 (nahmýtl i klid)

Pozn Pokud zvolíme počátek $O = b(1)$ tak vezmeme $x_i(b(1)) = 0$ je lineární pro lib. pohyb $\Rightarrow$ pro formulaci pohybových zákonů je důležitý výběr vnitřní soustavy, preferujeme soustavu budouc. tj. ve kterých platí 1. N. Z.

Inerciální vztažná soustava - soustava ve které platí 1. N. Z. (tj. pro bezsilové body platí $\ddot{x}_i = 0$).

Na inerciální lze považovat soustavu se středem ve středu Slunce a osami směřujícími ke stálým
 • soustava stejnou formu se zdá (mají laboratorní) pouze pro $\Delta t \ll 24 \text{ h}$

Transformace mezi inerciálními soustavami $\langle O, (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \rangle \quad \vec{O}(1) = O + \vec{w}(1) \quad \ddot{x}_i(b(1)) = 0$
 $\langle \tilde{O}(1), (\tilde{\vec{e}}_1(1), \dots, \tilde{\vec{e}}_n(1)) \rangle \quad \tilde{\vec{e}}_j(1) = \vec{e}_j S_j^i(1) \quad S(1) \in SO(3) \quad \ddot{\tilde{x}}_i(b(1)) = 0$
 $\tilde{x}_i = S_{ji}(x_j - x_j(\tilde{O}))$
 $\dot{\tilde{x}}_i = \dot{S}_{ji}(x_j - x_j(\tilde{O})) + S_{ji}(\dot{x}_j - \dot{x}_j(\tilde{O}))$
 $\ddot{\tilde{x}}_i = \ddot{S}_{ji}(x_j - x_j(\tilde{O})) + 2\dot{S}_{ji}(\dot{x}_j - \dot{x}_j(\tilde{O})) + S_{ji}(\ddot{x}_j - \ddot{x}_j(\tilde{O})) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}_i = 0 \quad \forall i \quad x_i = v_i t + x_{0i}$
 (libovolné konstanty)

odtud $S_{ji}(1) = \text{konst.}$
 $\ddot{x}_j(\tilde{O}) = 0$
 $\Rightarrow \tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_j S_j^i$ osy se neohýbají (ale mohou být natočeny ($S \neq I$))
 $\tilde{O}(1) = O + \vec{w} \cdot 1 + \vec{x}_0$ počátek se pohybuje rovnoměrně přímočaře

Galileiho transformace

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d(1-t_0)}$$

$$\tilde{x}_i = S_{ji}(x_j - w_j t - x_{0j})$$

$$\tilde{t} = t - t_0$$

je dána 10 parametry

$$(S, \vec{w}, \vec{x}_0, t_0) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(\text{grupa } SGal(3) \cong \mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)))$$

$$(1, \vec{x}^T, 1) \begin{pmatrix} 1 & \vec{w}^T & 0 \\ \vec{0} & S & \vec{0} \\ t_0 & \vec{x}_0^T & 1 \end{pmatrix} = (1+t_0, 1, \vec{w}^T + \vec{x}^T S + \vec{x}_0^T, 1)$$

representace v $\mathbb{R}^5$

Galileiho princip relativity

Zákony mechaniky mají stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

$$P_{\vec{x}}: m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$$

$$\vec{x} = S \vec{\tilde{x}} + \vec{w} t + \vec{x}_0$$

$$\dot{\vec{x}} = S \dot{\vec{\tilde{x}}} + \vec{w}$$

$$\ddot{\vec{x}} = S \ddot{\vec{\tilde{x}}}$$

$$m S \ddot{\vec{\tilde{x}}} = S \vec{F}(\vec{\tilde{x}})$$

$$/ S^T = S^{-1}$$

$$m \ddot{\vec{\tilde{x}}} = \vec{F}(\vec{\tilde{x}})$$

Kovariance

důsledek kovariantního tvaru rovnice - veličiny se kterých je sestavena se transformují stejně

stejný tvar = invariance

$$m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \quad \text{tj. difr. } \Phi(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, t) = 0$$

↑
 lze splnit pouze pro invariantní systémy

$$\Phi(\vec{\tilde{x}}, \dot{\vec{\tilde{x}}}, \ddot{\vec{\tilde{x}}}, 1) = 0$$

2.N.Z. Úměna pohybu je úměrná vstředivé síle a nastává ve směru přímky, kdež níž síla působí.

v inerciální vztažné soustavě $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ pro $m = \text{konst.}$ $m\vec{a} = \vec{F}$ v kartézsky souřadnicích $m\ddot{x}_i = F_i \quad \forall i$

v neinerciální vztažné soustavě $m\ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i$ sdílnivé (setrvačné) síly

$$\vec{x} = S^T(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\sigma})) \quad S = S(t) \in SO(3) \quad \vec{\sigma} = \vec{\sigma}(t)$$

$$S\vec{x} = S S^T(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\sigma})) = \vec{x} - \vec{x}(\vec{\sigma}) \quad \frac{d}{dt} \quad \dot{S}\vec{x} + S\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}}(\vec{\sigma}) \quad \frac{d}{dt} \quad \ddot{S}\vec{x} + 2\dot{S}\dot{\vec{x}} + S\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}} - \ddot{\vec{x}}(\vec{\sigma})$$

$$m\ddot{\vec{x}} = m[\ddot{S}\vec{x} + 2\dot{S}\dot{\vec{x}} + S\ddot{\vec{x}} + \ddot{\vec{x}}(\vec{\sigma})] = \vec{F} = S\vec{F} \quad / \cdot S^T = S^{-1}$$

$$m S^T \ddot{S} \vec{x} + m 2 S^T \dot{S} \dot{\vec{x}} + m S^T S \ddot{\vec{x}} + m S^T \ddot{\vec{x}}(\vec{\sigma}) = S^T S \vec{F} = \vec{F}$$

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} - m S^T \ddot{\vec{x}}(\vec{\sigma}) - 2m S^T \dot{S} \dot{\vec{x}} - m S^T \ddot{S} \vec{x}$$

označíme $\tilde{\omega} = -S^T \dot{S} \quad S^T S = 1 \quad \frac{d}{dt} \quad \dot{S}^T S + S^T \dot{S} = 0 \Rightarrow \dot{S}^T S = -S^T \dot{S}$

$\tilde{\omega}^T = (-S^T \dot{S})^T = -\dot{S}^T S = \dot{S}^T S = -\tilde{\omega}$... antisymetrická matice má tři nezávislé složky $\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{\omega}_{ij} = \epsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_k$... pouze v pravotočivé O.N. bázi (Hodgeův dual) $\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_{23} \\ -\omega_{13} \\ \omega_{12} \end{pmatrix}$

$\epsilon_{ijk} \tilde{\omega}_{ij} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} \tilde{\Omega}_l = 2 \delta_{lk} \tilde{\Omega}_l = 2 \tilde{\Omega}_k$

$\tilde{\Omega}_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \tilde{\omega}_{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (S^T \dot{S})_{ij}$

složky pseudovektoru úhlové rychlosti rotace soustavy $\langle \vec{\sigma}, \vec{B} \rangle$ vůči soustavě $\langle \vec{O}, \vec{B} \rangle$ v bázi $\vec{B}$

dále $\tilde{\omega}_{ij} \tilde{\Omega}_j = \epsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_k \tilde{\Omega}_j = -\epsilon_{ikj} \tilde{\Omega}_k \tilde{\Omega}_j = -(\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega})_i \quad \forall i: \tilde{\omega} \tilde{\Omega} = -\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$

členy: $-2m S^T \dot{S} \dot{\vec{x}} = 2m \tilde{\omega} \dot{\vec{x}} = -2m \tilde{\Omega} \times \dot{\vec{x}} = \vec{F}_c$ Coriolisova síla

$S^T \ddot{S} = (S^T \dot{S})' - \dot{S}^T \dot{S} = -\tilde{\omega} - \dot{S}^T \dot{S} S^T \dot{S} = -\tilde{\omega} + S^T \dot{S} S^T \dot{S} = -\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega}$

$-m S^T \ddot{S} \vec{x} = -m(-\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega}) \vec{x} = m \tilde{\omega} \vec{x} - m \tilde{\omega} \tilde{\omega} \vec{x} = \underbrace{m \tilde{\Omega} \times \dot{\vec{x}}}_{\vec{F}_c} - \underbrace{m \tilde{\Omega} \times (\tilde{\Omega} \times \dot{\vec{x}})}_{\vec{F}_e} = \vec{F}_c + \vec{F}_e$ Eulerova odstředivá síla

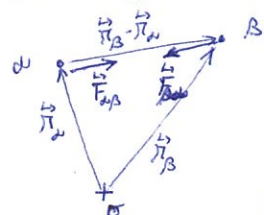
$-m S^T \ddot{\vec{x}}(\vec{\sigma}) = \vec{F}_s$ Setrvačná síla

celkem: $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} - m S^T \ddot{\vec{x}}(\vec{\sigma}) - 2m \tilde{\Omega} \times \dot{\vec{x}} - m \tilde{\Omega} \times (\tilde{\Omega} \times \dot{\vec{x}})$

Pozn: síly Newtonovy mechaniky

1) gravitační síla

$\vec{F}_{aB} = -\mathcal{H} \frac{m_a m_B}{|\vec{r}_a - \vec{r}_B|^3} (\vec{r}_a - \vec{r}_B) = -\vec{F}_{Ba}$



2) síla pružnosti

$\vec{F}_{aB} = -k (\vec{r}_a - \vec{r}_B) = -\vec{F}_{Ba}$

↑ síla kterou B působí na a

jele o definici síly na pravé straně 2.N.Z.

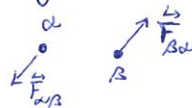
Pozn: vektorem $\vec{F}$ na pravé straně 2.N.Z. může obecně záviset i na rychlostech a čase $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) = S^T \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$

např: $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ - takové síly, ale už není Galileovský invariantní.

3. N. Z. Akce a reakce: Vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejné velká a mají opačný směr.

1. slabá verze

$$\vec{F}_{a\beta} = -\vec{F}_{\beta a}$$



2. silná verze - síly jsou navíc centrální (působí podél spojnice bodů) tj. $(\vec{r}_a - \vec{r}_\beta) \times \vec{F}_{a\beta} = 0$

Newtonova mechanika soustav volných hmotných bodů

pro $N \in \mathbb{N}$ volných hm. bodů v inerciální soustavě platí $\frac{d\vec{p}_a}{dt} = m_a \vec{a}_a = \vec{F}_a = \vec{F}_a^{(e)} + \sum_{\beta=1, \beta \neq a}^N \vec{F}_{a\beta}$ $\forall a \in \mathbb{N}$
Celková hybnost $\vec{P} = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a$

$$\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a = \sum_a \vec{F}_a = \sum_a (\vec{F}_a^{(e)} + \sum_{\beta=1, \beta \neq a}^N \vec{F}_{a\beta}) = \sum_a \vec{F}_a^{(e)} + \sum_{a, \beta=1, a \neq \beta}^N \vec{F}_{a\beta} = \sum_a \vec{F}_a^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$$

les sumace
vnější síly
vzájemní síly

1. Věta Impulsova

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} \leftarrow \text{celková vnější síla}$$

Transformace
soudřadnic

$$\vec{x}'_a = \vec{x}_a - \vec{x}(t)$$

$$\vec{v}'_a = \vec{v}_a - \vec{v}(t)$$

$$\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a m_a (\vec{v}'_a + \vec{v}) = \sum_a m_a \vec{v}'_a + \sum_a m_a \vec{v} = \vec{P}' + M \vec{v}$$

$$\text{Hmotný střed } \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_a m_a \vec{x}_a \quad \vec{P} = M \vec{R}$$

v soustavě spleťujíc $\vec{v} = \frac{\vec{P}}{M}$ je celková hybnost $\vec{P}' = 0$

$$\boxed{\vec{x}_a \equiv \vec{r}_a}$$

Celkový moment hybnosti $\vec{L} = \sum_{a=1}^N \vec{\ell}_a = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a$

$$\vec{L} = \sum_a (\underbrace{\vec{r}_a \times \vec{p}_a}_{=0} + \vec{r}_a \times \dot{\vec{r}}_a) = \sum_a \vec{r}_a \times \dot{\vec{r}}_a \stackrel{2.N.Z.}{=} \sum_a \vec{r}_a \times \vec{F}_a = \sum_a \vec{r}_a \times (\vec{F}_a^{(e)} + \sum_{\beta=1, \beta \neq a}^N \vec{F}_{a\beta}) = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{F}_a^{(e)} + \sum_{a, \beta=1, a \neq \beta}^N \vec{r}_a \times \vec{F}_{a\beta} = \vec{N}^{(e)}$$

$$3.N.Z. \text{ silná forma } \vec{r}_a \times \vec{F}_{a\beta} = \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{a\beta} = -\vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta a} \quad \sum_{a, \beta=1}^N \vec{r}_a \times \vec{F}_{a\beta} = -\sum_{a, \beta=1}^N \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta a} = -\sum_{a, \beta=1}^N \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta a} = 0$$

2. Věta Impulsova

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)} \leftarrow \text{celkový moment vnějších sil}$$

Celková kinetická energie

$$T = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} m_a \vec{v}_a^2$$

vnější síly

$$\dot{T} = \sum_a \frac{1}{2} m_a 2 \vec{v}_a \cdot \dot{\vec{v}}_a = \sum_a \vec{p}_a \cdot \dot{\vec{v}}_a = \sum_a \vec{F}_a \cdot \vec{v}_a = \sum_a (\vec{F}_a^{(e)} + \sum_{\beta=1, \beta \neq a}^N \vec{F}_{a\beta}) \cdot \vec{v}_a = \sum_a \vec{F}_a^{(e)} \cdot \vec{v}_a + \sum_{a, \beta=1, a \neq \beta}^N \vec{F}_{a\beta} \cdot \vec{v}_a = Q^{(e)} - \dot{U}$$

jsou-li vnější síly potenciální

$$\vec{F}_a^{(e)} = -\nabla_a U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \Leftrightarrow \vec{F}_{a\beta}^{(e)} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_{a\beta}} \text{ tak } \sum_a \vec{F}_a^{(e)} \cdot \vec{v}_a = \sum_a -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} \cdot \frac{d\vec{r}_a}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

Celková energie $E = T + U$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{d(T+U)}{dt} = Q^{(e)}}$$

Transformace
soudřadnic

$$\vec{r}'_a = \vec{r}_a - \vec{r}(t)$$

$$\vec{v}'_a = \vec{v}_a - \vec{v}(t)$$

$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a (\vec{v}'_a + \vec{v})^2 = \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{v}'_a^2 + \sum_a m_a \vec{v}'_a \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{v}^2 = T' + \vec{P}' \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} M \vec{v}^2$$

V soustavě Hmotného středě ($\vec{P}' = 0$) $T = T' + \frac{1}{2} M \vec{v}^2$ Kórnigova věta

Izolovaná soustava hmotných bodů - nepůsobí na ni žádné vnější síly ($\vec{F}_a^{(e)} = 0 \quad \forall a \in \hat{N}$)

$$\begin{aligned} \vec{P} &= 0 & \text{Z.Z. celkové hybnosti} & & M\vec{R} &= 0 \Rightarrow \vec{R} = \vec{V} = \text{konst} \Rightarrow \vec{R} = \vec{V} \cdot t + \vec{R}_0 & \text{Z.Z. rychlosti hmotného} \\ \vec{L} &= 0 & \text{Z.Z. celkové momentu hybnosti} & & & & \text{středů} \\ \vec{E} &= 0 & \text{Z.Z. celkové mechanické energie} & & \swarrow & \text{alkem 10. zákona zachování} \end{aligned}$$

Věta o viriálu (1870 Rudolf Clausius) - vztah mezi střední časovou hodnotou celkové kinetické energie a viriálem (přibližně střední časová hodnota celkové potenciální energie soustavy)

Časová střední hodnota funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(t)$ je definována vztahem $\langle f \rangle := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$

Věta: Pokud $\exists F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$, F omezená ($\exists K \in \mathbb{R}$, $|F(t)| \leq K, \forall t \in \mathbb{R}$) tak $\langle f \rangle = \langle \dot{F} \rangle = 0$.

Důkaz: $|\langle f \rangle| = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{T} (F(T) - F(0)) \right| \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{2K}{T} \right| = 0$

Homogenní funkce stupně $k \in \mathbb{N}$ je fce $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(\vec{x})$ taková, že $\forall \lambda > 0$ platí $f(\lambda \vec{x}) = \lambda^k f(\vec{x})$.

Eulerova věta pro
homogenní fce stupně k $\left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} x_j = k f(\vec{x}) \right]$ Důkaz: $\frac{d}{d\lambda} f(\lambda \vec{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\lambda \vec{x})}{\partial (\lambda x_j)} x_j = k \lambda^{k-1} f(\vec{x}) \quad \forall \lambda > 0$
když i pro $\lambda = 1$

Uvažujeme: Oves funkce $Z = Z(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t)$, $Z: \mathbb{R}^{GN+1} \rightarrow \mathbb{R}$ a funkce $\vec{x}_a = \vec{x}_a(t) \quad \forall a \in \hat{N}$
označíme $\tilde{Z} = \tilde{Z}(t) := Z(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t)$ $\tilde{Z}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Věta (o viriálu) Označíme $G = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a \cdot \vec{x}_a$ a $T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a^2$. Oves libovolné řešení $\vec{x}_a = \vec{x}_a(t) \quad \forall a \in \hat{N}$
Newtonových pohybových rovnic $m_a \ddot{\vec{x}}_a = \vec{F}_a \quad \forall a \in \hat{N}$ platí: $\langle \frac{dG}{dt} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{T} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \sum_{a=1}^N \vec{F}_a \cdot \vec{x}_a \rangle$
Důkaz: $2\dot{T} = \sum_a m_a \ddot{\vec{x}}_a \cdot \vec{x}_a = \left(\sum_a m_a \ddot{\vec{x}}_a \cdot \vec{x}_a \right) = \underbrace{\sum_a m_a \ddot{\vec{x}}_a \cdot \vec{x}_a}_{\dot{G}} = \dot{G} - \sum_a \vec{F}_a \cdot \vec{x}_a$
 $\Rightarrow \langle \dot{T} \rangle = \frac{\langle \dot{G} \rangle}{2} - \frac{1}{2} \langle \sum_a \vec{F}_a \cdot \vec{x}_a \rangle$

Pozn: $\langle \dot{G} \rangle = 0$ např. pokud je G omezená funkce
což nastává např. pokud jsou složky $\vec{x}_a$ a rychlosti $\dot{\vec{x}}_a$ omezené funkce $\forall a \in \hat{N}$

Důležité jsou-li navíc síly $\vec{F}_a$ potenciální tj. $\vec{F}_a = -\nabla_{\vec{x}_a} U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_a}$ a potenciál $U = U(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$ je
homogenní funkce stupně k v proměnných $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ tak: $\langle \dot{G} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{T} \rangle = \frac{k}{2} \langle U \rangle$.

Důkaz: $\sum_a \vec{F}_a \cdot \vec{x}_a = \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^3 \vec{F}_{a,i} \cdot \vec{x}_{a,i} = - \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_{a,i}} x_{a,i} = -k U$

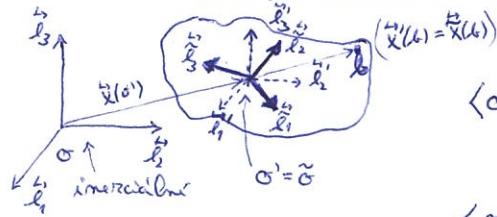
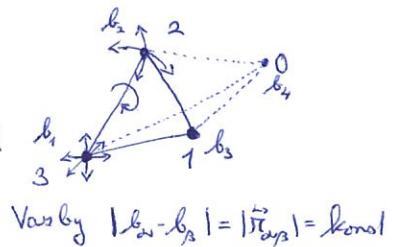
Pokud bychom označili $E = T + U$ "celková energie soustavy"

tak $\langle \tilde{E} \rangle = \langle \dot{T} \rangle + \langle \dot{U} \rangle = (1 + \frac{k}{2}) \langle \dot{U} \rangle \Rightarrow \langle \dot{U} \rangle = \frac{2}{k+2} \langle \tilde{E} \rangle$
 $\langle \dot{T} \rangle = \frac{k}{k+2} \langle \tilde{E} \rangle$

Pokud bude navíc $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ tak
je $\tilde{E}$ konstanta a střední hodnoty $\langle \tilde{E} \rangle = E$.

Mechanika tuhého tělesa

Tuhé těleso - model reálného tělesa, kterému nepodléhá deformacím
 - aproximujeme soustavou km. bodů s neměnných vzdálenostech
 - má $\Delta = 6$ stupňů volnosti (3 translační + 3 rotační)



$\langle \sigma, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rangle$... inerciální vektorová soustava (laboratorní)

$\downarrow \quad \sigma'(t) = \sigma + \vec{R} \quad \vec{e}'_i = \vec{e}_i \quad \vec{x}'(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}(\sigma)$
 $\langle \sigma'(t), B' \equiv B \rangle$... soustava hmotného středu (těžišťová)

$\downarrow \quad \tilde{\sigma}(t) \equiv \sigma(t), \quad \vec{e}'_i(t) = \vec{e}_i \cdot S_{ji}(t), S \in SO(3) \quad \vec{x}(t) = S^T \vec{x}'(t)$
 $\langle \tilde{\sigma}(t) \equiv \sigma(t), \tilde{B} = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3) \rangle$... soustava spojená s tělesem (tělesová)

$$\vec{x}(b_i) = \vec{x}_i = S^T (\vec{x}_i' - \vec{x}(\sigma))$$

$$\vec{x}_i = S \vec{x}_i' + \vec{x}(\sigma) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\dot{\vec{x}}_i = \dot{S} \vec{x}_i' + S \dot{\vec{x}}_i' + \dot{\vec{x}}(\sigma) = \underbrace{\dot{S} S^T}_{-\omega} (\vec{x}_i' - \vec{x}(\sigma)) + \dot{\vec{x}}(\sigma)$$

$\underbrace{\quad}_{\omega} \dots$ body tělesa jsou $\omega \in \langle \tilde{\sigma}, \tilde{B} \rangle$ - tělesu $\vec{x}_i' \dots$ rychlost $\omega \in \langle \sigma', B' \rangle$

Tensor ω $S S^T = \mathbb{I} \Rightarrow \dot{S} S^T + S \dot{S}^T = 0 \Rightarrow \dot{S} S^T = -S \dot{S}^T$

$$\omega^T = (-\dot{S} S^T)^T = -S \dot{S}^T = \dot{S} S^T = -\omega$$

je antisymetrický

chceme: $-\omega \vec{x}_i' = \dot{S} S^T \vec{x}_i' = \vec{\Omega} \times \vec{x}_i'$

$$-\omega_{ijk} x_{i'jk}' = \epsilon_{ijk} \Omega_j x_{i'jk}' \quad \forall x_{i'jk}'$$

$$-\omega_{ijk} = \epsilon_{ijk} \Omega_j \quad / \cdot \epsilon_{ilk}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_{ilk} \omega_{ijk} = -\epsilon_{ilk} \omega_{ijk} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilk} \Omega_j = 2 \delta_{jl} \Omega_j = 2 \Omega_l$$

$$\boxed{\Omega_l = \frac{1}{2} \epsilon_{lik} \omega_{ijk} = -\frac{1}{2} \epsilon_{lik} (\dot{S} S^T)_{ijk}}$$

$\uparrow$ složky úhlové rychlosti rotace tělesa (soustavy $\langle \tilde{\sigma}, \tilde{B} \rangle$) vůči inerciální soustavě $\langle \sigma, B \rangle$ v bazi B

Pozn $\omega \equiv \omega'$ a $\vec{\Omega} \equiv \vec{\Omega}'$ dříve $\vec{\Omega}_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\dot{S} S^T)_{jk} \dots$ složky téhož vektoru $\vec{\Omega}$ v bazi B

$$\dot{\vec{x}}_i = \vec{\Omega} \times (\vec{x}_i - \vec{x}(\sigma)) + \dot{\vec{x}}(\sigma) = \vec{\Omega} \times \vec{x}_i' + \dot{\vec{x}}(\sigma) \quad \forall i \in \mathcal{N} \dots$$

$\dots$ pohyb bodu b_i tělesa je stejný jako složení translace počátku $\tilde{\sigma} \equiv \sigma'$ a rotace kolem tohoto počátku

$\Rightarrow$ úhlová rychlost $\vec{\Omega}$ - nezávislá na volbě počátku - je stejná pro všechny body tělesa

Kinetická energie tuhého tělesa

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{\Omega} \times \vec{x}_i' + \dot{\vec{x}}(\sigma))^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}(\sigma)^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\Omega} \times \vec{x}_i') \cdot \dot{\vec{x}}(\sigma) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\Omega} \times \vec{x}_i')^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \right)}_M \dot{\vec{x}}(\sigma)^2 + \underbrace{\left(\vec{\Omega} \times \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i' \right) \right)}_{M \vec{R}'} \cdot \dot{\vec{x}}(\sigma) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\Omega} \times \vec{x}_i')^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{x}}(\sigma)^2 + M (\vec{\Omega} \times \vec{R}') \cdot \dot{\vec{x}}(\sigma) + \frac{1}{2} \tilde{I}_{jk} \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_k$$

čtem $\sum_{i=1}^N m_i (\vec{\Omega} \times \vec{x}_i')^2 = \sum_{i=1}^N m_i (S \vec{\Omega} \times S \vec{x}_i')^2 \xrightarrow{S \in SO(3)} \sum_{i=1}^N m_i (S (\vec{\Omega} \times \vec{x}_i'))^2 = \sum_{i=1}^N m_i \epsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{x}_{i'k}' \epsilon_{klm} \tilde{\Omega}_l \tilde{x}_{i'm}'$

$$= \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l \tilde{x}_{i'k}' \tilde{x}_{i'm}' = \left[\sum_{i=1}^N m_i (\delta_{il} \tilde{x}_{i'k}'^2 - \tilde{x}_{i'k}' \tilde{x}_{i'k}') \right] \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l = \tilde{I}_{il} \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{x}}(\sigma)^2 + M (\vec{\Omega} \times \vec{R}') \cdot \dot{\vec{x}}(\sigma) + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}^T \tilde{I} \tilde{\Omega}$$

$\underbrace{\quad}_{=0} \dots$ v soustavě hmotného středu

$\tilde{I}_{il} \dots$ moment setrvačnosti tělesa v soustavě $\langle \tilde{\sigma}, \tilde{B} \rangle$ tělesové - tensor

Věta Budť $\tilde{\sigma} \equiv \sigma'$ hmotný střed tuhého tělesa tak $T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \tilde{I}_{jk} \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_k$

$\underbrace{\quad}_{\text{energie translačního}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{energie rotace vůči ose jdoucí těžištěm (kinetická energie T' v těžišťové soustavě)}}$

Tensor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \sum_a m_a (\delta_{jk} x_{aj} x_{aj} - x_{aj} x_{aj})$ $\mathbb{I} = \sum_a m_a (\vec{x}_a^2 \mathbb{1} - \vec{x}_a \vec{x}_a^T)$
 pro stejné rozložení hmoty $I_{jk} = \int_V \rho(\vec{r}) (\delta_{jk} \vec{r}^2 - x_j x_k) dV$ $\vec{x}_a \otimes \vec{x}_a$
 tenzorový součin

Post $\tilde{I}_{jk} = I'_{jk}(t) S_{ij}(t) S_{kl}(t)$ $\tilde{\mathbb{I}} = S^T(t) \mathbb{I}(t) S(t)$ v soustavě spojitě s tělesem měřící na čase!
 $\mathbb{I}(t) = S(t) \tilde{\mathbb{I}} S^T(t)$ v těžištní soustavě měříme jeho složky na čase

transformace $\mathbb{I} \leftrightarrow \mathbb{I}'$ mezi inerciální a těžištní soustavou vede na Steinerovu větu.

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho těžiště ($\langle O, B \rangle \rightarrow \langle O'(t), B \rangle$) složený s rotačním pohybem vůči těžišti ($\langle O', B \rangle \rightarrow \langle O', \tilde{B}(t) \rangle \Rightarrow$ měříme $\tilde{R}(t), \tilde{S}(t)$

1. Věta o impulsové $\vec{P} = \vec{F}^{(e)}$ $\vec{P} = \sum_a m_a \vec{\dot{x}}_a = M \vec{R}$ $\Rightarrow \boxed{M \vec{R} = \vec{F}^{(e)}}$
 v inerciální soustavě

2. Věta o impulsu $\vec{L}' = \vec{N}^{(e)}$ převedeme ji do soustavy $\langle \tilde{O}, \tilde{B} \rangle$ tělesové
 v soustavě hm. středů

$$(\vec{L}')_i = \left(\sum_a m_a \vec{x}'_a \times \vec{\dot{x}}'_a \right)_i = \left(\sum_a m_a \vec{x}'_a \times (\vec{\Omega} \times \vec{x}'_a) \right)_i = \sum_a m_a x'_{aj} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \Omega_{le} x'_{am} =$$

$$= \sum_a m_a (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x'_{aj} x'_{am} \Omega_{le} = \sum_a m_a (\delta_{il} x'_{aj} x'_{aj} - x'_{al} x'_{aj}) \Omega_{le} = I'_{il} \Omega_{le} = (\mathbb{I}' \vec{\Omega})_i$$

$\vec{L}' = \mathbb{I}' \vec{\Omega} = S \tilde{\mathbb{I}} S^T \tilde{\Omega} = S \tilde{\mathbb{I}} \tilde{\Omega}$
 $(\vec{L}')_{\tilde{B}} \dots$ tenzor měří v $\tilde{L}$, ne soustavě $\langle \tilde{O}, \tilde{B} \rangle$ tělesové je moment hybnosti nulový $\tilde{L} = 0$

$\vec{L}' = (S \tilde{\mathbb{I}} \tilde{\Omega})' = \dot{S} \tilde{\mathbb{I}} \tilde{\Omega} + S \dot{\tilde{\mathbb{I}}} \tilde{\Omega} + S \tilde{\mathbb{I}} \dot{\tilde{\Omega}} \stackrel{2.v.1.}{=} \vec{N}^{(e)} = \sum_a \vec{x}'_a \times \vec{F}_a^{(e)} = \sum_a (S \vec{x}_a) \times (S \vec{F}_a^{(e)}) = S (\sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_a^{(e)}) = S \vec{N}$
 $\vec{N} \cdot S^T$

$\underbrace{S^T \dot{S}}_{\vec{\Omega} \times \dots = -\vec{\omega} \dots} \tilde{\mathbb{I}} \tilde{\Omega} + \underbrace{S^T S}_{\mathbb{1}} \dot{\tilde{\mathbb{I}}} \tilde{\Omega} = \underbrace{S^T S}_{\mathbb{1}} \vec{N}^{(e)} \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} \times (\tilde{\mathbb{I}} \tilde{\Omega}) + \tilde{\mathbb{I}} \dot{\tilde{\Omega}} = \vec{N}^{(e)}}$

Eulerovy setrvačnické rovnice $\epsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{\mathbb{I}}_{kl} \tilde{\Omega}_l + \tilde{\mathbb{I}}_{ij} \dot{\tilde{\Omega}}_j = \tilde{N}_i^{(e)} \quad \forall i=1,2,3$

Tensor momentu setrvačnosti je symetrický $\tilde{I}_{jk} = \tilde{I}_{kj} \Rightarrow$ je diagonalizovatelný v O.N. bázi (hlavní báze) osy ortogonální vektorem k té bázi se nazývají hlavní osy setrvačnosti

je-li $\tilde{B}$ hlavní báze pro $\tilde{\mathbb{I}}$ tak $\tilde{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_3 \end{pmatrix}$
 hlavní momenty setrvačnosti

Eulerovy setrvačnické rovnice v hlavních osách setrvačnosti pro $\vec{N}^{(e)} = 0$ jsou diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámé $\tilde{\Omega}_i(t)$ to jejich vyřešení rovnice vyřeší rovnice 1. řádu pro neznámé funkce $S_{ij}(t)$

$\epsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{\mathbb{I}}_{kl} \tilde{\Omega}_l + \tilde{\mathbb{I}}_{ij} \dot{\tilde{\Omega}}_j = \tilde{N}_i^{(e)} \quad \forall i=1,2,3$ běžně se píše bez indexů
 bez sumace přes i

$\tilde{\Omega}_i(t) = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (S^T \dot{S})_{jk}$

pro $\vec{N}^{(e)} \neq 0$ jde o diffr. 2. řádu pro neznámé $S_{ij}(t)$ neboť $\vec{N}^{(e)} = S^T \vec{N}^{(e)}$

Sekvancíky - volný (bezmomentový $\vec{N}^{(e)} = 0$) - řešitelný analyticky
 - těžký ($\vec{N}^{(e)} \neq 0$) - řešitelné příklady

Sekvancíky - asymetrický $\vec{I}_1 \neq \vec{I}_2 \neq \vec{I}_3$
 - symetrický $\vec{I}_1 = \vec{I}_2 \neq \vec{I}_3$
 - kulový (sférický) $\vec{I}_1 = \vec{I}_2 = \vec{I}_3$
 - rotátor ($\vec{I}_1 = \vec{I}_2, \vec{I}_3 = 0$) $\bullet \circ \circ$

využití sekvancíky s mechybným těžištěm (Euler)
 - symetrický sekvancíky s pevným bodem na hlavní ose rotace $\vec{N}$ tot. těžištěm (Lagrange)
 - symetrický sekvancíky ($\vec{I}_1 = \vec{I}_2 = 2\vec{I}_3$) s pevným bodem v rovině x, y (Hlavatovská)

1. Volný sférický sekvancíky $\vec{I}_1 = \vec{I}_2 = \vec{I}_3, \vec{N}^{(e)} = 0$ Euler. rca. $\vec{I}_j \cdot \ddot{\vec{\Omega}}_j = 0 \quad \forall j=1,2,3 \Rightarrow \ddot{\vec{\Omega}}(t) = \text{konst.}$

2. Volný symetrický sekvancíky $\vec{I}_1 = \vec{I}_2 \neq \vec{I}_3, \vec{N}^{(e)} = 0$

$$\epsilon_{ijk} I_k \Omega_j \Omega_k + I_i \dot{\Omega}_i = N_i^{(e)} \quad \forall i=1,2,3$$

$$I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 = 0 \quad / \frac{d}{dt} \quad I_1 \ddot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \dot{\Omega}_2 \Omega_3 = 0$$

$$I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_1 \Omega_3 = 0 \Rightarrow \dot{\Omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \Omega_3 \Omega_1$$

$$I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_2 \Omega_1 = 0 \Rightarrow \dot{\Omega}_3 = 0 \Rightarrow \Omega_3(t) = \text{konst.}$$

dosazením

$$\ddot{\Omega}_1 + \frac{(I_3 - I_1)^2}{I_1^2} \Omega_3^2 \Omega_1 = 0$$

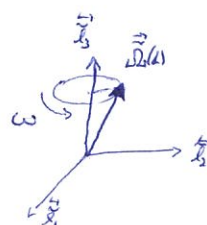
což $\omega^2 > 0$

$$\omega = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \Omega_3 \right)$$

řešení

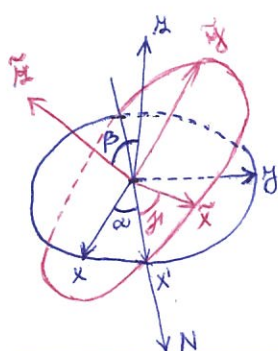
$$\begin{cases} \Omega_1 = A \cos(\omega t + \varphi) \\ \Omega_2 = +A \sin(\omega t + \varphi) \\ \Omega_3 = \text{konst.} \end{cases}$$

precese ... rotace



3. Volný asymetrický sekvancíky (řešení pomocí eliptických funkcí).

Eulerovy úhly



Báze $B \sim (x, y, z)$
 $B' \sim (x', y', z' = z)$
 $B'' \sim (x'' = x', y'', z'')$
 $\tilde{B} \sim (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} = z'')$

otočení o ω kolem osy z
 $B' = B S(\omega)$
 $B'' = B' S(\beta)$
 $\tilde{B} = B'' S(\gamma)$

otočení o β kolem osy x'
 $B'' = B' S(\beta)$
 $\tilde{B} = B'' S(\gamma)$

otočení o γ kolem osy z''
 $\tilde{B} = B'' S(\gamma)$

tedy $\tilde{B} = B'' S(\gamma) = B' S(\beta) S(\gamma) = B S(\omega) S(\beta) S(\gamma)$
 $S \dots$ matice přechodu od $B \rightarrow \tilde{B}$

Orientaci přístroje rovin N volíme tak, aby $z, \tilde{z}, N$ tvořily pravotočivou soustavu

$$S = S(\omega) S(\beta) S(\gamma) = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Omega}_3 & -\tilde{\Omega}_2 \\ 0 & \tilde{\Omega}_1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\omega} = -S^T \dot{S} = \dots = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} + \dot{\omega} \cos \beta & \dot{\beta} \sin \gamma - \dot{\omega} \sin \beta \cos \gamma \\ 0 & \dot{\beta} \cos \gamma + \dot{\omega} \sin \beta \sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jinak (Euler)

$$\vec{\Omega} = \dot{\omega} \vec{z} + \dot{\beta} \vec{x}' + \dot{\gamma} \vec{z}''$$

$$\vec{\Omega} = \dot{\omega} (\vec{e}_3)_B + \dot{\beta} (\vec{e}_1)_{B'} + \dot{\gamma} (\vec{e}_3)_{B''}$$

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\omega} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\omega} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma \\ \dot{\omega} \cos \beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$(\vec{e}_3)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\vec{e}_1)_{B'} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{e}_3)_{B''} = \begin{pmatrix} \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \gamma) = \cos(\gamma - \frac{\pi}{2}) = \sin \gamma \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \gamma) = \cos \gamma$$

$$z \perp N \wedge \tilde{z} \perp N \Rightarrow$$

Pohyby

- Precese $\omega = \omega(t), \beta, \gamma$ konst.
- Nutace $\beta = \beta(t), \omega, \gamma$ konst.
- Rotace $\gamma = \gamma(t), \omega, \beta$ konst.



Analytická Mechanika

Alternativní formulace klasické mechaniky, základní veličiny jsou skalární funkce
 výhody – eliminace síly, snadné zobecnění mimo oblast mechaniky (teorie pole, kvantová mechanika)
 – efektivita pro složité úlohy, elegance, možnost užití vyšší matematiky

Lagrangeova formulace mechaniky (Joseph Louis Lagrange 1788)

Počet stupňů volnosti Δ = počet navzájem nezávislých pohybů, které může mechanická soustava konat

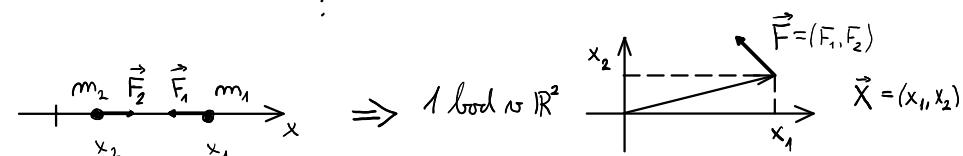
- pro soustavu $N \in \mathbb{N}$ volných částic (hmotných bodů) $\Delta = 3N$
- konfiguraci soustavy (polohu všech jejích bodů) budeme reprezentovat jediným bodem $\vec{X} \in \mathbb{R}^{3N}$ v $3N$ rozměrném euklidovském prostoru tzv. Konfigurační prostor

$$\vec{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (X_1, \dots, X_{3N}) = (x_1, \dots, x_{3N}) \text{ souřadnice tj. } x_{\alpha_i} = X_{(\alpha-1)N+i}$$

později budeme psát malé

- hmotnosti $m_1 = m_2 = m_3$ hmotnost 1. bodu $(X_1, X_2, X_3) = \vec{x}_1$ $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ $\frac{\partial x_{\alpha_i}}{\partial x_{\beta_j}} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}$
 $m_4 = m_5 = m_6$ 2. bodu $(X_4, X_5, X_6) = \vec{x}_2$
 $\vdots$ $\vdots$

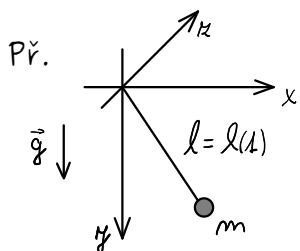
Př. $N=2$ body $\sim \mathbb{R}$



$\Rightarrow 1 \text{ bod } \sim \mathbb{R}^2$

Vazby – jakékoliv podmínky omezující pohyb hm. bodů nebo těles tvořících mechanickou soustavu

- Def. $\left\{ \begin{array}{l} \text{holonomní} - \text{vazby které lze vyjádřit podmínkami tvaru } f_k(\vec{X}, t) = 0, \forall k \in \hat{K} \\ \text{neholonomní} - \text{všechny ostatní (např. } g(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) = 0, |\dot{\vec{X}}| \leq k) \end{array} \right. \leftarrow \text{Snižují počet stupňů volnosti}$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{skleronomní (stacionární)} - \text{nezávislé na čase (např. } f(\vec{X}) = 0, x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0) \\ \text{rheonomní (nestacionární)} - \text{závislé na čase (např. } g(x, y, t) = x \sin t + y \cos t = 0 \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{udržující (oboustranné)} - \text{vyjádřené pomocí rovností} = \\ \text{neudržující (jednostranné)} - \text{vyjádřené pomocí nerovností } >, \geq \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{ideální} - \text{nedochází k disipaci mechanické energie (Virtuální práce vazebných sil je nula)} \\ \text{neideální} - \text{dochází k disipaci energie (např. tření)} \end{array} \right.$

Př.  Matematické kyvadlo s proměnlivou délkou závěsu

vazby: $f_1(z) = z = 0$ holonomní, skleronomní, udržující, ideální
 $f_2(x, y, l) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$ holonomní, rheonomní, udržující, ideální

Pozn. Holonomní vazba je vždy udržující.

Skrytě holonomní vazby – vazby lineární v rychlostech, které lze nahradit holonomními vazbami (semiholonomní)

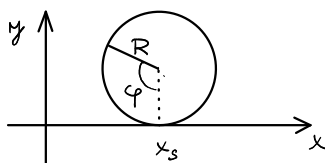
$$\sum_{i=1}^{3N} a_i(\vec{X}, t) \dot{x}_i + b(\vec{X}, t) = 0 \quad \bigg/ \cdot dt \Rightarrow \sum_{i=1}^{3N} \underbrace{a_i(\vec{X}, t) dx_i}_{\approx \frac{\partial f}{\partial x_i}} + \underbrace{b(\vec{X}, t) dt}_{\approx \frac{\partial f}{\partial t}} = 0$$

pokud existuje $f = f(\vec{X}, t)$ tak, že platí $df = LS$ je vazba skrytě holonomní

Vazba je skrytě holonomní pokud $\exists \mu = \mu(\vec{X}, t) \neq 0$ (integrační faktor $\mu(LS) = df$) a platí podmínky:

$$\frac{\partial(\mu a_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu a_j)}{\partial x_i} \quad \frac{\partial(\mu a_i)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu b)}{\partial x_i} \quad \forall i, j \in \hat{3N}$$

Př. Valení válce bez prokluzování
(vzájemná rychlost bodů
dotyku je nulová)



$$\dot{x}_s - R\dot{\varphi} = 0 \quad / \int dt \quad \int \dot{x}_s dt - \int R\dot{\varphi} dt = 0$$

$$dx_s - R d\varphi = 0$$

$$f(x_s, \varphi) = x_s + x_0 - R\varphi = 0 \quad \text{je holonomní}$$

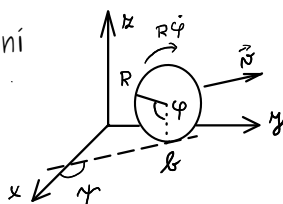
Př. Valení kotouče po rovině bez prokluzování a naklánění

$$? \exists f = f(x, y, \varphi, \psi) = 0?$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} d\psi =$$

$$= (R \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + R \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}) d\varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} d\psi = 0 \quad \forall d\varphi, d\psi$$

Eulerovy úhly
 $\varphi = \alpha$
 $\theta = \beta = \frac{\pi}{2}$
 $\varphi = \gamma$



$$N_R = N - R\dot{\varphi} = 0$$

$$N = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - R\dot{\varphi} = 0$$

$$\dot{x} = R\dot{\varphi} \cos \varphi \quad \dot{y} = R\dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$dx = R \cos \varphi d\varphi \quad dy = R \sin \varphi d\varphi$$

$(\forall \varphi)_\lambda (1, \cos \varphi, \sin \varphi)$ LN soustava

Holonomní soustava – soustava, která je podrobena pouze holonomním a semiholonomním vazbám

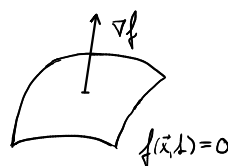
– dále budeme v analytické mechanice pracovat pouze s holonomními soustavami
a zapisovat všechny jejich vazby jako holonomní

Vazbové síly holonomních vazeb (Reakční síly) – nejsou známe předem (narozdíl od akčních sil)

$$\vec{F}^{(vaz)} = \vec{R} = \vec{T} + \vec{N} \in \mathbb{R}^{3N}$$

tečná složka
normálová složka

pro jednu vazbu $f(\vec{x}, t) = 0$



$$\vec{N} = \lambda \nabla f$$

$$N_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, 3N$$

holonomní vazba $\begin{cases} \text{hladká } \vec{T} = 0 \text{ (ideální)} \\ \text{drsna } \vec{T} \neq 0 \text{ (tření, neideální)} \end{cases}$

Př. izotropní vlečné tření $\vec{T}_i = -K|\lambda| \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2} \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\sum \dot{x}_i^2}}$

Lagrangeův multiplikátor

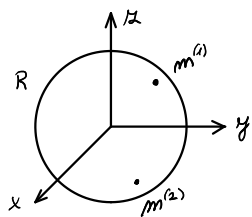
$$\lambda = \lambda(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = ?$$

určuje velikost vazbové síly

pro $\pi \in \mathbb{N}$ hladkých holonomních vazeb $f_k(\vec{x}, t) = 0$ platí $\vec{F}_i^{(vaz)} = \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$

Pozn. Nebude-li řečeno jinak, tak holonomní vazbu považujeme vždy za hladkou.

Př. Dva hmotné body vázané na sféru $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$



$$\vec{X} = (\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = (x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$m^{(1)} = m_1 = m_2 = m_3 \quad m^{(2)} = m_4 = m_5 = m_6$$

$$\text{vazby: } f_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$$

$$f_2(\vec{x}) = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - R^2 = 0$$

stupně volnosti
 $D = 2 \cdot 3 - 2 = 4$

vazebné síly:

$$\vec{F}_1^{(vaz)} = \lambda_1 \nabla f_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2^{(vaz)} = \lambda_2 \nabla f_2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2x_4 \\ 2x_5 \\ 2x_6 \end{pmatrix}$$

$\left. \begin{matrix} \text{síla na 1. částici} \\ \text{síla na druhé částici} \end{matrix} \right\}$

Lagrangeovy rovnice 1. druhu (1775)

– pro soustavu N hmotných bodů s holonomními vazbami
v inerciální vztažné soustavě (kartézské souřadnice)

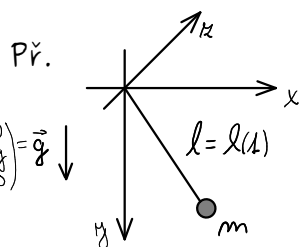
– obyčejné diferenciální rovnice II. řádu pro $3N + \pi$
neznámých funkcí $x_i(t) = ? \quad i \in \widehat{3N} \quad \lambda_k(t) = ? \quad k \in \widehat{\pi} = \{1, 2, \dots, \pi\}$

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

$$f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \widehat{\pi} \quad \forall i \in \widehat{3N}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{\pi} T_k^{(k)}}_{=0}$$

pro hladké vazby



vazby: $f_1(x) = x = 0$
 $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$

$$\vec{F}_1^{(vaz)} = \lambda_1 \nabla f_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2^{(vaz)} = \lambda_2 \nabla f_2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m\ddot{x} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 + 0 + 2\lambda_2 x$$

$$m\ddot{y} = mg + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = mg + 0 + 2\lambda_2 y$$

$$m\ddot{z} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 + \lambda_1 + 0$$

$$\left. \begin{matrix} m\ddot{x} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 + 0 + 2\lambda_2 x \\ m\ddot{y} = mg + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = mg + 0 + 2\lambda_2 y \\ m\ddot{z} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 + \lambda_1 + 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} y\ddot{x} - x\ddot{y} = -xgy \\ \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_2 = \frac{m\ddot{x}}{2x} \end{matrix}$$

substituce
 $x = l \sin \varphi$
 $y = l \cos \varphi$
 $2l\ddot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi} + gl \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi(t)$

Lagrangeovy rovnice 1. druhu $m_i \ddot{x}_i = F_i(\vec{x}, \dot{x}, t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \underbrace{\sum_{k=1}^N T_i^{(k)}}_{=0} \quad \forall i \in \widehat{N} \quad f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \widehat{N}$

1. Operátor úplné časové derivace $\frac{d}{dt} : C^\infty(\mathbb{R}^{K+1}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{(K+1)+1})$ $\frac{d}{dt} : F(\vec{x}, \dot{x}, \dots, \vec{x}^{(K)}, t) \rightarrow \dot{F}(\vec{x}, \dot{x}, \dots, \vec{x}^{(K+1)}, t)$
 pro $F: \mathbb{R}^{2A+1} \rightarrow \mathbb{R}$ $F = F(\vec{x}, \dot{x}, t)$
 $\vec{x}, \dot{x}, t$ nezávislé proměnné $\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(\vec{x}, \dot{x}, t)}$ $\dot{F} = \dot{F}(\vec{x}, \dot{x}, \ddot{x}, t)$ nezávislé proměnné $\dot{x} = \vec{v}$, $\ddot{x} = \vec{a}$

2. parciální derivace podle času $\frac{\partial F}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(\vec{x}, \dot{x}, t + \Delta t) - F(\vec{x}, \dot{x}, t)}{\Delta t}$

3. úplná derivace podle času

$\vec{x} = \vec{x}(t)$ $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(t)$ $\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}(t)$ funkce času
 $\tilde{F}(t) = F(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$ $\dot{\tilde{F}} = \frac{d\tilde{F}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i(t) + \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)}$

$F(\vec{x}, \dot{x}, t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{F}(\vec{x}, \dot{x}, \ddot{x}, t)$
 $\downarrow \vec{x} = \vec{x}(t)$ $\downarrow \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(t)$
 $F(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{F}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t), t)$
 $\tilde{F}(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{\tilde{F}}(t)$

• upravíme levou stranu LR1D $\forall i \in \widehat{N}$ (tj. bez sumace přes i)

$m_i \ddot{x}_i = m_i \frac{d}{dt}(\dot{x}_i) = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} m_i 2 \dot{x}_i) = \frac{d}{dt}(\sum_j \frac{1}{2} m_j 2 \dot{x}_j \delta_{ji}) = \frac{d}{dt}(\sum_j \frac{1}{2} m_j 2 \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i}) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{x}_j^2))$
 $= \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i})$ kde $T(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2$ je kinetická energie soustavy $T(\dot{x})$

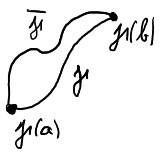
• síly vtiské (akční) na pravé straně LR1D nahradíme potenciály $\rightarrow$ silové pole (síla) $\vec{F}$ se nazývá:

1) konzervativní $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ pokud $\exists U = U(\vec{x})$ potenciální energie tak, že $F_j(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_j} \quad \forall j \in \widehat{N}$

2) potenciální $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, t)$ pokud $\exists U = U(\vec{x}, t)$ potenciál tak, že $F_j(\vec{x}, t) = -\frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial x_j} \quad \forall j \in \widehat{N}$

3) zobecněná potenciální $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{x}, t)$ pokud $\exists U = U(\vec{x}, \dot{x}, t)$ tak, že $F_j(\vec{x}, \dot{x}, t) = -\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}) \quad \forall j \in \widehat{N}$
 zobecněný potenciál

Pozn. práce konzervativních sil $W = \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = - \int_{\gamma} \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} d\vec{x} = - \int_{\gamma} 1 dU = - \int_a^b 1 dU(y(t)) = U(y(a)) - U(y(b))$
 nezávisí na dráze



Pozn. v $\mathbb{R}^3$ podmínka $\text{rot } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}(\vec{x}, t)$ je potenciální

Př. - homogenní tíhové pole $U(\vec{x}) = -m \vec{g} \cdot \vec{x}$

- centrální gravitační pole $U(\vec{x}) = -\mathcal{H} \frac{Mm}{|\vec{x}|}$

- harmonický oscilátor (elastické pole) $U(\vec{x}) = \frac{1}{2} K(\sqrt{\vec{x}^2} - a_0)^2$

- Lorentzova síla (E.M. pole)

$U(\vec{x}, \dot{x}, t) = q(\varphi(\vec{x}, t) - \dot{x} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t))$

$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

• LR1D $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}) = F_i^{(nep)} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}) - \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_i}) - \frac{\partial (T-U)}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$

$\forall i \in \widehat{N} \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \left| \quad f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \widehat{N} \right.$

$T = T(\dot{x})$ tj. $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$

Lagrangeova funkce (v kartézských)

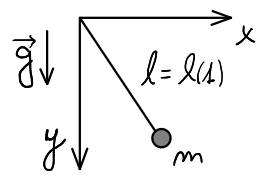
$L = T - U$

$L(\vec{x}, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 - U(\vec{x}, \dot{x}, t)$

• nejednoznačnost Lagrangeovy funkce $L' = L + \frac{d}{dt} h(\vec{x}, t)$ $h = h(\vec{x}, t) \in C^{(2)}$ $\frac{d}{dt} h = \frac{\partial h}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d}{dt} h = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{d}{dt} h \right) = \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$= L S + \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x_i} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_j - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial t} = L S \Rightarrow L \text{ a } L' \text{ vedou na stejné LR1D}$$

Př.  $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ $U = -m \vec{g} \cdot \vec{x} = -mgy$ $L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} (m \dot{x}) - 0 = m \ddot{x} = 2\gamma x$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} (m \dot{y}) - mg = m \ddot{y} - mg = 2\gamma y$$

$$f(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$$

Křivočaré souřadnice v afinním euklidovském prostoru E dimenze $m \in \mathbb{N}$

$\vec{X} = \vec{X}(\vec{y}, t)$ $x^i = \hat{x}^i(y^1, \dots, y^m, t) \quad \forall t \in \hat{M} \quad \hat{x}^i: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ třídy $C^{(2)}$, regulární

↑
kartézské složky polohového vektoru

↑
souřadnice, n-tice čísel nejsou složky vektoru

Jacobián $J = \det \left(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j} \right) = \left| \frac{\partial (\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m)}{\partial (y^1, \dots, y^m)} \right| \neq 0$

tečný vektor

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$


Báze $B = X = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ a $\tilde{B} = Y = (\vec{\tilde{e}}_1, \dots, \vec{\tilde{e}}_m)$ tvořená tečnými vektory k souřadnicovým křivkám $y^j \rightarrow \vec{X}(\vec{y}, t)$

$$\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j \quad (\vec{\tilde{e}}_j)_B = \frac{\partial \vec{X}}{\partial y^j} \Rightarrow \vec{\tilde{e}}_j = \tilde{e}_i = \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j} \partial_i = S^i_j \vec{e}_i \quad S = \left(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j} \right) = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \vec{X}}{\partial y^m} \right)$$

$$\vec{e}_j = \vec{\tilde{e}}_i (S^{-1})^i_j \quad (\vec{e}_j)_B = \frac{\partial \vec{X}}{\partial x^j} \Rightarrow \vec{e}_j = \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \tilde{e}_i = (S^{-1})^i_j \vec{\tilde{e}}_i \quad S^{-1} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) = \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right) = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial y^m}{\partial x^m} \right)$$

Př. polární souřadnice (nenormalizované)

$$x_1 = y_1 \cos y_2 \quad y_1 \in (0, +\infty) \quad y_2 \in (0, 2\pi) \quad S = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) = \begin{pmatrix} \cos y_2 & -y_1 \sin y_2 \\ \sin y_2 & y_1 \cos y_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad y_2 = \arctg \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \quad S^{-1} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$$

Newtonovy rovnice v křivočarých souřadnicích (pro jednu částici s hmotností m v prostoru $\mathbb{R}^m$)

$$m \ddot{x}^i = F^i(\vec{x}, \vec{x}, t) \quad x^i = \hat{x}^i(\vec{y}, t) \quad \dot{x}^i = \dot{\hat{x}}^i(\vec{y}, \dot{\vec{y}}, t) = \frac{d}{dt} \hat{x}^i(\vec{y}, t) = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j} \dot{y}^j + \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial t} \quad \forall i \in \hat{M}$$

$$\ddot{x}^i = \ddot{\hat{x}}^i(\vec{y}, \dot{\vec{y}}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j} \dot{y}^j + \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial y^k \partial y^j} \dot{y}^j \dot{y}^k + \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j} \frac{\partial \dot{y}^j}{\partial t} + \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial t \partial y^j} \dot{y}^j + \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial y^k \partial t} \dot{y}^k + \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial y^k \partial y^j} \dot{y}^j \dot{y}^k + \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j} \ddot{y}^j + 2 \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial t \partial y^j} \dot{y}^j + \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial t^2}$$

$$y^l = y^l(\vec{x}, t) \text{ inverzní transformace}$$

$$m \left[\frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial y^k \partial y^j} \dot{y}^j \dot{y}^k + \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j} \ddot{y}^j + 2 \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial t \partial y^j} \dot{y}^j + \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial t^2} \right] = F^i(\vec{x}, \vec{x}, t) \quad / (S^{-1})^l_i = \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \quad \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j} = \frac{\partial y^l}{\partial y^j} = \delta^l_j$$

$$m \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \left[\frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial y^k \partial y^j} \dot{y}^j \dot{y}^k + 2 \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial t \partial y^j} \dot{y}^j + \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial t^2} \right] + m \ddot{y}^l = \frac{\partial y^l}{\partial x^i} F^i(\vec{x}, \vec{x}, t) = \tilde{F}^l(\vec{y}, \dot{\vec{y}}, t) \quad \forall l \in \hat{M}$$

polynom 2. stupně v rychlostech $\stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow$ Galileiho transformace je lineární funkcí souřadnic a času

Př. polární souřadnice (nenormalizované)

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial y_k \partial y_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin y_2 \\ -\sin y_2 & -y_1 \cos y_2 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial y_k \partial y_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y_2 \\ \cos y_2 & -y_1 \sin y_2 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{\partial y_l}{\partial x_i} \right) = S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos y_2 & \sin y_2 \\ -\frac{\sin y_2}{y_1} & \frac{\cos y_2}{y_1} \end{pmatrix}$$

$$m \begin{pmatrix} \cos y_2 & \sin y_2 \\ -\frac{\sin y_2}{y_1} & \frac{\cos y_2}{y_1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \dot{y}_1 \dot{y}_2 \sin y_2 - y_1 \dot{y}_2^2 \cos y_2 \\ 2 \dot{y}_1 \dot{y}_2 \cos y_2 - y_1 \dot{y}_2^2 \sin y_2 \end{bmatrix} + m \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \cos y_2 + F_2 \sin y_2 \\ -F_1 \sin y_2 + F_2 \cos y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} m(\ddot{y}_1 - y_1 \dot{y}_2^2) &= \tilde{F}_1 \\ m(\ddot{y}_2 + \frac{2}{y_1} \dot{y}_1 \dot{y}_2) &= \tilde{F}_2 \end{aligned}$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

(pro holonomní soustavy)

soustava N hm. bodů s $\pi \in \mathbb{N}_0$ (nezávislými) holonomními vazbami $f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{\pi}$ (fce. třídy $C^{(2)}$)

Konfigurační prostor (varieta) ... množina všech možných konfigurací (poloh všech bodů) soustavy

$$M(t) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{\pi} \} \subseteq \mathbb{R}^{3N}$$

dimenze $M(t)$ = dimenze tečného prostoru k $M(t)$

Vazby jsou nezávislé, pokud nelze žádnou z nich vynechat, aniž by se změnil konfigurační prostor.

Pokud je $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_\pi) \quad \forall \vec{x} \in M(t), \forall t$ lineárně nezávislý soubor vektorů, pak jsou vazby $f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{\pi}$ nezávislé a platí $\dim M(t) = 3N - \pi = \Delta$ (počet stupňů volnosti).

Jsou-li vazby závislé, pak přebytečné vazby vypustíme a zbylých π nezávislých vazeb zapíšeme v takovém tvaru, aby jejich gradienty tvořily lineárně nezávislý soubor tj. aby hodnota matice

$$h \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\pi}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_\pi}{\partial x_{3N}} \end{pmatrix} = \pi \quad \forall \vec{x} \in M(t) \quad \forall t.$$

"obecné rovnice"
konf. prostoru

Obecné (zobecněné) souřadnice $q_j, j \in \hat{\Delta}$

vhodně zvolené parametry, které jednoznačně popisují možné konfigurace soustavy
(lokální souřadnice na konfigurační varietě)

$$\vec{x} = \vec{\hat{x}}(\vec{q}, t) \quad \vec{\hat{x}}: \mathbb{R}^{\Delta+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$$

$$x_i = \hat{x}_i(q_1, \dots, q_\Delta, t) \quad i \in \hat{3N} \quad \text{parametrické rovnice konf. prostoru (z věty o implicitní funkci) } h \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) = \Delta$$

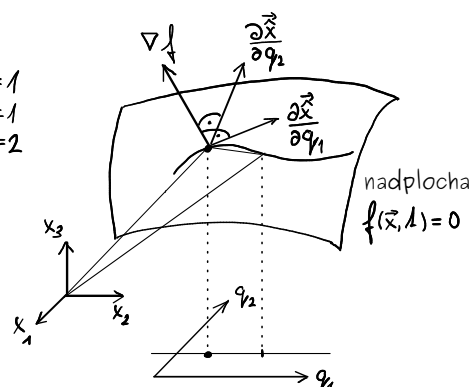
funkce třídy $C^{(2)}$ zvolené tak, aby splnily vazby:

$$\hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\vec{\hat{x}}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall \vec{q} \quad \forall t \quad \forall k \in \hat{\pi}$$

$$0 = \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \nabla f_k \cdot \frac{\partial \vec{\hat{x}}}{\partial q_j}$$

skalární součin
tečný vektor k j -té souřadnicové křivce ležící v nadploše
normálový vektor k nadploše $f_k(\vec{x}, t) = 0$

Př. $\mathbb{R}^3$
 $N=1$
 $\pi=1$
 $\Delta=2$



Pozn. závislost na čase je dána vývojem vazby, v případě skleronomních vazeb bude $x_i = \hat{x}_i(\vec{q}) \quad \forall i \in \hat{3N}$

Př. 1) jeden bod v $\mathbb{R}^3$

$$f(\vec{x}, t) = x_1 + x_2 + x_3 - ct = 0$$

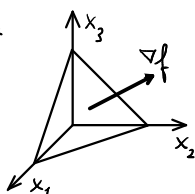
$$M = \text{rovina s normálou } \nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obecné souřadnice q_1, q_2

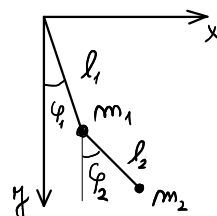
$$x_1 = q_1$$

$$x_2 = q_2$$

$$x_3 = ct - q_1 - q_2$$



2) dvojitě matematické kyvadlo v rovině



$$f_1(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$$M = T^2 = S_1 \times S_2 \text{ torus}$$

obecné souřadnice φ_1, φ_2

$$x_1 = l_1 \sin \varphi_1$$

$$y_1 = l_1 \cos \varphi_1$$

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2$$

$$y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2$$

$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ 2(x_2 - x_1) \\ 2(y_2 - y_1) \end{pmatrix}$$

3) bod na povrchu koule a válece

$$f_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$$

$$f_2(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$$

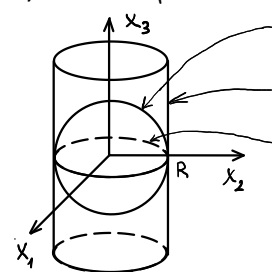
M = kružnice s osou z a středem v počátku

popíšeme M pomocí funkcí s LN gradienty

$$f_1(\vec{x}) - f_2(\vec{x}) = x_3^2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{f}_1(\vec{x}) = x_3 = 0$$

$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ jsou LZ pro } x_3 = 0$$

$$\nabla \tilde{f}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ jsou LN na } M$$



Lagrangeovy rovnice 1. druhu
převědeme do obecných souřadnic

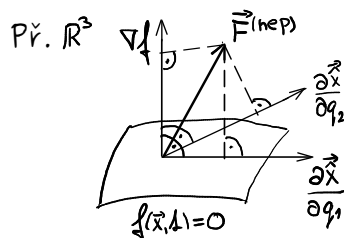
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \forall i \in 3N \quad f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{\pi}$$

$x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, t) \quad \forall i \in 3N$ tím splníme π vazebných podmínek $f_k(\vec{q}, t) = f_k(\hat{x}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall k \in \hat{\pi} \quad \forall \vec{q} \quad \forall t$
Zbýlých $3N$ diferenciálních rovnic vezmeme jako sloupcový vektor a přenásobíme maticí S^T

kde $S = \left(\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \hat{x}_{3N}}{\partial q_{3N}}, \nabla f_1, \dots, \nabla f_{\pi} \right)$ je regulární matice řádu $3N \times 3N$

báze tečného a normálového prostoru k $M(t)$

$$(1) \quad \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] = \underbrace{\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}}_{Q_j^{(nep)}} + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}_{\nabla f_k \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial q_j} = 0} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \quad \text{prvních } s \text{ rovnic} \quad \forall j \in \hat{s} \quad \left/ \sum_{i=1}^{3N} \right.$$



$$(2) \quad \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial f_l}{\partial x_i} F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_l}{\partial x_i}}_{\nabla f_k \cdot \nabla f_l = G_{kl}} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \quad \text{dalších } r \text{ rovnic} \quad \forall l \in \hat{r} \quad \left/ \sum_{i=1}^{3N} \right. \cdot (G^{-1})_{lm}$$

prvky Gramovy matice souboru $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_{\pi})$
 $\det G = \det(G_{kl}) \neq 0 \Leftrightarrow$ je LN soubor

$$(G^{-1})_{lm} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] - \frac{\partial f_l}{\partial x_i} F_i^{(nep)} \right) = \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k G_{kl} (G^{-1})_{lm} = \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \delta_{km} = \lambda_m \quad \forall m \in \hat{r} \quad \left/ \sum_{i=1}^{3N} \right.$$

Tím je těchto r rovnic vyřešeno. Dále upravíme levou stranu prvních s rovnic. K tomu využijeme:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} = 0 = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} \quad x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, t) \quad \dot{x}_i = \dot{\hat{x}}_i = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad \dot{x}_i = \dot{\hat{x}}_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

obecné souřadnice a rychlosti jsou navzájem nezávislé

$$1) \quad \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad 2) \quad \frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} + 0 = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta_{jk} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k} \quad \text{"pravidlo krácení teček"}$$

$$3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d \hat{x}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \quad \forall j \in \hat{s}}$$

- neobsahují vazbové síly

- jejich tvar nezávisí na konkrétní volbě obecných souřadnic

- rovnice pro proměnné $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ dosazením $q_i = \tilde{q}_i(t), \dot{q}_i = \dot{\tilde{q}}_i(t), \ddot{q}_i = \ddot{\tilde{q}}_i(t)$ dostaneme obyčejné difr. 2. řádu

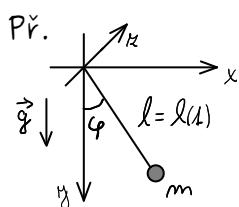
Obecná nepotenciální síla

$$Q_j^{(nep)} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}$$

Lagrangeova funkce (v obecných) - není určena jednoznačně

$$\hat{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{x}(\vec{q}, t), \dot{\vec{x}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t), t) \quad \hat{L}' = \hat{L} + \frac{d}{dt} h(\vec{q}, t)$$

při $Q_j^{(nep)} = 0$ plně charakterizuje holonomní soustavu s ideálními vazbami



vazby: $f_1(x) = x = 0$

$$f_2(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

$$\Delta = 3 - 2 = 1$$

obecné souřadnice φ

$$x = l(1) \sin \varphi$$

$$y = l(1) \cos \varphi$$

$$z = 0$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy$$

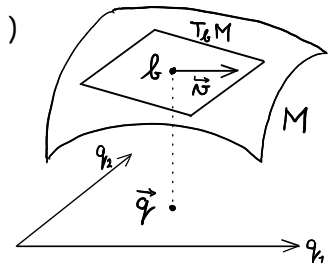
$$\hat{L} = \frac{1}{2} m (l^2(1) \dot{\varphi}^2) + mgl(1) \cos \varphi$$

$$\text{LR2.D} \quad 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (m l^2(1) \dot{\varphi}) - (-mgl(1) \sin \varphi) = 2m l(1) \dot{l}(1) \dot{\varphi} + m l^2(1) \ddot{\varphi} + mgl(1) \sin \varphi$$

Pozorovatelné veličiny (polohy, rychlosti, hybnosti, momenty, síly, energie ...)

jsou funkce $2\Delta+1$ proměnných $\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \lambda$ na tzv.

rozšířeném rychlostním fázovém prostoru $\underbrace{TM}_{\text{tečný bandl}} \times \mathbb{R}$ kde $TM = \bigcup_{b \in M} \underbrace{T_b M}_{\text{tečný prostor k M v bodě b}}$



Kinetická energie v obecných souřadnicích

$$\begin{aligned} \hat{T}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \lambda) &= T(\vec{X}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \lambda)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{\hat{X}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \underbrace{\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}}_{\beta_{kl}(\vec{q}, \lambda)} \dot{q}_k \dot{q}_l + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \underbrace{\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}}_{\beta_l(\vec{q}, \lambda)} \dot{q}_l + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \underbrace{\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial \lambda}}_{\omega(\vec{q}, \lambda)} = \underbrace{\frac{1}{2} T_{kl}(\vec{q}, \lambda) \dot{q}_k \dot{q}_l}_{\text{P.D.}} + \beta_k(\vec{q}, \lambda) \dot{q}_k + \omega(\vec{q}, \lambda) \end{aligned}$$

• pokud jsou všechny vazby skleronomní pak $\hat{T}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}) = \frac{1}{2} T_{kl}(\vec{q}) \dot{q}_k \dot{q}_l$ je homogenní stupně 2 v rychlostech

Obecná síla $Q_j = \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} + Q_j^{(nep)}$

Obecná (kanonická) hybnost $p_j = p_j(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \lambda) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \lambda)$
(nemusi mít rozměr hybnosti)

Pozn. LR2D: $\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = Q_j^{(nep)} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} \Leftrightarrow \dot{p}_j = Q_j$

Př. $L = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - e(\varphi - \dot{x}_i A_i)$ $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j + e A_j \neq m \dot{x}_j$

Obecná energie $E = E(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \lambda) = \sum_{i=1}^{\Delta} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \hat{L}$
(má rozměr energie)

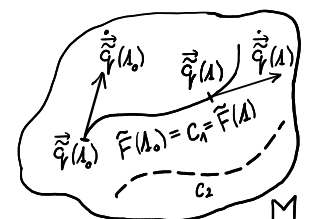
Pokud je $\hat{T}$ homogenní fce. 2. stupně v rychlostech $\vec{\dot{q}}$ (všechny vazby jsou skleronomní) a $\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall i \in \Delta$ pak E je celková mechanická energie soustavy.

$$E = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \hat{L} = \underbrace{\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i}_{=2\hat{T}} - \underbrace{\hat{L}}_{=\hat{U}} = \hat{T} - \hat{U} = \hat{T} + \hat{U}$$

Integrály pohybu (zákony zachování) – jsou 1. integrály pohyb. rovnic, fce. konstantní podél trajektorie

Funkce $F(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \lambda)$ je integrálem pohybu pro systém popsaný pohybovými rovnicemi $\vec{R}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \vec{\ddot{q}}, \lambda) = 0$, pokud pro každé jejich řešení $\vec{q} = \vec{q}(\lambda)$ (tzv. trajektorii) $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $\tilde{F}(\lambda) = F(\vec{q}(\lambda), \vec{\dot{q}}(\lambda), \lambda) = c \quad \forall \lambda$.

Funkce $F = F(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \lambda)$ je I. P. $\Leftrightarrow 0 = \frac{dF}{d\lambda} \Big|_{\vec{R}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \vec{\ddot{q}}, \lambda) = 0} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\vec{R}=0}$
 $\Rightarrow \ddot{q}_i = G_i(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \lambda)$
ověřit, že F je I. P. znamená řešit LR2D jako lineární algebraické rovnice pro $\vec{\ddot{q}}$ a toto řešení dosadit do $\frac{dF}{d\lambda} = 0$



Dále budeme předpokládat, že na soustavu nepůsobí žádné nepotenciální síly tj. $Q_j^{(nep)} = 0$, pak lze některé integrály pohybu nalézt na základě chybějících proměnných v předpisu Lagrangeovy funkce:

1) čas λ $\hat{L} = \hat{L}(\vec{q}, \vec{\dot{q}})$ tj. $\frac{\partial \hat{L}}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow$ obecná energie $E = E(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \lambda) = \text{konst.}$ je I. P.

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \hat{L} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \lambda} \right] = \dot{q}_i \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} \right] - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \lambda} = \underbrace{\dot{q}_i Q_j^{(nep)}}_{\text{LR2D}} - \underbrace{\frac{\partial \hat{L}}{\partial \lambda}}_{\text{výkon sil nepotenciálních}} = 0$$

Pozn. Obecná energie holonomní soustavy se skleronomními vazbami a konzervativními silami je konstantní.

2) cyklická souřadnice q_k , $k \in \hat{A}$ tj. $\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k} = 0 \longrightarrow$ obecná hybnost $p_k = p_k(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t) = \text{konst.}$ je I. P.
je souřadnice, na které
Lagr. fce. $\hat{L}$ nezávisí

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \right) - \underbrace{\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k}}_{=0} = Q_k^{(nep)} = 0 \Rightarrow \frac{dp_k}{dt} = 0 \text{ tj. } \dot{p}_k = 0$$

Pozn. 3) $\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k} = Q_k^{(nep)} = 0$ nenastává

Teorém Noetherové (1915) "Ke každé jednoparametrické grupě transformací konfiguračního prostoru které ponechávají Lagrangeovu funkci invariantní (symetrie Lagr. fce.) existuje integrál pohybu."

Jednoparametrická grupa transformací M je spojitý homomorfizmus grup $\phi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\text{Dif}(M), \circ)$
 $\phi: \varepsilon \rightarrow \phi^\varepsilon \quad \phi^0 = \text{Id} \quad \phi^{\varepsilon+\delta} = \phi^\varepsilon \circ \phi^\delta \quad (\phi^\varepsilon)^{-1} = \phi^{-\varepsilon}$

Transformace (aktivní) $\phi^\varepsilon \in \text{Dif}(M)$ je zde bijekce $\phi^\varepsilon: M \rightarrow M$ taková, že ϕ^ε a $(\phi^\varepsilon)^{-1}$ jsou třídy C^n

Znění, které dokážeme:

Transformace (aktivní)

Invariance Lagrangeovy funkce $\forall \vec{q} \forall \vec{\dot{q}} \forall t \forall \varepsilon$

$$q'_i = q'_i(\vec{q}, \varepsilon) = \phi^\varepsilon_i(\vec{q}) \text{ fce. třídy } C^{(2)}, \det \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_j} \right) \neq 0$$

$$L'(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t, \varepsilon) := L(\vec{q}'(\vec{q}, \varepsilon), \vec{\dot{q}}'(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \varepsilon), t) = L(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)$$

$$q'_i(\vec{q}, 0) = q_i \quad \forall j \in \hat{A}$$

$\Downarrow$

$$\dot{q}'_i = \dot{q}'_i(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \varepsilon) = \phi^\varepsilon_{*j}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}) = \frac{d q'_i}{d t} = \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\text{Veličina } I(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t) = \sum_{k=1}^A \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \text{ je I. P.}$$

Důkaz: invariance $L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \forall \vec{q} \forall \vec{\dot{q}} \forall t$

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t, \varepsilon)} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \Big|_{(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)} \cdot \frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Big|_{(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)} \cdot \frac{\partial \dot{q}'_k}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} =$$

$$\frac{\partial \dot{q}'_k}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{d q'_k}{d t} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial q'_k}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial q'_k}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} \right) \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} \right)$$

zeslabíme požadavky z $\forall \varepsilon$
na $\varepsilon = 0$ a dosadíme z LR2D

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \Big|_{(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)} \cdot \frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q'_k}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt} (I) \Big|_{\vec{R}=0}$$

$$\text{LR2D } \vec{R}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t, \varepsilon) = 0 \Rightarrow \ddot{Q}_i^{(nep)} = 0 \quad \forall i \in \hat{A} \quad \text{QED.}$$

$$\text{Pozn. } L'(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t, \varepsilon) = L'(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t, 0) + \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [L'(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t, \varepsilon) - L(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)]$$

Infinitesimální verze teorému:

Transformace (Taylorův rozvoj do 1. řádu v ε)

Invariance L do 1. řádu v $\varepsilon \quad \forall \vec{q} \forall \vec{\dot{q}} \forall t$

$$q'_i = q'_i(\vec{q}, 0) + \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^2) = q_i + Y_i \cdot \varepsilon \quad Y_i = \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = Y_i(\vec{q})$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial q_i} Y_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{Y}_i = 0$$

$$\dot{q}'_i = \frac{d q'_i}{d t} = \dot{q}_i + \dot{Y}_i \cdot \varepsilon \quad \text{kde } \dot{Y}_i = \frac{\partial Y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

vektorové pole tzv.
generátor transformace

$$\text{Veličina } I(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t) = \sum_{k=1}^A \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} Y_k \text{ je I. P.}$$

Př. rotace kolem osy x_3

Infinitesimálně

$$x'_1 = x_1 \cos \varepsilon - x_2 \sin \varepsilon \quad Y_1 = \left(\frac{\partial x'_1}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = (-x_1 \sin \varepsilon - x_2 \cos \varepsilon)_{\varepsilon=0} = -x_2$$

$$x'_1 = x_1 - x_2 \varepsilon$$

$$x'_2 = x_1 \sin \varepsilon + x_2 \cos \varepsilon \quad Y_2 = \left(\frac{\partial x'_2}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = (x_1 \cos \varepsilon - x_2 \sin \varepsilon)_{\varepsilon=0} = x_1$$

$$x'_2 = x_2 + x_1 \varepsilon$$

$$x'_3 = x_3 \quad Y_3 = \left(\frac{\partial x'_3}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0$$

$$x'_3 = x_3$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \text{Id} \vec{x} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Pokud

Pozn. původní transformace $\vec{x}' = \exp(\varepsilon A) \vec{x}$

$$L(\vec{x}', \vec{x}', t) = L(\vec{x}, \vec{x}, t) \Rightarrow I = \sum_{i=1}^A \frac{\partial L}{\partial x_i} Y_i = p_i Y_i = p_1 (-x_2) + p_2 x_1 + 0 = L_3$$

$$\exp(\varepsilon A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(pro infinitesimální do 1. řádu v ε)

Základní principy mechaniky

– jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

• **Diferenciální principy** – určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

1, **Princip virtuální práce** (Bernoulli 1708–1717) – statická rovnováha systému N částic:

Statická rovnováha (rovnovážná konfigurace) soustavy částic nastává pokud $\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,3N} \end{pmatrix}$ jsou souřadnice všech částic konstantní.

$$\Rightarrow \ddot{\vec{X}}(t) = 0, \ddot{\vec{X}}(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \boxed{\vec{F}(\vec{x}_0, t) = 0 \quad \forall t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\vec{x}_0, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{uvažujeme pouze síly nezávislé na čase}$$

$$\Leftarrow \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0, \dot{\vec{X}}(t_0) = 0, m_i \ddot{\vec{X}}_i(t_0) = \vec{F}_i(\vec{x}_0, 0) = 0 \quad \forall i \in \widehat{3N} \Rightarrow m_i \ddot{\vec{X}}_i(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \vec{F}_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_j \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0, 0) \dot{x}_j(t_0) + \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial \dot{x}_j}(\vec{x}_0, 0) \ddot{x}_j(t_0) = 0$$

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) + \dot{\vec{X}}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\vec{X}}(t_0)(t-t_0)^2 + \dots = \vec{X}_0$$

a) volných

$$(2NZ) \quad 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \Leftrightarrow 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta \vec{x} \quad \forall \delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \quad \text{Vektor } \delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0 \text{ je (virtuální) posunutí z rovnovážné polohy } \vec{x}_0 \text{ do bodu } \vec{x}$$

↑
výslednice sil

(stačilo by pro lib. bázi $\mathbb{R}^{3N}$)
stačí libovolně malé – infinitesimální

Pozn. práce $A = \int \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ po křivce γ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(t) dt$)
musí být malé (infinitesimální)

Virtuální práce $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}_0) \cdot \delta \vec{x} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i$ Princip virtuální práce:

je práce sil při virtuálních posunutích $\vec{x}_0$ je rovnovážná konfigurace $\Leftrightarrow \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0) \cdot \delta \vec{x} = 0 \quad \forall \delta \vec{x}$

Pozn. Variace funkce $f = f(\vec{x}, t)$ $f(\vec{x} + \delta \vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j + \dots = f(\vec{x}, t) + \delta f(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \delta^2 f(\vec{x}, t) + \dots$
(izochronní $\delta t = 0$)
 $\delta f = \text{lineární část } [f(\vec{x} + \delta \vec{x}, t) - f(\vec{x}, t)] = \delta f$ $\delta^2 f$

Jsou-li všechny síly konzervativní

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \quad \text{pak}$$

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{x} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \cdot \delta \vec{x} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i = -\delta U$$

a rovnovážné polohy $\vec{x}_0$ jsou stacionární body $\delta U(\vec{x}_0) = 0$ potenciální energie.

Typ polohy

$U(\vec{x}_0)$

např.

• stabilní

minimum

$$\delta^2 U(\vec{x}_0) > 0$$

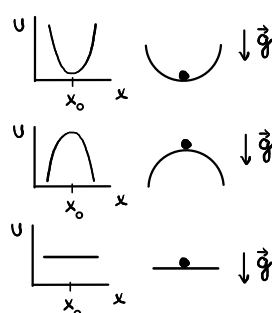
• labilní

maximum

$$\delta^2 U(\vec{x}_0) < 0$$

• indiferentní ostatní

$$(\delta^2 U = 0)$$



b) vázaných – podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x}) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$

$$(LR1D) \quad 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) + \vec{R}(\vec{x}_0, 0) = \vec{F} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k \Leftrightarrow 0 = (\vec{F} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k) \cdot \delta \vec{x} \quad \forall \delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$$

vtištěné síly
(akční)

vazbové síly
(reakční)

$$f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$$

$$f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$$

Rozložíme posunutí a síly do směru tečného a normálového ke konf. pr. M v bodě $\vec{x}_0$.

$$\delta \vec{x} = \delta \vec{x}^T + \delta \vec{x}^N \quad \vec{F} = \vec{F}^T + \vec{F}^N$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\vec{F}^T + \vec{F}^N + \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k) \cdot (\delta \vec{x}^T + \delta \vec{x}^N) = \underbrace{(\vec{F}^T + \vec{F}^N)}_{\vec{F}} \cdot \delta \vec{x}^T + \sum_{k=1}^n \underbrace{\lambda_k \nabla f_k \cdot \delta \vec{x}^T}_{=0} + \underbrace{\vec{F}^T \cdot \delta \vec{x}^N}_{=0} + \underbrace{(\vec{F}^N + \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k)}_{=0} \cdot \delta \vec{x}^N = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta \vec{x}^T \quad \forall \delta \vec{x}^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$$

zvolíme $-\lambda_k$ jako složky $\vec{F}^N$ v bázi $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_n)$ normálového prostoru k M v bodě $\vec{x}_0$. $\delta \vec{x}^T \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$

Princip virtuální práce

$$\delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta \vec{x} = 0 \quad \forall \delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n} \quad \delta \vec{x} \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0$$

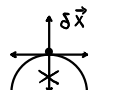
Soustava částic je v rovnovážné konfiguraci $\vec{x}_0 \in M \subset \mathbb{R}^{3N} \Leftrightarrow$

virtuální práce vtištěných sil je rovna nule $\delta A(\vec{x}_0) = 0 \Leftrightarrow$

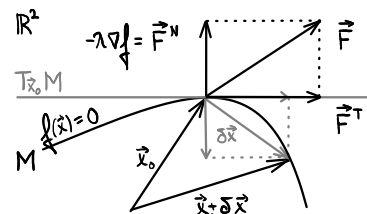
práce vtištěných sil při virtuálních posunutích ve shodě s vazbami je nulová.

Pozn. uvažovali jsme pouze udržující vazby a jim odpovídající vatná posunutí ($\forall \delta \vec{x} \exists -\delta \vec{x}$)

pro neudržující vazby a nevratná posunutí je třeba princip modifikovat $\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{x} \leq 0$



Posunutí ve shodě s vazbou $f(\vec{x})=0$ $\underbrace{f(\vec{x}_0+\delta\vec{x})=f(\vec{x}_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{x}}_{=0} + \underbrace{O(|\delta\vec{x}|^2)}_{=0}$
 Virtuální posunutí – myšlené okamžité infinitezimální posunutí ve shodě s vazbou

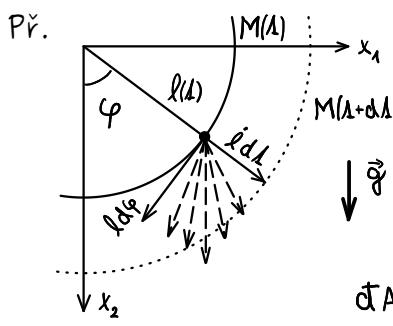


Jsou-li všechny vtištěné síly konzervativní $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x})$ pak $0 = \delta A = (-\nabla U + \lambda \nabla f) \cdot \delta \vec{x} = -\delta(U - \lambda f) = -\delta \tilde{U}$
 a úloha se redukuje na hledání vázaného extrému funkce $U(\vec{x})$ vzhledem k varietě M

t. j. $\delta \tilde{U}(\vec{x}_0) = 0$ $f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \hat{n}$ $\frac{\delta^2 \tilde{U}(\vec{x}_0)}{|\vec{x}_0| M} \begin{cases} > 0 & \text{stabilní} \\ = 0 & \text{labilní} \\ < 0 & \text{indiferentní} \end{cases}$ *potenciální energie vazebných sil*

Infinitezimální posunutí holonomní soustavy s rheonomními vazbami $f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{n}$ $\vec{x} = \vec{x}(q, t)$

- možné (reálné) $0 = d f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt$ $dx_i = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t} dt$ $f(\vec{x}+d\vec{x}, t+dt) = f(\vec{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot d\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \dots$
- virtuální $0 = \delta f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i$ $\delta x_i = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ $f(\vec{x}+\delta\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{x} + \dots$
- skutečné $0 = d \tilde{f}_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \dot{\tilde{x}}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} \right) dt$ $d \tilde{x}_i = \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \dot{\tilde{q}}_j + \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t} \right) dt$ lze získat z možného posunutí dosažením trajektorie $x_i = \tilde{x}_i(t)$, $q_j = \tilde{q}_j(t)$

Př.  $f(x_1, x_2, t) = x_1^2 + x_2^2 - l^2(t) = 0$
 $x_1 = l(t) \sin \varphi$ $x_2 = l(t) \cos \varphi$ $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$
 Virtuální posunutí a virtuální práce
 $0 = \delta f = 2x_1 \delta x_1 + 2x_2 \delta x_2$ $\delta \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} l \delta \varphi$
 $\delta A = (\vec{F} + \lambda \nabla f) \cdot \delta \vec{x} = \vec{F} \cdot \delta \vec{x} + \lambda \nabla f \cdot \delta \vec{x} = 0 \delta x_1 + (mg) \delta x_2$
 $\delta A = \left(\vec{F} + \lambda \nabla f \right) \cdot d \vec{x} = \vec{F} \cdot d \vec{x} + \lambda \nabla f \cdot d \vec{x} = 0 dx_1 + mg dx_2 + 2\lambda x_1 dx_1 + 2\lambda x_2 dx_2 = mg dx_2 + 2\lambda l \dot{l} dt$
 Možné posunutí a práce
 $0 = d f = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 - 2l \dot{l} dt$ $d \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} l d\varphi + \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{l} dt$
 $\delta A = (\vec{F} + \lambda \nabla f) \cdot d \vec{x} = \vec{F} \cdot d \vec{x} + \lambda \nabla f \cdot d \vec{x} = 0 dx_1 + mg dx_2 + 2\lambda x_1 dx_1 + 2\lambda x_2 dx_2 = mg dx_2 + 2\lambda l \dot{l} dt$
 výkon vazebné síly $= -\lambda \frac{\partial f}{\partial t}$

Př. pro $l = \text{konst.}$ $0 = \delta A = mg \delta x_2 = -mg \sin \varphi \delta \varphi \Rightarrow \varphi = 0, \pi$ je rovnovážná poloha

2) d'Alembertův princip – dynamická rovnováha soustavy částic podrobených vazbám $f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{n}$

$$(LR1D) \quad M \ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \vec{R}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k$$

Zavedení setrvačné síly $\vec{I} = -M \ddot{\vec{x}}$ umožňuje zobecnit princip virtuální práce ze statiky.

$$M = \text{diag}(m_1, \dots, m_{3N}) \quad f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{n}$$

$$\underbrace{\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}_{\text{vtištěné síly (akční)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k}_{\text{vazbové síly (reakční)}} - \underbrace{M \ddot{\vec{x}}}_{\text{setrvačné síly}} = 0 \quad \leftarrow \text{podmínka rovnováhy sil}$$

Rovnici opět přenásobíme $\delta \vec{x} = \delta \vec{x}^T + \delta \vec{x}^N$ kde $\delta \vec{x}^T \cdot \nabla f_k = 0 \quad \forall k \in \hat{n}$ $\delta \vec{x}^N \in \text{span}_{\mathbb{R}}(\nabla f_1, \dots, \nabla f_n)$

$$\underbrace{(\vec{F} - M \ddot{\vec{x}}) \cdot \delta \vec{x}^T}_{\text{efektivní síly}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k \cdot \delta \vec{x}^T}_{=0} + \underbrace{(\vec{F} - M \ddot{\vec{x}}) \cdot \delta \vec{x}^N}_{=0} + \underbrace{\left[(\vec{F} - M \ddot{\vec{x}})^N + \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k \right] \cdot \delta \vec{x}^N}_{=0 \text{ volbou } \lambda_k} = 0 \quad \forall \delta \vec{x}^T$$

$$\text{Virtuální práce efektivních sil} \quad \delta A_{\text{eff}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = (\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) - M \ddot{\vec{x}}) \cdot \delta \vec{x}$$

d'Alembertův princip (1743)

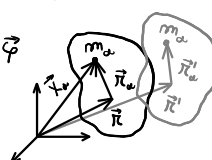
$$\boxed{\begin{aligned} \delta A_{\text{eff}} &= (\vec{F} - M \ddot{\vec{x}}) \cdot \delta \vec{x} = 0 \quad \forall \delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \\ f_k(\vec{x}, t) &= 0 \quad \forall k \in \hat{n} \quad \delta \vec{x} \cdot \nabla f_k = 0 \end{aligned}}$$

Pohyb mechanické soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil t. j. tak, že virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku rovna nule $\delta A_{\text{eff}}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t), t) = 0$.

Pozn: výhoda – není třeba pracovat se silami ideálních holonomních vazeb např. držících pohromadě tuhé těleso složené z N hm. bodů: posunutí jsou pouze translace a rotace $\vec{x}_a = \vec{r} + \vec{r}_a$ $|\vec{r}_a| = \text{konst.}$ $\delta \vec{x}_a = \delta \vec{r} + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_a$

$$\delta A_{\text{eff}} = \sum_{a=1}^N (\vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a) \cdot \delta \vec{x}_a = \sum_{a=1}^N (\vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a) \cdot (\delta \vec{r} + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_a) = \left[\sum_{a=1}^N \vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a \right] \cdot \delta \vec{r} + \left[\sum_{a=1}^N \vec{r}_a \times (\vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a) \right] \cdot \delta \vec{\varphi} = 0$$

$$0 = \sum_{a=1}^N \vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a = \vec{F} - \vec{P} \quad 0 = \sum_{a=1}^N \vec{r}_a \times (\vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a) - \vec{r} \times \left(\sum_{a=1}^N \vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a \right) = \sum_{a=1}^N \vec{r}_a \times \vec{F}_a - \left(\sum_{a=1}^N \vec{r}_a \times m_a \ddot{\vec{x}}_a \right) = \vec{N} - \vec{L}$$



Pohybové rovnice (LR1D) pro neholonomní soustavu s vazbami lineárně závislými na rychlostech

vazby: r -holonomních (nezávislých)

p -neholonomních (nezávislých)

$$f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} \quad \lambda(\nabla f_1, \dots, \nabla f_p) = \pi$$

$$0 = \delta f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i = \nabla f_k \cdot \delta \vec{x}$$

L.N. $\forall \vec{x} \in M(t)$

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{li}(\vec{x}, t) \dot{x}_i + b_l(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall l \in \hat{p} \quad A = (a_{li}) \text{ matice typu } p \times 3N$$

$$A(\vec{x}, t) \dot{\vec{x}} + \vec{b}(\vec{x}, t) = 0 \quad / \cdot dt \quad \lambda(A(\vec{x}, t)) = p \quad \forall \vec{x} \in M(t) \quad \forall t$$

$$A(\vec{x}, t) d\vec{x} + \vec{b}(\vec{x}, t) dt = 0 \leftarrow \dot{\vec{x}} dt = d\vec{x} \quad / \quad dt = 0 \Rightarrow d\vec{x} \rightarrow \delta \vec{x}$$

$$A(\vec{x}, t) \delta \vec{x} = 0 \quad \sum_{i=1}^{3N} a_{li}(\vec{x}, t) \delta x_i = 0 \quad \forall l \in \hat{p}$$

d'Alembertův princip

$$\delta A_d = \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i = (\vec{F} - M \ddot{\vec{x}}) \cdot \delta \vec{x} = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} \\ A(\vec{x}, t) \dot{\vec{x}} + \vec{b}(\vec{x}, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \forall \delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \quad \nabla f_k \cdot \delta \vec{x} = 0 \\ A \delta \vec{x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\forall \delta \vec{x} \in T_{\vec{x}} M(t) \cap \ker A(\vec{x}, t) = \ker B(\vec{x}, t)$

Metoda Lagrangeových multiplikátorů:

Místo vyjádření závislých posunutí složek

δx_j pomocí $\Delta - p$ nezávislých z podmínek (2)

a jejich dosazení do rovnice (1) přenásobíme

rovnice (2) Lagrangeovými multiplikátory λ_j, μ_j

a přičteme k rovnici (1) a nastavíme λ_j, μ_j

tak abychom vynulovali koeficienty u závislých δx_j

$$\Delta = 3N - p$$

nastavíme tak aby

$$\left(\begin{array}{ccc} \lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{\Delta-p+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{\Delta-p+1}} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{3N}} \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,\Delta-p+1} & \dots & a_{1,3N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,\Delta-p+1} & \dots & a_{p,3N} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_{\Delta-p} \\ \delta x_{\Delta-p+1} \\ \vdots \\ \delta x_{3N} \end{array} \right) = 0$$

nezávislé

závislé

BÚNO: regulární matice typu $(p+p) \times (p+p)$

* $(-F_1^d, \dots, -F_{\Delta-p+1}^d, \dots, -F_{3N}^d)$

$$0 = \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^p \mu_l a_{li}) \delta x_i = \sum_{i=1}^{\Delta-p} (F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^p \mu_l a_{li}) \delta x_i + \sum_{i=\Delta-p+1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^p \mu_l a_{li}) \delta x_i$$

$\delta x_1, \dots, \delta x_{3N}$ nejsou nezávislé $0'' \Leftarrow \delta x_1, \dots, \delta x_{\Delta-p}$ jsou nezávislé $0''$ vynulujeme volbou λ_k a μ_l

Pohybové rovnice: $m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^p \mu_l a_{li} \quad \forall i \in \widehat{3N} \quad f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} \quad \sum_{i=1}^{3N} a_{li}(\vec{x}, t) \dot{x}_i + b_l(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall l \in \hat{p}$

Věta o energii:

$$m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = F_i \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \sum_{l=1}^p \mu_l a_{li} \dot{x}_i \Rightarrow \frac{d}{dt} T = \vec{F} \cdot \vec{\dot{x}} - \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial t} - \sum_{l=1}^p \mu_l b_l \Rightarrow \frac{d}{dt} (T + U) = - \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial t} - \sum_{l=1}^p \mu_l b_l$$

pro konzervativní síly $F_i \dot{x}_i = - \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} \dot{x}_i = - \frac{dU(\vec{x})}{dt}$

Odvození LR2D pro holonomní soustavu: $x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, t) \quad \delta x_i = \delta \hat{x}_i = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$

$$0 = \delta A_d = \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{\Delta} \left[F_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{\Delta} \left[F_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j =$$

jsou nezávislé

$$= \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{\Delta} \left[F_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{\Delta} \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{\Delta} \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \forall j \in \hat{\Delta} \quad \Delta = 3N - p$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \quad \hat{L} = \hat{T} - \hat{U}$$

$$Q_j = Q_j^{(nep)} + Q_j^{(pot)} = Q_j^{(nep)} + \left[- \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

Pozn: Záměnnost variace a derivace $\frac{d}{dt} (\delta \vec{x}) = \frac{d}{dt} (\vec{x}' - \vec{x}) = \vec{x}' - \vec{x} = \delta \vec{x} = \delta \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)$ platí i pro funkce $\frac{d}{dt} \delta f = \delta \frac{d}{dt} f$

Jourdainův princip

$$0 = \frac{d}{dt} \delta A_d = \sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \dot{x}_i$$

zvolíme "0"

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta \dot{x}_i = 0 \quad \text{Jourdainovy variace}$$

$\delta t = 0 \quad \delta x_i = 0$

Gaussův princip

$$0 = \sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \ddot{x}_i$$

zvolíme "0"

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta \ddot{x}_i = 0 \quad \text{Gaussovy variace}$$

$\delta t = 0 \quad \delta x_i = 0 \quad \delta \dot{x}_i = 0$

Ústřední rovnice Lagrangeova – jiný tvar d'Alembertova principu

$$0 = \delta A_{\text{cel}} = \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i}_{\delta A \text{ virtuální práce akčních sil}} - \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \delta A - \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \delta x_i \right) + \delta \left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = \delta A - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) + \delta T$$

$$\ddot{x}_i \delta x_i = \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \delta x_i) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} (\delta x_i) = \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \delta x_i) - \dot{x}_i \delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \delta x_i) - \frac{1}{2} \delta \dot{x}_i^2$$

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right)$$

v obecných souřadnicích: $x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, t)$ $\delta x_i = \delta \hat{x}_i = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ $\hat{T}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t) = T(\vec{x}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t))$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \quad \delta A = F_i \delta x_i = F_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = Q_j \delta q_j = \delta \hat{A}$$

$$\delta \hat{T} + \delta \hat{A} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$$

$$\delta \hat{A} = Q_j^{(nep)} \delta q_j + Q_j^{(pot)} \delta q_j = Q_j^{(nep)} \delta q_j + \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \hat{U}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = Q_j^{(nep)} \delta q_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{\partial \hat{U}}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial \hat{U}}{\partial q_j} \delta q_j = Q_j^{(nep)} \delta q_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \delta \hat{U}$$

$$\delta \hat{T} - \delta \hat{U} + Q_j^{(nep)} \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\hat{T} - \hat{U})}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$$

$$\delta \hat{L} + Q_j^{(nep)} \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$$

Pozn: diferenciální počet

Funkce přírůstek funkce lineární část přírůstku = diferenciál funkce derivace stacionární hodnota

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \underbrace{A(x) \Delta x + \omega(x, \Delta x) \cdot \Delta x}_{\substack{\downarrow \\ \text{pro } \Delta x \rightarrow 0}}$$

$$df = A(x) \Delta x = f'(x) dx \quad \begin{matrix} f(x) = x & dx = \Delta x \end{matrix}$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = A(x)$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \Delta f = f(\vec{x} + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n A_j(\vec{x}) \Delta x_j + \underbrace{\omega(\vec{x}, \Delta \vec{x}) \cdot |\Delta \vec{x}|}_{\substack{\downarrow \\ \text{pro } |\Delta \vec{x}| \rightarrow 0}}$$

$$df = A(\vec{x}) \Delta \vec{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \Delta x_j \quad \nabla f(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

$$f'(\vec{x}) = A(\vec{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j \in \hat{n}$$

$$A_j(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \partial_j f = f_j$$

pokud existuje, pak

$$df = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} f(\vec{x} + \varepsilon d\vec{x})$$

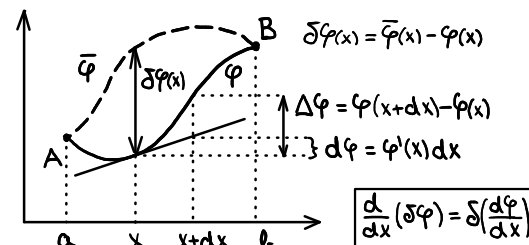
Variační počet body $\rightarrow$ křivky funkce $\rightarrow$ funkcionály

Křivka (třídy $\pi \in \mathbb{N}_0$) je spojitě zobrazení $\varphi: \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (třídy $\mathcal{C}^{(\pi)}$ tj. má spojitě derivace do řádu π).

$\mathcal{C}^{(\pi)} \langle a, b \rangle$ mn. všech křivek třídy π tvoří vektorový prostor $\dim + \infty$ s normou $\|\varphi\| = \max_{x \in \langle a, b \rangle} \{ |\varphi(x)|, |\varphi'(x)|, \dots, |\varphi^{(\pi)}(x)| \}$ který označíme $\tilde{\mathcal{C}}^{(\pi)} \langle a, b \rangle$

$\mathcal{C}_{(A,B)}^{(\pi)} \langle a, b \rangle = \{ \varphi \in \mathcal{C}^{(\pi)} \langle a, b \rangle \mid \varphi(a) = A \wedge \varphi(b) = B \}$ mn. křivek z A do B

$(\mathcal{C}_{(A,B)}^{(\pi)} \langle a, b \rangle, -, \tilde{\mathcal{C}}_{(0,0)}^{(\pi)} \langle a, b \rangle)$ normovaný afinní prostor



Bud' $\varphi \in \mathcal{C}_{(A,B)}^{(\pi)} \langle a, b \rangle$ pak pro lib. $\bar{\varphi} \in \mathcal{C}_{(A,B)}^{(\pi)} \langle a, b \rangle$ nazýváme $\delta \varphi = \bar{\varphi} - \varphi \in \tilde{\mathcal{C}}_{(0,0)}^{(\pi)} \langle a, b \rangle$ variaci křivky φ s pevnými konci. $\tilde{\mathcal{C}}^{(\pi)} \langle a, b \rangle$ s volnými konci.

Funkcionál je zobrazení z prostoru (např. vektorového) do reálných čísel.

Funkcionál $I: \mathcal{C}^{(\pi)} \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitý na křivce φ , pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{\varphi} \in \mathcal{C}^{(\pi)} \langle a, b \rangle \|\bar{\varphi} - \varphi\| < \delta \Rightarrow |I(\bar{\varphi}) - I(\varphi)| < \varepsilon$

Funkcionál $I: \mathcal{C}^{(\pi)} \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelný na křivce φ pokud existuje spojitý lineární funkcionál $\Phi: \tilde{\mathcal{C}}^{(\pi)} \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ (nazývaný variace I na křivce φ značený $\delta I(\varphi)$) tak, že platí $\lim_{\|\delta \varphi\| \rightarrow 0} \frac{I(\varphi + \delta \varphi) - I(\varphi) - \Phi[\delta \varphi]}{\|\delta \varphi\|} = 0$.

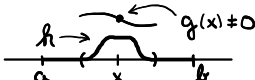
$$\text{tj. } \Delta I = I(\varphi + \delta \varphi) - I(\varphi) = \underbrace{\Phi[\delta \varphi]}_{\substack{\downarrow \\ \text{lineární část přírůstku } \delta I(\varphi)[\delta \varphi]}} + \underbrace{\omega(\varphi, \delta \varphi) \cdot \|\delta \varphi\|}_{\substack{\downarrow \\ \text{pro } \|\delta \varphi\| \rightarrow 0}}$$

Pozn: existuje-li variace, lze ji najít takto $\eta \in \tilde{\mathcal{C}}^{(\pi)} \langle a, b \rangle \quad \hat{I}(\varepsilon) = I(\varphi + \varepsilon \eta) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \delta I(\varphi)[\delta \varphi] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} I(\varphi + \varepsilon \delta \varphi)$

$$\frac{d\hat{I}}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (I(\varphi + \varepsilon \eta) - I(\varphi)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\Phi[\varepsilon \eta] + \omega(\varphi, \varepsilon \eta) \cdot \|\varepsilon \eta\|) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Phi[\eta] + \omega(\varphi, \varepsilon \eta) \cdot \|\eta\|) = \Phi(\eta) = \delta I(\varphi)[\eta]$$

Funkcionál $I: \mathcal{C}^{(\pi)} \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ má na křivce φ -maximum (minimum) pokud $\forall \bar{\varphi} \in \mathcal{C}^{(\pi)} \langle a, b \rangle I(\varphi) \geq I(\bar{\varphi})$ ($I(\varphi) \leq I(\bar{\varphi})$) -stacionární hodnotu (φ je extrémalou I) pokud $\delta I(\varphi) = 0$

Základní lemma variačního počtu: Bud' $g \in C\langle a, b \rangle$ pokud $\forall h \in C_{(a,b)}^{(n)}\langle a, b \rangle$ platí $\int_a^b g(x)h(x)dx = 0$ pak $g(x) = 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$.

Dk. sporem 

Dále speciální případ funkcionálu:

Bud' $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ třídy $C^{(2)}$ pak funkcionál $J: C^{(1)}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x, \varphi(x), \varphi'(x))dx$ je diferencovatelný na $C^{(1)}\langle a, b \rangle$.

$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J(\varphi + \varepsilon \delta\varphi) = \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} F(x, \varphi + \varepsilon \delta\varphi, \varphi' + \varepsilon \delta\varphi') dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \varphi}(x, \varphi, \varphi') \delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi'}(x, \varphi, \varphi') \delta\varphi' dx =$$

$$\boxed{\int_a^b F dx = \int_a^b \delta F dx} \quad = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \delta\varphi \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) \delta\varphi dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) \right] \delta\varphi dx + \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \delta\varphi \right]_a^b$$

Křivka $\varphi \in C_{(a,b)}^{(1)}\langle a, b \rangle$ je extrémálou funkcionálu $J|_{C_{(a,b)}^{(1)}\langle a, b \rangle} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial \varphi}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \right) = 0} \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$

Zobecnění:

$\vec{\varphi}: \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^{(1)}$ $\vec{\varphi}(a) = \vec{A}$ $\vec{\varphi}(b) = \vec{B}$

Eulerova rovnice pro funkcionál J $\varphi(a) = A$

ODR 2. řádu s okrajovými podmínkami $\varphi(b) = B$

$F: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R} \in C^{(2)}$ $J(\vec{\varphi}) = \int_a^b F(x, \vec{\varphi}(x), \vec{\varphi}'(x))dx$ $\delta J(\vec{\varphi}) = 0 \wedge \delta \vec{\varphi}(a) = 0 = \delta \vec{\varphi}(b) \Leftrightarrow \forall i \in \hat{n} \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'_i} \right) = 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$

Je-li $\vec{\varphi}$ minimála (maximála) funkcionálu $J|_{C_{(a,b)}^{(1)}\langle a, b \rangle}$ pak $\delta^2 J(\vec{\varphi}) \geq 0$ (≤ 0) a matice $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi'_i \partial \varphi'_j} \right)$ je PSD (NSD)

- **Integrální principy** – jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ jako celek
– jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův princip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze

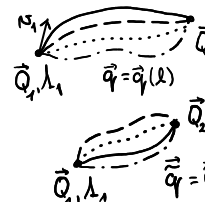
která extremalizuje funkcionál $T(\vec{y}) = \int_A^B d\ell = \int_A^B \frac{d\ell}{v} = \frac{1}{c} \int_A^B n(\vec{x}) d\ell = \frac{1}{c} \int_a^b n(\vec{y}(x)) |\dot{\vec{y}}(x)| dx$
index lomu $n = n(\vec{x})$ rychlost světla c

Brachistochrona (Johann Bernouli 1696) $T(\vec{y}) = \int_A^B d\ell = \int_A^B \frac{d\ell}{v(y)} = \int_a^b \frac{|\dot{\vec{y}}(x)| dx}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx$

Maupertuis (1744) hypotéza: Každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina (tzv. akce) je minimální.

Princip
nejmenší
akce

- Lagrange (1760) pro konzervativní soustavy
- Hamilton (1834) pro nekonzervativní soustavy



$$E = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + U(\vec{q}) \quad S_0 = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} 2T d\ell$$

$$\Rightarrow n(\vec{q}) \Rightarrow \vec{q} = \vec{q}(t) \quad T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \quad U(\vec{q}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} T - U dt$$

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta \vec{q} = \delta \vec{q}(t) \in C_{(a,b)}^{(1)}\langle t_1, t_2 \rangle$ tvoří
tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^{(1)}\langle t_1, t_2 \rangle$
s pevnými konci $\delta \vec{q}(t_1) = 0 = \delta \vec{q}(t_2)$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \hat{L} dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_i^{(ncr)} \delta q_i dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta \hat{L} + Q_i^{(ncr)} \delta q_i) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ se děje po křivce (trajektorii) na které akce nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t = 0$) variacím s pevnými konci $\delta \vec{q}(t_1) = 0 = \delta \vec{q}(t_2)$.

$$\boxed{S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt}$$

$$\delta S[\vec{q}(t)] = 0 \wedge \delta \vec{q}(t) \Big|_{t_1, t_2} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]_{(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)} = 0 \quad \forall i \in \hat{n}$$

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál S
O.D.R. 2. řádu pro $\vec{q}(t) = ?$ $\vec{q}(t_1) = \vec{Q}_1$ $\vec{q}(t_2) = \vec{Q}_2$
s okrajovými podmínkami

• Akce je funkcionál $S: C_{(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)}^{(1)}\langle t_1, t_2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ a neboť $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)$ je PD, je trajektorie zpravidla její minimála.

• Hamiltonův princip nezávisí na volbě obecných souřadnic $\Rightarrow$ LR2D mají stejný tvar ve všech obecných s.

• Nejednoznačnost Lagrangeiánu $L' = L + \frac{d}{dt} h(\vec{q}, t)$ $S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + [h(\vec{q}(t_2), t_2) - h(\vec{q}(t_1), t_1)] = S + K \Rightarrow \delta S' = \delta S$

• Lze zobecnit mimo mechaniku – potřeba najít příslušnou Lagrangeovu funkci (pomocí principů symetrie)

Routhova funkce - vyloučení cyklické souřadnice Q

$$[L, \Delta+1, \vec{q}, Q] \rightarrow [R, \Delta, \vec{q}]$$

nechť $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, \Delta)$ $\frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, \Delta) = konst$ (rovnice pro Q) $\Rightarrow \dot{Q} = \dot{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, \Delta)$

do zbylých Δ rovnic $\frac{d}{d\Delta} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \in \hat{\Delta}$ dosadíme za $\dot{Q}$ a $\ddot{Q}$ tyto rovnice pro neznámé $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}$ lze získat

z Routhovy funkce $R(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, \Delta) = \hat{L} - P\dot{Q} = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, \Delta), \Delta) - P\dot{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, \Delta)$ (někdy $R = P\dot{Q} - \hat{L}$)

která převezme roli Lagrangeovy funkce pro nový systém o Δ stupních volnosti

$$\frac{d}{d\Delta} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{d}{d\Delta} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} - P \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} - P \frac{\partial \dot{Q}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{d\Delta} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}_i} - P \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial q_i} - P \frac{\partial \dot{Q}}{\partial q_i} \right) = \left[\frac{d}{d\Delta} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]_{\dot{Q} = \dot{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, \Delta)}$$

Jacobiho princip - pro konzervativní soustavy (skleronomní holonomní vazby a konzervativní síly)

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\vec{q}) \quad T \text{ je P.D. kvadratická forma v } \dot{\vec{q}} \quad \frac{\partial L}{\partial \Delta} = 0 \Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = T + U = konst$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) dt \quad \text{substituční změna parametrizace}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = t(\tau) \\ dt = t' d\tau \\ \vec{q}(\tau) = \vec{q}(t(\tau)) \\ \dot{\vec{q}} = \frac{d\vec{q}}{d\tau} = \dot{\vec{q}} t' \end{array} \right] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}} t') t' d\tau$$

"nový" variační princip pro $\Delta+1$ křivek $\vec{q}(\tau), t(\tau)$ s funkcí

$$\hat{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t') = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}} t') t' \quad \text{kde čas } t$$

je cyklickou souřadnicí, kterou vyloučíme pomocí Routhovy funkce

$$h_t = \frac{\partial (L t')}{\partial t'} = \frac{\partial L}{\partial t'} t' + L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(-\frac{q'_k}{t'^2} \right) t' + L = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + L = -h_k \dot{q}_k + L = -E$$

$$R = L t' - h_t t' = (L - h_t) t' = (L + h_k \dot{q}_k - L) t' = h_k \dot{q}_k t' = (L + E) t' = (T + U + T + U) t' = 2T t'$$

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} h_k \dot{q}_k t' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} h_k dq_k = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2T t' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2T} \sqrt{2T} t' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec{q}))} \sqrt{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j} t' d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec{q}))} \sqrt{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i t' \dot{q}_j t'} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{\sqrt{2(E - U(\vec{q}))} \sqrt{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j}}_{F(\vec{q}, \dot{\vec{q}})} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec{q}))} \sqrt{T_{ij}(\vec{q}) dq_i dq_j} =$$

element délky $d\ell^T$ v konf. pr. s metrickým tenzorem $T_{ij}(\vec{q})$

Jacobiho princip: Konzervativní soustava se mezi konfiguracemi $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ pohybuje po křivce na které

zkrácená akce $S_0[\vec{q}(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec{q}))} \sqrt{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j} d\tau = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} \sqrt{2(E - U(\vec{q}))} d\ell^T$ nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím s pevnými konci $\delta \vec{q}(\tau_{1,2}) = 0$.

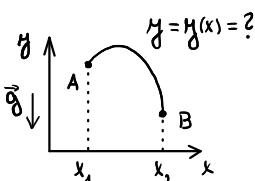
Pozn. z Eulerových rovnic $\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad \forall j \in \hat{\Delta} \Rightarrow \vec{q} = \vec{q}(\tau)$ získáme pouze tvar trajektorie (τ není čas)

časovou parametrizaci trajektorie lze získat

pomocí integrálu pohybu $E = T + U \Rightarrow 1 = \sqrt{\frac{2T}{2(E - U)}}$

$$t = \int_0^1 dt d\tilde{t} = \int_0^1 \sqrt{\frac{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j}{2(E - U(\vec{q}))}} d\tilde{t} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\frac{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j}{2(E - U(\vec{q}))}} d\tau$$

Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ $U = mgy$ $T = \frac{1}{2} (\dot{x}, \dot{y}) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ $E = T + U = konst$



$$S_0 = \int_A^B \sqrt{2(E - mgy)} \sqrt{m(dx^2 + dy^2)} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(E - mgy)} \sqrt{m(1 + y'^2)} dx = \underbrace{\sqrt{2g} m}_{\text{konst.}} \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{\frac{E}{mg} - y}}_{F(y, y')} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

parametrizace $y = y(x) \quad dy = y' dx$
(tj. $\tau = x$)

Eulerova rce. $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$ protože $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ přejde na

$$C_1 = F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \quad K = \frac{E}{mg}$$

$$C_1 = \sqrt{K - y} \sqrt{1 + y'^2} - y' \sqrt{K - y} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{K - y}}{\sqrt{1 + y'^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{C_1} \sqrt{K - y - C_1^2} \Rightarrow \int \frac{1}{C_1} dx = \int \frac{y' dx}{\sqrt{K - y - C_1^2}} \Rightarrow \frac{x}{C_1} = 2 \sqrt{K - y - C_1^2} + \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow (x - C_2)^2 = 4C_1^2 \left(\frac{E}{mg} - C_1^2 - y \right)$$

Řešitelné modely mechaniky

1) Problém dvou těles - izolovaná soustava dvou hmotných bodů

Budeme-li předpokládat, že síly kterými na sebe tyto body působí nezávisí na jejich rychlostech, pak z omezení daných Galileiho principem relativity plyne, že tyto síly jsou konzervativní.

Galileiho princip relativity - vyžaduje invarianci pohybových rovnic vzhledem k grupě Galileiho transformací.

Galileiho transformace $\Lambda_0 \in \mathbb{R} \quad \vec{r}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \quad S \in SO(3)$

$$\tilde{t} = t - \Lambda_0$$

$$\Lambda = \tilde{t} + \Lambda_0$$

$$\vec{x} = S^T (\vec{r} - \vec{v} \Lambda - \vec{x}_0)$$

$$\vec{x} = S \vec{\tilde{x}} + \vec{v} \Lambda + \vec{x}_0$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} (S \vec{\tilde{x}} + \vec{v} \Lambda + \vec{x}_0) = S \frac{d\vec{\tilde{x}}}{dt} + \vec{v} = S \frac{d\vec{\tilde{x}}}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} + \vec{v}$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = S \frac{d^2\vec{\tilde{x}}}{d\tilde{t}^2}$$

Pohybové rovnice

$$m_\alpha \ddot{\vec{x}}_\alpha = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \Lambda) \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad \rightarrow \quad m_\alpha S \ddot{\vec{\tilde{x}}}_\alpha = S \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{\tilde{x}}_\alpha, \vec{\tilde{x}}_\beta, \tilde{t}) \quad / \cdot S^T$$

$$m_\alpha \ddot{\vec{\tilde{x}}}_\alpha = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{\tilde{x}}_\alpha, \vec{\tilde{x}}_\beta, \tilde{t}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{\tilde{x}}_\alpha, \vec{\tilde{x}}_\beta, \tilde{t}) \Rightarrow S^T \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \Lambda) = \vec{F}_{\alpha\beta}(S^T(\vec{x}_\alpha - \vec{v} \Lambda - \vec{x}_0), S^T(\vec{x}_\beta - \vec{v} \Lambda - \vec{x}_0), \Lambda - \Lambda_0)$$

Invariance - rovnice se při transformaci nemá měnit (pouze přibudou vlnky u proměnných)

Symetrie vůči Galileiho transformaci $\forall S \in SO(3) \quad \forall \vec{v}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \Lambda_0 \in \mathbb{R}$

Protože síly nezávisí na rychlostech stačí vzít $\vec{v} = 0$

a) Translace v čase

$$S = 1 \quad \vec{x}_0 = 0$$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \Lambda) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \Lambda + \Lambda_0) \quad \forall \Lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta)$$

b) Translace v prostoru

$$S = 1$$

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta$$

$$\vec{\tilde{r}} = \vec{x}_\alpha + \vec{x}_\beta$$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_0, \vec{x}_\beta - \vec{x}_0) \quad \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \text{Přejdeme k novým souřadnicím}$$

$$\vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}, \vec{\tilde{r}}) = \vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}, \vec{\tilde{r}} - 2\vec{x}_0) \quad \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{G} = \vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}) \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta)$$

c) Rotace

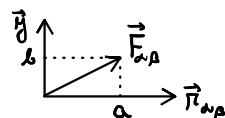
$$\vec{x}_0 = 0$$

$$S^T \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(S^T \vec{r}_{\alpha\beta}) \quad \forall S \in SO(3) \quad |\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta})| = |S \vec{F}_{\alpha\beta}(S^T \vec{r}_{\alpha\beta})| = |\vec{F}_{\alpha\beta}(S^T \vec{r}_{\alpha\beta})| \quad \forall S \in SO(3)$$

velikost síly tedy nezávisí na směru $\vec{r}_{\alpha\beta}$ ale pouze na velikosti $\vec{r}_{\alpha\beta}$ $|\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta})| = f_{\alpha\beta}(|\vec{r}_{\alpha\beta}|)$

označme $S(\varphi) \in SO(3)$ matici rotace o úhel φ kolem osy $\vec{r}_{\alpha\beta}$ pak $S(\varphi) \vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha\beta} = S^T(\varphi) \vec{r}_{\alpha\beta} \quad \forall \varphi$

rozložíme sílu $\vec{F}_{\alpha\beta}$ do směru $\vec{r}_{\alpha\beta}$ a směru kolmého na $\vec{r}_{\alpha\beta}$ pak



$$a \vec{r}_{\alpha\beta} + b \vec{y} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = S(\varphi) \vec{F}_{\alpha\beta}(S^T(\varphi) \vec{r}_{\alpha\beta}) = S(\varphi) \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = a S(\varphi) \vec{r}_{\alpha\beta} + b S(\varphi) \vec{y} = a \vec{r}_{\alpha\beta} + b S(\varphi) \vec{y}$$

$$b(1 - S(\varphi)) \vec{y} = 0 \quad \forall \varphi \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = a \vec{r}_{\alpha\beta} = \pm f_{\alpha\beta}(|\vec{r}_{\alpha\beta}|) \frac{\vec{r}_{\alpha\beta}}{|\vec{r}_{\alpha\beta}|} \quad \text{je izotropní (nezávisí na směru) a centrální (míří ve směru spojnice)}$$

Centrální izotropní síly $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{r}$ jsou potenciální

$$(\vec{r} \cdot \nabla \vec{F}(\vec{r}))_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_k(\vec{r})}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x_j} x_k \right) = \varepsilon_{ijk} \left(f'(r) \frac{x_j}{r} x_k + f(r) \delta_{jk} \right) = \varepsilon_{ijk} \left(f'(r) \frac{x_j}{r} x_k + f(r) \delta_{jk} \right) = 0 \Rightarrow \exists U = U(r)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \text{grad } U(r) = - \frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}}$$

$$\vec{F}_i(\vec{r}) = - \frac{\partial U(r)}{\partial x_i} = - U'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = - U'(r) \frac{x_i}{r} \Rightarrow U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = \mp \int_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})$$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = - \frac{\partial U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{\partial \vec{r}_{\alpha\beta}} = - U'_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \cdot \frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial \vec{r}_{\alpha\beta}} = - U'_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \cdot \frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial \vec{x}_\alpha} = - \frac{\partial U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{\partial \vec{x}_\alpha}$$

3. Newtonův zákon

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = - \vec{F}_{\beta\alpha}(\vec{r}_{\beta\alpha}) \Rightarrow \int_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = \int_{\beta\alpha}(r_{\beta\alpha}) \Rightarrow U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = U_{\beta\alpha}(r_{\beta\alpha})$$

Pozn. Pro jednočásticový systém plyne z Galileovské invariance pohybových rovnic nulovost síly.

Pohybové rovnice musí být invariantní vůči Galileiho transformacím pouze pokud popisují izolovanou mechanickou soustavu.

Izolovanou soustavu dvou těles jejichž vzájemné silové působení nezávisí na rychlostech a splňuje 3. NZ můžeme popsat Lagrangeovou funkcí:

$$L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 - U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad \text{Integrály pohybu}$$

$$\vec{P} = (m_1 \vec{X}_1 + m_2 \vec{X}_2) = M \vec{R}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{X}_1 + m_2 \vec{X}_2}{m_1 + m_2} \quad M = m_1 + m_2$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{P}}{M} = \text{konst} / \int d\lambda \Rightarrow \vec{R} = \frac{\vec{P}}{M} \lambda + \vec{R}_0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{X}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{X}}_2^2 + U(|\vec{X}_1 - \vec{X}_2|)$$

symetrie
Teorém $i=1,2$ $\vec{X}_1' = \vec{X}_i + \varepsilon \vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m_1 \dot{\vec{X}}_1 + m_2 \dot{\vec{X}}_2$

Noetherové $\vec{X}'_i = S(\epsilon)\vec{X}_i \Rightarrow \vec{L} = \vec{X}_1 \times m_1 \dot{\vec{X}}_1 - \vec{X}_2 \times m_2 \dot{\vec{X}}_2$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{M} (m_1 \vec{X}_1 + m_2 \vec{X}_2 - \vec{P} \Delta t)$$

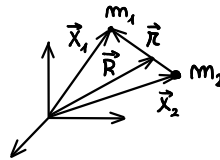
rovnoměrný přímočarý pohyb
hmotného středu

Celkem 10 nezávislých integrálů pohybu

Přejdeme k souřadnicím $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \rightarrow \vec{R}, \vec{r}$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{X}_1 + m_2 \vec{X}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{X}_1 = \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{M}$$

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad \vec{x}_2 = \vec{r} - \frac{m_1 \vec{r}}{M}$$



$$\hat{L}(\vec{R}, \vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 - U(|\vec{r}|) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{M}}_{\text{redukovaná hmotnost } \mu} \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) \quad \text{Pohybové rovnice}$$

Cyklické souřadnice $\vec{R}$ $\vec{P} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \vec{R}} = M \dot{\vec{R}}$

Konstanta (lze vypustit)

$$\begin{aligned} M \ddot{\vec{R}} &= 0 \\ \mu \ddot{\vec{r}} &= -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \end{aligned}$$

Routhova funkce $\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\vec{R}} \cdot \vec{P} = \frac{1}{2} \frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) - \frac{\vec{P}^2}{M} = -\frac{1}{2} \frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$

2) Pohyb částice ve sféricky symetrickém potenciálovém poli

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

Integrály pohybu $\frac{\partial L}{\partial \dot{A}} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(|\vec{r}|)$

přejdeme k sférickým souřadnicím pro které
osa z míří ve směru $\vec{L}$ pak $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\dot{\theta} = 0$

$$\vec{r}' = \underbrace{S(\varepsilon)}_{\in SO(3)} \vec{r} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \text{konst.} \quad \Downarrow \quad \vec{r} \cdot \vec{L} = r_i L_i = 0$$

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

pohyb probíhá v rovině
jdoucí počátkem a kolmé k $\vec{L}$

Cyklická souřadnice φ $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu \pi^2 \dot{\varphi} = L_3 = l = \text{konst} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu \pi^2}$ $\varphi(l) = \int \frac{l}{\mu \pi^2} dl + \varphi_0$

Routhova funkce

Efektivní potenciál

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\varphi} h_{\varphi} = \frac{1}{2} \mu (\dot{\pi}^2 + \pi^2 \frac{\ell^2}{\mu^2 \pi^4}) - U(\pi) - \frac{\ell^2}{\mu \pi^2} = \frac{1}{2} \mu \dot{\pi}^2 - \frac{\ell^2}{2\mu \pi^2} - U(\pi) = \frac{1}{2} \mu \dot{\pi}^2 - U_{eff}(\pi) \quad U_{eff}(\pi) = U(\pi) + \frac{\ell^2}{2\mu \pi^2}$$

3) Pohyb konzervativní soustavy s jedním stupněm volnosti

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} T(q) \dot{q}^2 - U(q)$$

Integrál pohybu $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = T + U = \frac{1}{2} T(q) \dot{q}^2 + U(q) = \text{konst}$

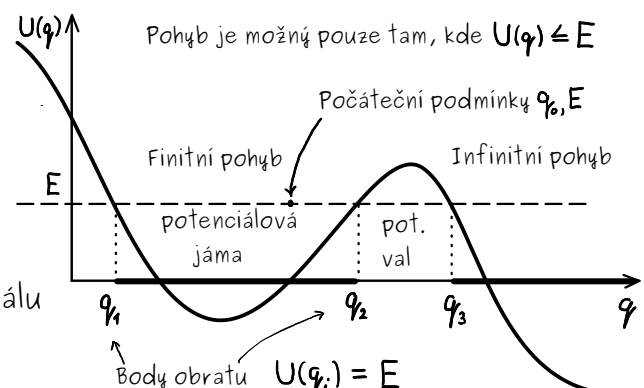
$$\dot{q}^2 = \frac{2(E - U(q))}{T(q)} \Rightarrow \dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(q))}{T(q)}}$$

↑
znaménko určuje směr pohybu

$$\pm 1 = \sqrt{\frac{T(q)}{2(E - U(q))}} \dot{q} / \int dl$$

$$\pm 1 = \int \sqrt{\frac{T(q)}{2(E-U(q))}} dq + 1.$$

řešení zapsané pomocí integrálu
tzw. řešení v kvadraturách



Pozn. řešení původního problému dvou těles závisí celkem na 12 integračních konstantách, které jsme použili v tomto pořadí $\vec{P}, \vec{R}_0, \vec{L} \leftrightarrow (0, \dot{\theta}, l), \varphi_0, E, L_0$.