

Teoretická fyzika I

Rychlokurz

Niels

24. září 2019

Obsah

1	Kroneckerovo delta, Levi-Civita symbol	3
2	Diferenciální počet	3
3	Transformace fyzikálních veličin	7
3.1	Transformace skalárů	7
3.2	Transformace vektorů	7
3.3	Transformace tenzorů	8
3.4	Transformace souřadnic	8
3.5	Transformace skalárního pole	8
3.6	Transformace vektorového pole	9
4	Newtonova mechanika	9
4.1	Galileovy transformace	9
4.2	Věty impulsové	9
4.3	Složky zrychlení v neinerciální soustavě	9
4.4	Složky rychlosti a zrychlení v křivočarých souřadnicích	10
4.5	Eulerovy setrvačnické rovnice	11
4.6	Momenty setrvačnosti základních útvarů	11
5	Lagrangeova mechanika	12
5.1	Typy sil	12
5.2	Vazby	12
5.3	Lagrangeova kuchařka na sestavování pohybových rovnic	13
5.4	Lorentzova síla	14
5.5	Zobecněné veličiny	15
5.6	Integrály pohybu	15

5.7	Kuchařka malých kmitů	17
5.8	Kuchařka na počítání úloh s tuhým tělesem	17
6	Základní principy mechaniky	18
6.1	Princip virtuální práce	18
6.2	D'Alembertův a Hamiltonův princip	18

1 Kroneckerovo delta, Levi-Civitův symbol

Kroneckerův symbol je definován následovně:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Levi-Civitův symbol je definován jako

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{když } (i, j, k) \text{ je rovno } (1, 2, 3), \text{ nebo } (2, 3, 1), \text{ nebo } (3, 1, 2) \\ -1, & \text{když } (i, j, k) \text{ je rovno } (1, 3, 2), \text{ nebo } (3, 2, 1), \text{ nebo } (2, 1, 3) \\ 0, & \text{když jsou si alespoň dva indexy rovny.} \end{cases}$$

Standardní skalární součin vektorů $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i.$$

Vektorový součin dvou vektorů $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ v *pravotočivé* a *ortonormální* bázi:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Determinant matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$ pomocí Levi-Civitova symbolu:

$$\det \mathbb{A} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}.$$

Důležité:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} &= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} & / \cdot \delta_{jm} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} &= 2\delta_{il} & / \cdot \delta_{il} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} &= 3! \end{aligned}$$

2 Diferenciální počet

Parciální derivace složené funkce. Necht $f(g(\vec{x}))$, kde $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, je zobrazení dané předpisem $f \circ g: \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Pro vnitřní funkci g platí:

$$g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_n(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Derivace zobrazení g je reprezentována tzv. *Jacobiho maticí*

$$\mathbb{J}_{\vec{x}}(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n(\vec{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

a derivace složeného zobrazení $f(g(x))$ je pak dána součinem matic $\mathbb{J}_{g(\vec{x})}(f)$ a $\mathbb{J}_{\vec{x}}(g)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\vec{x}}(f(g(x))) &= \mathbb{J}_{g(\vec{x})}(f) \cdot \mathbb{J}_{\vec{x}}(g) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f(g(\vec{x}))}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f(g(\vec{x}))}{\partial y_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n(\vec{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

přičemž v posledním kroku dle Einsteinovy sumační konvence sčítáme přes index k .¹ Obecně se derivace složené funkce podle i -té proměnné dá zapsat jako

$$\frac{\partial f(g(\vec{x}))}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(g(\vec{x}))}{\partial y_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}.$$

Operátor nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

po složkách jako

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Pomocí nably definujeme následující diferenciální operátory:

Gradient

Nechť $\varphi(x, y, z)$ a $\psi(x, y, z)$ jsou skalární pole. Pak jejich gradient v kartézských souřadnicích definujeme jako

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi,$$

¹Matice derivace funkce f má jen jeden řádek, protože prostor, do něhož $f(g(x))$ zobrazuje, je $\mathbb{R}^1$. Kdyby šlo o funkci $f \circ g : \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^s$, měla by matice $\mathbb{J}_{g(\vec{x})}(f)$ právě s řádků.

po složkách

$$(\text{grad } \varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Pro dvě skalární pole $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ a vektorová pole platí následující identity:

$$\begin{aligned}\text{grad}(\varphi + \psi) &= \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi \\ \text{grad}(\varphi\psi) &= \psi \text{grad } \varphi + \varphi \text{grad } \psi\end{aligned}$$

Je-li $\vec{r} = x_i$ polohový vektor a $|\vec{r}| = r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$ jeho velikost, pak

$$\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r},$$

obecně

$$\text{grad } r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2} \vec{r}.$$

Operátor $\vec{A}$ grad

Pomocí Einsteinovy sumační konvence definujeme tento operátor následujícím vztahem:

$$\vec{A} \text{ grad} = \vec{A} \nabla = A_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Při aplikaci na skalární pole φ máme

$$(\vec{A} \text{ grad})\varphi = A_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Zapůsobením na vektorové pole $\vec{F}$ píšeme po složkách:

$$\left[(\vec{A} \text{ grad}) \vec{F} \right]_i = A_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}.$$

Divergence

Nechť $\vec{A}$ a $\vec{B}$ jsou vektorová pole. Pak jejich divergenci v kartézských souřadnicích definujeme jako

$$\text{div } A = \nabla \cdot \vec{A},$$

vypsáno po složkách

$$(\text{div } \vec{A})_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}.$$

Pro divergenci platí následující identity:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) &= \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B} \\ \operatorname{div}(\varphi \vec{A}) &= \varphi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi \\ \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} \\ \operatorname{div} \vec{r} &= 3.\end{aligned}$$

Rotace

Rotaci dvou vektorových polí $\vec{A}$ a $\vec{B}$ definujeme jako

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A},$$

po složkách:

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k.$$

Platí tyto identity:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{A} + \vec{B}) &= \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \vec{B} \\ \operatorname{rot}(\varphi \vec{A}) &= \varphi \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \times \operatorname{grad} \varphi \\ \operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \operatorname{grad}) \vec{A} - (\vec{A} \operatorname{grad}) \vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{r} &= 0.\end{aligned}$$

Laplaceův operátor

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Aplikací na skalární pole φ , resp. vektorové pole $\vec{A}$ dostáváme

$$\nabla^2 \varphi = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2},$$

resp.

$$\nabla^2 \vec{A} = \begin{pmatrix} \nabla^2 A_1 \\ \nabla^2 A_2 \\ \nabla^2 A_3 \end{pmatrix}.$$

Za zmínku stojí především tento vzorec:

$$\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi \nabla^2 \psi + 2 \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi + \psi \nabla^2 \varphi.$$

Skládání diferenciálních operátorů

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi &= \vec{0} \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &= 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}\end{aligned}$$

3 Transformace fyzikálních veličin

Mějme báze $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ a $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{\vec{e}}_1, \dots, \tilde{\vec{e}}_n)$, což jsou báze přidruženého vektorového prostoru V_n . Přejchod od báze $\mathcal{B}$ k $\tilde{\mathcal{B}}$ je dán vztahem

$$\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S_j^i, \quad (3.1)$$

kde S_j^i jsou složky tzv. matice přechodu od nevlnkované báze k vlnkované, známé z LAL jako ${}^{\tilde{\mathcal{B}}}I^{\mathcal{B}}$ či jako ${}_{\mathcal{B}}\mathbb{P}_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

3.1 Transformace skalárů

Budiž $s \in \mathbb{R}$ skalár čili číslo. Při změně báze se skalár nemění, tj. platí

$$\tilde{s} = s.$$

3.2 Transformace vektorů

Podle toho, zda se vektory² při změně báze (tj. otočení) transformují opačným, resp. stejným způsobem jako bazické vektory (tzn. podle (3.1)), rozlišujeme tzv. *kontravariantní*, resp. *kovariantní vektory*.

Kontravariantní vektory se do báze $\tilde{\mathcal{B}}$ transformují vztahem

$$\tilde{v}^j = (S^{-1})^j_i v^i,$$

psáno bez složek

$$\tilde{\vec{v}} = S^{-1} \vec{v}.$$

V porovnání s (3.1) se tedy kontravariantní vektory transformují pomocí matice *inverzní* k S !

²V tomto textu pro jednoduchost značíme „vektor x “ symbolem $\vec{x}$. Dr. Novotný na cvičení rozlišuje mezi *abstraktním* vektorem a jeho *souřadnicemi* tak, že nad x jakožto abstraktní vektor píše skobu a symbolem $\vec{x}$ myslí podle LAL $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$. O značení prof. Hlavatého ani nemluvě: Ten abstraktní vektory vytučňuje jako $\mathbf{e}$ a na tabuli je podtrhává.

Oproti tomu **kovariantní** vektory se transformují ve stejném duchu jako bazické vektory. Kovariantním vektorem může být třeba souřadnicový funkcionál $\varphi \in V^\#$ (prostor duální k V). Je tedy

$$\tilde{\varphi}_j = \varphi_i S_j^i.$$

3.3 Transformace tenzorů

Opět rozlišujeme ko- a kontravariantní tenzory.

Nechť $\tilde{T}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ je **kontravariantní tenzor** řádu p .³ Na jeho transformaci se dá nahlížet tak, že se každý index i_m transformuje pomocí jedné matice S^{-1} (matic tedy bude právě p).

$$\tilde{T}^{i_1 i_2 \dots i_p} = (S^{-1})_{j_1}^{i_1} (S^{-1})_{j_2}^{i_2} \dots (S^{-1})_{j_p}^{i_p} T^{j_1 j_2 \dots j_p}$$

Kovariantní tenzor řádu q se transformuje následovně:

$$\tilde{T}_{i_1 i_2 \dots i_q} = T_{j_1 j_2 \dots j_q} S_{i_1}^{j_1} S_{i_2}^{j_2} \dots S_{i_q}^{j_q}.$$

3.4 Transformace souřadnic

Chceme-li vyjádřit souřadnice bodu b pomocí vlnkovaných souřadnic, platí pro i -tou složku souřadnic bodu b přechodní vztah

$$x^i(b) = S_j^i [\tilde{x}^j(b) - \tilde{x}^j(o)],$$

což lze číst jako: „Napočítej souřadnice bodu b v bázi $\tilde{\mathcal{B}}$ a pomocí matice S je otoč příslušným směrem.“ Člen $\tilde{x}^j(o)$ je souřadnice počátku o ve vlnkované bázi.

Dosadíme-li do vztahu výše $b := \tilde{o}$, dostaneme

$$x^i(\tilde{o}) = -S_j^i \tilde{x}^j(o)$$

a pomocí této znalosti odvodíme **inverzní** vztah, tj. pro výpočet vlnkovaných souřadnic bodu b pomocí nevlnkovaných:

$$\tilde{x}^i(b) = (S^{-1})_j^i [x^j(b) - x^j(\tilde{o})]. \quad (3.2)$$

3.5 Transformace skalárního pole

Skalární (např. potenciálové U) pole se transformuje jako skalár:

$$\tilde{U}(\tilde{x}^i(b)) = U(x^i(b)),$$

ale nemusí mít v různých bázích stejnou hodnotu – každopádně k přechodu není potřeba žádná matice S .

³Má n^p složek.

3.6 Transformace vektorového pole

Jednou **kontravariantní** vektorové pole transformujeme následovně:

$$\tilde{F}^i(\tilde{x}) = (S^{-1})^i_j F^j(\vec{x})$$

4 Newtonova mechanika

4.1 Galileovy transformace

Aby byla soustava $(\tilde{o}(t), (\tilde{e}_i)_{i=1}^n)$, jež se vůči soustavě $(o, (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$ pohybuje, inerciální, musí se počátek vlnkované soustavy pohybovat *rovnoměrně přímočaře*, tj. musí platit

$$\vec{x}(\tilde{o}(t)) = \vec{x}_0 + \vec{V}t + o,$$

kde $\vec{x}_0$ je poloha počátku $\tilde{o}$ v čase $t = 0$ a $\vec{V}$ je jeho rychlost. Dosadíme-li tuto skutečnost do vzorce (3.2) a budeme-li uvažovat pouze *ortogonální* matici

$$S \in O(n, \mathbb{R}) = \{S \in \mathbb{R}^{n,n} \mid S^{-1} = S^T\},$$

dostaneme tzv. **Galileovy transformace**

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i(b) &= S_{ji} [x_j(b) - V_j t - x_j^0] \\ \tilde{t} &= t - t_0.\end{aligned}$$

4.2 Věty impulsové

První věta impulsová. Časová derivace celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednici vnějších sil působících na soustavu.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}.$$

Druhá věta impulsová. Časová derivace celkového momentu hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednému momentu vnějších sil působících na soustavu.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)}.$$

4.3 Složky zrychlení v neinerciální soustavě

Přejdeme od soustavy $(o, (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$ k neinerciální soustavě $(\tilde{o}(t), (\tilde{e}_i(t))_{i=1}^n)$, pomocí matice

$$S \in SO(n, \mathbb{R}) = \{S \in \mathbb{R}^{n,n} \mid S^{-1} = S^T \wedge \det S = 1\},$$

a zároveň $S = S(t)$, $\tilde{o} = \tilde{o}(t)$. Dostaneme složky zrychlení v *neinerciální* soustavě:

$$\ddot{\tilde{x}}_i(b(t)) = S_{ji} \left[\ddot{x}_j(b(t)) - 2\dot{S}_{jk}\dot{\tilde{x}}_j(b(t)) - \ddot{S}_{jk}\tilde{x}_j(b(t)) - \ddot{\tilde{x}}_j(\tilde{o}(t)) \right],$$

symbolicky psáno:

$$\ddot{\tilde{x}} = S^T \left[\ddot{x} - 2\dot{S}\dot{\tilde{x}} - \ddot{S}\tilde{x} - \ddot{\tilde{x}}(\tilde{o}) \right].$$

Definujme $\tilde{\omega} := -(S^T \dot{S})$ jako matici úhlové rychlosti otáčení báze $(\tilde{e}_i)_{i=1}^n$ vůči bázi $(\tilde{e}_i)_{i=1}^n$.

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Omega}_3 & \tilde{\Omega}_2 \\ -\tilde{\Omega}_3 & 0 & \tilde{\Omega}_1 \\ -\tilde{\Omega}_2 & -\tilde{\Omega}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bez odvození⁴ napíšeme, že platí:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{ij} &= \varepsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_k \\ \tilde{\Omega}_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \tilde{\omega}_{jk}. \end{aligned}$$

4.4 Složky rychlosti a zrychlení v křivočarých souřadnicích

4.4.1 Polární souřadnice.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

kde $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Složky rychlosti, resp. zrychlení v polárních souřadnicích, dostaneme sestrojením souřadnicových křivek a k nim tečných vektorů, následným znormováním a vynásobením maticí přechodu od báze $\mathcal{B}_x$ k bázi $\tilde{\mathcal{B}}_{\text{pol}}^{\text{ON}}$ (pro odvození v plné parádě viz cvičení dr. Novotného).

$$S^{\text{ON}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tedy složky rychlosti, resp. zrychlení v polárních souřadnicích:

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{\text{ON}} &= \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} = (S^{\text{ON}})^T \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ \tilde{a}^{\text{ON}} &= \begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \end{pmatrix} = (S^{\text{ON}})^T \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

⁴Viz sešit TEF.

4.4.2 Sférické souřadnice

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \sin \varphi \\y &= r \sin \theta \cos \varphi \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}$$

kde $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\theta \in (0, \pi)$. Podobným způsobem dostaneme složky rychlosti ve sférických souřadnicích:

$$\tilde{v}^{\text{ON}} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \sin \theta \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

4.5 Eulerovy setrvačnickové rovnice

$$\tilde{I}_{il}\dot{\tilde{\Omega}}_l + \varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_j\tilde{I}_{km}\tilde{\Omega}_m = \tilde{N}_i^{(\text{e})}$$

4.6 Momenty setrvačnosti základních útvarů

Hmotnost homogenního tělesa nechť je m . Pak moment setrvačnosti

- **tyče** délky l vzhledem k ose kolmo procházející těžištěm je

$$I = \frac{1}{12}ml^2,$$

- **tyče** délky l vzhledem k ose kolmo procházející jedním z jejích konců je

$$I = \frac{1}{3}ml^2,$$

- **válce** o poloměru r vzhledem k ose souměrnosti je

$$I = \frac{1}{2}mr^2,$$

- **koule** o poloměru r vzhledem k ose procházející těžištěm je

$$I = \frac{2}{5}mr^2,$$

- **tenké obruče** o poloměru r vzhledem k ose souměrnosti je

$$I = mr^2.$$

5 Lagrangeova mechanika

Zabýváme se systémy N částic v $\mathbb{R}^3$.

5.1 Typy sil

- Síla $\vec{F}$ je **konzervativní** $\iff (\exists U = U(\vec{x})) \left(F_i = \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} \right)$.
Funkci $U(\vec{x})$ říkáme *potenciální energie*.
- Síla $\vec{F}$ je **potenciální** $\iff (\exists U = U(\vec{x}, t)) \left(F_i = \frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \right)$.
Funkci $U(\vec{x}, t)$ říkáme *potenciál*.
- Síla $\vec{F}$ je **zobecněně potenciální** $\iff$
 $\iff \left(\exists U^* = U^*(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \right) \left(F_i = -\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U^*}{\partial \dot{x}_i} \right) \right)$. Takové funkci $U^*(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ pak říkáme *zobecněný potenciál*.

5.2 Vazby

Vazby jsou vše, co nějakým způsobem svazuje souřadnice, čas a rychlosti, aby se snížil počet stupňů volnosti daný vztahem $s = 3N - p$, kde N je počet částí systému a p je počet vazeb. Vazby můžeme dělit následujícím způsobem:

1. Podle toho, zda vážou či nevážou rychlost $\dot{\vec{x}}$.

- (a) **Holonomní** vazba je vždy tvaru

$$f_k(\vec{x}, t) = 0,$$

kde $k \in \hat{p}$. Z holonomních vazeb určíme *vazebnou sílu*

$$F_i^{(\text{vaz})} = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}.$$

Sčítá se přes index k a reálné konstanty λ_k nazýváme Lagrangeovými multiplikátory.

- (b) **Neholonomní** jsou vazby typu

$$g_k(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = 0,$$

tedy svazují i rychlosti. (Zde se jimi nezabýváme.)

2. Podle závislosti na čase.
 - (a) **Skleronomní** vazby *nezávisí* na t .
 - (b) **Rheonomní** vazby *závisí* na t .
3. Podle toho, zda jsou vyjádřeny rovnostmi či nerovnostmi.
 - (a) **Udržující** vazby jsou vyjádřeny rovnostmi, např. vazba tuhým závěsem u matematického kyvadla

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.1)$$
 - (b) **Neudržovací** vazby se objeví, kdybychom měli místo tuhého závěsu pružnou nit. Pak v podmínce (5.1) nastane nerovnost.
4. Podle toho, jestli dochází disipaci energie.
 - (a) **Ideální** vazba je charakterizována nulovou disipací energie.
 - (b) **Neideální**, např. tření. (Nezabýváme se jimi.)

5.3 Lagrangeova kuchařka na sestavování pohybových rovnic

1. Zaved' *inerciální* kartézskou soustavu s chytře zvoleným počátkem.
2. Urči počet stupňů volnosti $s = 3N - p$, kde N je počet hmotných bodů, p je počet vazeb.
3. Sestav Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t) := T - U^* = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - U^*,$$

kde U^* je zobecněný potenciál. Jistě platí, že $U^* \supset U$.

4. Urči vazby (v příkladech výhradně holonomní, udržovací a ideální) $f_k(\vec{x}, t) = 0$ tak, aby byly nezávislé, a urči *konfigurační prostor* M , což je množina všech bodů prostoru, které plní vazebné podmínky, tj.

$$M = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid (\forall k \in \hat{p})(f_k(\vec{x}, t) = 0) \}.$$

Počet stupňů volnosti je tedy $s = \dim M = 3N - p$.

5. Zaveď **obecné souřadnice** q_j , kde $j \in \hat{s}$, což jsou vlastně parametrické souřadnice množiny M . Tzn. vyjádři kartézské x_i jako

$$x_i = \hat{x}_i(q_1, \dots, q_s, t).$$

POZOR! x_i je pouze kartézská souřadnice, kdežto $\hat{x}_i$ je **funkce** $s + 1$ proměnných! Obecné souřadnice zvol tak, aby $(\forall q_j, j \in \hat{s})(\forall t)$ platilo

$$f_k(\hat{x}_i(q_j, t), t) = \hat{f}_k(q_j, t) \stackrel{!}{=} 0.$$

Např. u matematického kyvadla v rovině je $s = 2 \cdot 1 - 1$, a tedy $q_1 \equiv \varphi$.

6. Napočítej $\dot{\hat{x}}_i$ jako derivaci složené funkce.

$$\dot{\hat{x}}_i = \stackrel{5}{\frac{d}{dt}} \hat{x}_i(q_j, t) = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} = \dot{\hat{x}}_i(q_j, \dot{q}_j, t).$$

Tzn., že „operátor totální derivace“ $\frac{d}{dt}$ udělal z funkce $s + 1$ proměnných funkci $\dot{\hat{x}}_i$, což je funkce $2s + 1$ proměnných!

7. Nyní napiš Lagrangeovu funkci v obecných souřadnicích:

$$\hat{\mathcal{L}}(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(\hat{x}_i(q_j, t), \dot{\hat{x}}_i(q_j, \dot{q}_j, t), t)$$

8. A sestav Eulerovy–Lagrangeovy rovnice 2. druhu:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial t} = \underbrace{F_i^{(\text{nep.})} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j}}_{\text{ozn. } Q_j^{(\text{nep.})}} + F_i^{(\text{vaz.})} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \stackrel{\checkmark}{=} 0.$$

Levou stranu E–L rovnic můžeme položit rovnu nule ($\checkmark$), jen když máme systém **bez** nepotenciálních sil a neideálních vazeb, takže v našich příkladech skoro vždy. Stříšky při počítání vynecháváme.

5.4 Lorentzova síla

Lorentzovu sílu $\vec{F}_L = q \left(\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right)$ lze také zahrnout do Lagrangeovy funkce, neboť je to síla zobecněně potenciální. Její potenciál je

$$U^*(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = q \left(\varphi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right)$$

⁵Za q_j se zde pro každé j musí dosadit $\tilde{q}_j(t)$ jako funkce **času**, aby bylo možné provést totální derivaci. Detailně viz skripta – v příkladech není potřeba nad tím tak přemýšlet a je to jednodušší, než to vypadá.

a pro elektromagnetické potenciály $\varphi(\vec{x}, t)$ a $\vec{A}(\vec{x}, t)$ platí

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A}.\end{aligned}$$

Lagrangián částice v EM poli:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q \left(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A} \right).$$

5.5 Zobecněné veličiny

Obecnou hybnost definujeme vztahem

$$p_k = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_k}.$$

Obecná energie. (Sčítá se přes k až do s .)

$$E^6 = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \hat{\mathcal{L}}.$$

Obecná síla.

$$Q_k = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial q_k}.$$

5.6 Integrály pohybu

Existují funkce $2s + 1$ proměnných, $I(q, \dot{q}_j, t)$, které se při pohybu soustavy zachovávají *konstantní* hodnoty v čase. Říkáme jim **integrály pohybu** — matematicky vyjadřují zákony zachování. Znamená to, že když je funkce času $\mathcal{I}(t) = I(\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t), t)$ **konstantní**, je zaručeno, že I je integrálem pohybu, neboli

$$\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} = 0 \iff I \text{ je integrál pohybu.}$$

Abychom ověřili, že se nějaká veličina I zachovává, *nemusíme* řešit pohybové rovnice pro $\tilde{q}(t)$! Stačí, když *algebraicky* z pohybových rovnic vyjádříme $\dot{\tilde{q}}(t)$, dosadíme ho do totálně časově zderivované podezřelé veličiny I a ověříme, že vyjde nula:

$$\left(\frac{\hat{d}}{dt} I(q_j, \dot{q}_j, t) \right) \Big|_{\tilde{q}(t)} \stackrel{!}{=} 0.$$

⁶Obecná energie se také někdy značí h . POZOR! Ne vždy má zobecněná energie tvar $E = T + U$! To platí jen tehdy, když jsou síly konzervativní a vazby holonomní a zároveň skleronomní — pak můžeme říct, že $E = T + U = \text{const}$.

Věta 5.1 (O cyklických souřadnicích).

$$(\exists k \in \hat{s}) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \right) \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \text{ je integrál pohybu.}$$

Slovy: „Najdu-li zobecněnou souřadnici q_k , která se v lagrangiánu nevyskytuje, je veličina $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ integrálem pohybu.“

Věta 5.2 (O zachování obecné energie). *Jestliže $\mathcal{L}$ není funkcí času, pak je zobecněná energie*

$$h(q, \dot{q}, t) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

integrálem pohybu.

Ověřit, zda je nějaká funkce I integrálem pohybu, je jednoduché. Horší je to s hledáním takové veličiny. Její existenci nám za splnění jistých předpokladů zaručuje věta Noetherové.

Věta 5.3 (Emmy Noether, 1918). *Nechť jsou pravé strany ELRII nulové, tj. $(\forall j \in \hat{s})(O_j \equiv 0)$. Pak ke každé grupě transformací $q'_j = \varphi(q, t, \alpha)$ závislých spojitě na $\alpha \in \mathbb{R}$ a jež ponechávají lagrangián invariantní, tj. $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, existuje nekonstantní integrál pohybu, a to*

$$I(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j} Y_j(q, t),$$

kde složky vektorového pole $Y_j(q, t)$ ⁷ jsou definovány vztahem

$$Y_j(q, t) = \left(\frac{\partial \varphi_j(q, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}.$$

$Y_j(q, t)$ navíc plní parciální diferenciální rovnici

$$\sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} Y_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^s \frac{\partial Y_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right)}_{\dot{Y}_j} \right] = 0.$$

⁷Přesněji: $Y_j(q, t)$ jsou složky vektorového pole generující příslušnou *jednparametrickou grupu transformací*. To zní velmi učeně (a složitě), ale věřte, že krásu tohoto tvrzení oceníte asi až v TEF2.

Noetherová říká, že kdykoli má lagrangián „spojitou symetrii“⁸, odpovídá jí nějaký zákon zachování. Protože je prostor *homogenní* (invariantní vůči translaci), lze ukázat zákon zachování hybnosti. Ze skutečnosti, že je prostor navíc *izotropní* (invariantní vůči rotaci), plyne, že se v takovém případě zachovává moment hybnosti.

5.7 Kuchařka malých kmitů

1. Sestav lagrangián ve zobecněných souřadnicích: $\mathcal{L} = T - U$. Pozor na znaménko u U !
2. Sestroj matici kinetické a potenciální energie. Nezapomeň vyčíslit ve stabilní rovnovážné poloze! Nutná podmínka správnosti: *Máš-li matice správně, pak jsou pozitivně definitní a symetrické.*

$$T_{ij} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{\text{SRP}}$$

$$U_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\text{SRP}}$$

3. Vyřeš sekulární rovnici pro ω_i^2 (tj. najdi vlastní čísla):

$$\det(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}) \stackrel{!}{=} 0.$$

4. Spočti příslušné vlastní vektory $\vec{a}_i \in \ker(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T})$
5. Řešením je superpozice $\vec{q} = \sum_i C_i \vec{a}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$, kde C_i a φ_i najdeš z počátečních podmínek.

5.8 Kuchařka na počítání úloh s tuhým tělesem

1. Urči počet stupňů volnosti. V $\mathbb{R}^2$ má jedno tuhé těleso 3 stupně volnosti: 2 translační (nahorů a dolů) a 1 rotační v rovině nákresny. Obecně pro N tuhých těles a p vazeb:

$$s = 3N - p.$$

⁸„Symetrií“ se myslí právě transformace, které ponechávají $\mathcal{L}$ invariantní. „Spojitosť“ se myslí transformace se spojitým konstantním parametrem ε , který vyjadřuje, jak daleko jsme od identické transformace.

2. Sestav lagrangián v kartézských souřadnicích:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_T^2 + \dot{y}_T^2) + \frac{1}{2}I_T\dot{\varphi}^2 - U,$$

kde x_T, y_T jsou kartézské souřadnice těžiště, φ zvol tak, aby charakterizoval otáčení tělesa. I_T je moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm. POZOR! Nepokoušej se o Steinerovu větu, je to zbytečné!

3. Vhodně zvol obecné souřadnice a dál pokračuj jako v Lagrangeově kuchaře 5.3.

6 Základní principy mechaniky

6.1 Princip virtuální práce

Systém N bodů je ve *statické rovnováze*, právě když se jeho souřadnice nemění v čase, tj.

$$(\forall t) \left(\tilde{X}(t) = \tilde{X}(t_0) := \vec{X}_0 \right)$$

Věta 6.1. *Mějme systém s holonomními skleronomními vazbami*

$$(\forall k \in \hat{p})(f_k(\vec{X}) = 0).$$

Pak virtuální práce

$$\delta A(\vec{X}) := \sum_{i=1}^{3N} F_i(\vec{X}) \delta x_i,$$

kteřou by systém vykonal při libovolném infinitezimálním posunutí z bodu statické rovnováhy, je nulová, tj.

$$\delta A(\vec{X}_0) = \sum_{i=1}^{3N} F_i(\vec{X}, \vec{0}) \delta x_i = 0.$$

6.2 D'Alembertův a Hamiltonův princip

Princip virtuální práce lze použít i na v čase se vyvíjející systémy – uplatníme ho v každém okamžiku.

Věta 6.2 (d'Alembert). *Pohyb soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil, tj.*

$$\delta A_{\text{ef}}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, \ddot{\vec{X}}, t) := \sum_{i=1}^{3N} (F_i(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) - m_i \ddot{X}_i) \delta x_i = 0.$$

Dynamická rovnováha je takový stav, při němž je $\delta A_{\text{ef}} = 0$.

Věta 6.3 (Hamilton). *Funkce $\tilde{q}(t)$, která minimalizuje nebo stacionarizuje funkcional akce*

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) dt,$$

je právě funkce, jež řeší Eulerovy–Lagrangeovy rovnice II. druhu. Jinak: „Pohyb systému v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ se děje tak, že variace akce $\delta S = 0$.“

Definičním oborem funkcionalu S je množina funkcí

$$C = \left\{ q: \langle t_1, t_2 \rangle \mapsto \mathbb{R}^s \mid (\forall j \in \hat{s})(q_j, \dot{q}_j \in \mathcal{C}^1 \wedge q_j(t_1) = Q_1, q_j(t_2) = Q_2) \right\}.$$