

TEF1

Lukáš Vácha

18. prosince 2019

1 Úvod

- Hmotný bod
- Vektor:

$$\mathfrak{v} \in V; (V, T, \oplus, \odot) \text{ je vektorový prostor} \quad (1)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = (\mathfrak{v})_B \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

- II. Newtonův zákon:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (4)$$

$$m\mathfrak{a}(t) = \mathfrak{F}(b(t)) \quad (5)$$

- Kartézské souř:

$$m\ddot{x}^j(t) = F^j(x^1(t), x^2(t), x^3(t)); \forall j \in \hat{3} \quad (6)$$

tj. obyčejná diferenciální rovnice II. řádu (ODR).

- Neznámá funkce:

$$x^j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x^j = x^j(t) \quad (7)$$

- Znamá funkce:

$$F^j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : F^j = F^j(x^1, x^2, x^3) \quad (8)$$

- Absolutní čas: $t \in \mathbb{R}$

- Absolutní prostor: eukleidovský, afinní, $\dim E = 3$

- Afinní prostor: uspořádaná trojice:

$$(E, \varphi, \overset{\curvearrowright}{E}) \quad (9)$$

$$E \neq \emptyset \quad (10)$$

$$\overset{\curvearrowright}{E} \text{ je Lineární prostor} \quad (11)$$

$$\varphi : E \times E \rightarrow \overset{\curvearrowright}{E} \quad (12)$$

$$(\forall a \in E)(\varphi(a, b) = b - a \text{ je bijekce}) \quad (13)$$

$$(\forall a, b, c \in E)(\varphi(a, b) = \varphi(a, c) + \varphi(c, b)) \quad (14)$$

- Dimenze:

$$\dim E = \dim \overset{\curvearrowright}{E} \quad (15)$$

- Souřadnice:

$$B = \langle o, (e_1, e_2, \dots, e_n) \rangle; o \in E; (e_i)_{i=1}^n \text{ báze } \overset{\curvearrowright}{E} \quad (16)$$

- Souřadnice bodu:

$$b = o + \overline{(b - o)} = \phi^i(b - o)\overset{\curvearrowright}{e}_i \quad (17)$$

$$\phi^i : \overset{\curvearrowright}{E} \rightarrow \mathbb{R} \text{ i-tý souř. funkcional} \quad (18)$$

$$\overset{\curvearrowright}{v} = v^i \overset{\curvearrowright}{e}_i \rightarrow \vec{v} = (\overset{\curvearrowright}{v})_B = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \quad (19)$$

- Mapa:

$$\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (20)$$

$$\psi(b) = \vec{x}(b) = \begin{pmatrix} x^1(b) \\ \vdots \\ x^n(b) \end{pmatrix} \quad (21)$$

- Transformace souřadic

$$x^i(b) \text{ v } \langle o, (e_1, e_2, \dots, e_n) \rangle \quad (22)$$

$$\tilde{x}^i(b) \text{ v } \langle \tilde{o}, (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n) \rangle \quad (23)$$

$$\tilde{e}_j = \tilde{e}_i S^i_j \quad (24)$$

$$\mathbb{S} \in GL(n) = \{ \mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det \mathbb{A} \neq 0 \} \quad (25)$$

$$x^i(b) = \dots = S^i_j [\tilde{x}^i(b) - \tilde{x}^j(o)] \quad (26)$$

$$\tilde{x}^k(b) = (S^{-1})^k_i [x^i(b) - x^i(\tilde{o})] \quad (27)$$

- Transformace veličin

1. skaláry:

$$s \in \mathbb{R} : \tilde{s} = s \quad (28)$$

2. vektory:
kontravariantní

$$\tilde{v} \in \tilde{E} \quad (29)$$

$$\tilde{v}^k = (S^{-1})^k_i v^i \quad (30)$$

kovariantní

$$\alpha \in \tilde{E}^\#(\tilde{E}^*) = \{ \phi : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi \text{ je lineární} \} \quad (31)$$

$$\tilde{\alpha}_j = \dots = \alpha_i S^i_j \quad (32)$$

3. tenzory - typu $\binom{p}{q}$:

$$\tilde{T}_{j_1, j_2, \dots, j_q}^{i_1, i_2, \dots, i_p} = (S^{-1})^{i_1}_{k_1} (S^{-1})^{i_2}_{k_2} \dots (S^{-1})^{i_p}_{k_p} T_{l_1, l_2, \dots, l_q}^{k_1, k_2, \dots, k_p} S^{l_1}_{j_1} S^{l_2}_{j_2} \dots S^{l_q}_{j_q} \quad (33)$$

4. tenzorová hustota typu $\binom{p}{q}$ váhy $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{T}_{j_1, j_2, \dots, j_q}^{i_1, i_2, \dots, i_p} = (\det \mathbb{S})^\lambda (S^{-1})^{i_1}_{k_1} (S^{-1})^{i_2}_{k_2} \dots (S^{-1})^{i_p}_{k_p} T_{l_1, l_2, \dots, l_q}^{k_1, k_2, \dots, k_p} S^{l_1}_{j_1} S^{l_2}_{j_2} \dots S^{l_q}_{j_q} \quad (34)$$

- def: Buď $G \subset GL(n)$. T je G-invariantní $\Leftrightarrow$ jeho složky se nemění při změně báze $\tilde{e}_j = \tilde{e}_i S^i_j; \forall \mathbb{S} \in G$

- Skalární pole:

$$U : E \rightarrow \mathbb{R} : U = U(b) = U(\vec{x}(b)) \quad (35)$$

$$\tilde{U}(\vec{x}(b)) = U(\vec{x}(b)) \quad (36)$$

- Vektorové pole:

$$\overset{\curvearrowright}{F} : E \rightarrow \overset{\curvearrowright}{E} \quad (37)$$

$$\overset{\curvearrowright}{F}^i(\vec{x}(b)) = (S^{-1})^i_j \overset{\curvearrowright}{F}^j(\vec{x}(b)) \quad (38)$$

- Tenzorové pole

- Eukleidovský afinní prostor nad $\mathbb{R}$:

+skalární součin: $g : \overset{\curvearrowright}{E} \times \overset{\curvearrowright}{E} \rightarrow \mathbb{R}$ symetrický a pozitivně definitní

$$\forall \overset{\curvearrowright}{u}, \overset{\curvearrowright}{v} \in \overset{\curvearrowright}{E} : \overset{\curvearrowright}{u} \cdot \overset{\curvearrowright}{v} = g(\overset{\curvearrowright}{u}, \overset{\curvearrowright}{v}) = \vec{u}^T \mathfrak{g} \vec{v} \quad (39)$$

,kde $\mathfrak{g}$ je Gramova matice, neboli metrický tenzor typu $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

pro B ON: $g_{ij} = \delta_{ij} = \mathbb{1}_{ij}$

- Kartézská soustava souřadnic:

$\langle o, B = (e_1, e_2, \dots, e_n) \rangle \Leftrightarrow B$ je OG

- Ogonální transformace $O(n)$:

$$S \in O(n) \Leftrightarrow S^T = S^{-1} \Leftrightarrow SS^T = S^T S = \mathbb{1} \quad (40)$$

kovariantní a kontravariantní veličiny se transformují stejně, proto píšeme všechny indexy dolů

- Orientace
- Pseudovekory
- Vztažná soustava
- Transformace souřadnic mezi vztažnými soustavami
- Trajektorie
- Polohový vektor
- Rychlost
- Zrychlení

- Inerciální vztažná soustava
- Gallieho transformace
- Gallieho princip relativity
- Zrychlení v jiné soustavě