Řešené příklady z teoretické fyziky

Wiki Skriptum FJFI [19. listopadu 2019]

19. listopadu 2019

Důležité informace

Ve druháku v roce 2003 jsem dokončil příručku pro začínající fyziky *Řešené příklady z teoretické fyziky*, které pokrývají většinu příkladů ze skripta Teoretická fyzika I. Štoll, J. Tolar, Vydavatelství ČVUT 1999. Tuto příručku jsem napsal v MS Wordu a toto WikiSkriptum je výsledkem automatické konverze z Wodu do LaTeX.

Radek Fučík, 4. září 2015

Obsah

1 Kapitola 1: Newtonova mechanika **5**
Priklad 1.1 5
Priklad 1.2 5
Priklad 1.3 6
Priklad 1.4 7

2 Kapitola 2: Lagrangeův formalismus **8**
Priklad 2.1 8
Priklad 2.2 8
Priklad 2.3 8
Priklad 2.4 9
Priklad 2.5 9
Priklad 2.6 10
Priklad 2.7 10
Priklad 2.8 11
Priklad 2.9 12
Priklad 2.11 13
Priklad 2.12 14
Priklad 2.17 16
Priklad 2.18 17
Priklad 2.22 17
Priklad 2.23 18
Priklad 2.24 18

3 Kapitola 3: Základní úlohy mechaniky **20**
Priklad 3.1 20
Priklad 3.2 20
Priklad 3.3 21
Priklad 3.4 22
Priklad 3.5 22
Priklad 3.6 23
Priklad 3.7 24
Priklad 3.8 25
Priklad 3.9 27
Priklad 3.10 29
Priklad 3.11 30
Priklad 3.12 31
Priklad 3.13 32
Priklad 3.14 33
Priklad 3.17 34
Priklad 3.19 35

Příklad 3.20 . . . 35
Příklad 3.22 . . . 36
Příklad 3.23 . . . 38
Příklad 3.27 . . . 41
Příklad 3.28 . . . 42
Příklad 3.37 . . . 42
Příklad 3.38 . . . 44
Příklad 3.39 . . . 45
Příklad 3.41 . . . 46
Příklad 3.42 . . . 47

4 Kapitola 4: Základní principy mechaniky **49**
Příklad 4.2 . . . 49
Příklad 4.3 . . . 50
Příklad 4.4 . . . 51
Příklad 4.5 . . . 53
Příklad 4.6 . . . 54
Příklad 4.9 . . . 56
Příklad 4.10 . . . 57
Příklad 4.11 . . . 59
Příklad 4.13 . . . 60
Příklad 4.15 . . . 62
Příklad 4.18 . . . 63
Příklad 4.20 . . . 63
Příklad 4.21 . . . 64
Příklad 4.22 . . . 66
Příklad 4.24 . . . 66
Příklad 4.25 . . . 67

5 Kapitola 5: Hamiltonův formalismus **69**
Příklad 5.2 . . . 69
Příklad 5.3 . . . 71
Příklad 5.4 . . . 71
Příklad 5.5 . . . 72
Příklad 5.6 . . . 73
Příklad 5.7 . . . 74
Příklad 5.8 . . . 74
Příklad 5.9 . . . 75
Příklad 5.10 . . . 75
Příklad 5.11 . . . 77
Příklad 5.12 . . . 77
Příklad 5.15 . . . 77
Příklad 5.17 . . . 78

Priklad 5.19 78
Priklad 5.20 79
Priklad 5.21 80
Priklad 5.22 81
Priklad 5.23 82
Priklad 5.24 83
Priklad 5.25 84
Priklad 5.55 85

6 Kapitola 7: speciální teorie relativity **87**
Priklad 7.1 87
Priklad 7.2 89
Priklad 7.4 90
Priklad 7.5 91
Priklad 7.6 91
Priklad 7.10 93
Priklad 7.15 94
Priklad 7.17 94
Priklad 7.18 95
Priklad 7.26 96
Priklad 7.27 97
Priklad 7.28 98

1 Kapitola 1: Newtonova mechanika

Příklad 1.1

Dokažte, že poloha hmotného středu, definovaného vztahem

$$\vec{R}=\frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha},$$

nezávisí na volbě počátku.

Řešení: Transformujme souřadnice vztahy $\vec{r}=\vec{r}'+\vec{a}$ a $\vec{R}=\vec{R}'+\vec{a}$ a po dosazení dostaneme

$$\vec{R}=\frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}=\frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}'_\alpha+\vec{a}\sum_\alpha m_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}=\frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}'_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}+\vec{a}.$$

Porovnáním s $\vec{R}=\vec{R}'+\vec{a}$ dostáváme

$$\vec{R}'+\vec{a}=\frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}'_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}+\vec{a}$$

a po odečtení $\vec{a}$ od obou stran dostaneme opět

$$\vec{R}'=\frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}'_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}.$$

Příklad 1.1 □

Příklad 1.2

Pohybové rovnice bezsilového hmotného bodu v kartézkském systému S', který se libovolně pohybuje vůči inerciálnímu systému S, má tvar

$$m\ddot{\vec{r}}=m\ddot{\vec{r}}'\ +m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}'+m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')+m\ddot{\vec{r}}(0')=0,$$

kde $\vec{\omega}$ je vektor okamžité úhlové rychlosti otáčení S', který se vzhledem k S otáčí kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí ω_0 ($\vec{r}(0')=0$), se tato pohybová rovnice zjednoduší na $\ddot{x}'-2\omega_0\dot{y}'-\omega_0^2x'=0$, $\ddot{y}'+2\omega_0\dot{x}'-\omega_0^2y'=0$, $\ddot{z}'=0$.

Řešení: Vyjdeme z rovnosti

$$m\ddot{\vec{r}}=m\ddot{\vec{r}}'\ +m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}'+m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')+m\ddot{\vec{r}}(0')=0,$$

kde $\vec{\omega}=(0,0,\omega_0)$ a $\dot{\vec{\omega}}=(0,0,0)$, takže rozepsáno po složkách dostaneme maticově

$$\ddot{\vec{r}}=\ddot{\vec{r}}'\ +\begin{pmatrix}0&-2\omega_0&0\\2\omega_0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\dot{\vec{r}}'+\begin{pmatrix}-\omega_0^2&0&0\\0&-\omega_0^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\vec{r}'=0,$$

což je hledaná soustava diferenciálních rovnic.

Příklad 1.2 □

Příklad 1.3

Určtete: (a) Obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic z příkladu 1.2; (b) Parametrické rovnice trajektorie bezsilového bodu vypuštěného v čase t = 0 s nulovou počáteční rychlostí z bodu $x' = a,\ y' = z' = 0$.

Řešení: (a) Řešení diferenciální rovnice z příkladu 1.2 zjednodušené vynecháním z-ové složky

$$\ddot{\vec{\eta}} + 2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\vec{\eta}} - \omega_0^2 \vec{\eta} = 0$$

budeme hledat ve tvaru

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Dosaďme toto řešení do diferenciální rovnice

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \omega_0^2 & -2\omega_0\lambda \\ 2\omega_0\lambda & \lambda^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} e^{\lambda t} = 0.$$

Dostáváme podmínku, že

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \omega_0^2 & -2\omega_0\lambda \\ 2\omega_0\lambda & \lambda^2 - \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0,$$

tj.

$$\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\omega_0^2\lambda^2 = \left(\lambda^2 + \omega_0^2\right)^2 = 0,$$

s řešením $\lambda = \pm i\omega_0$, které nám odhalí obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t}$$

nebo též

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_1 + X_2)\cos\omega_0 t + i(X_2 - X_1)\sin\omega_0 t \\ (Y_1 + Y_2)\cos\omega_0 t + i(Y_2 - Y_1)\sin\omega_0 t \end{pmatrix}.$$

(b) Počáteční podmínky jsou

$$\vec{\eta}(0) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{\eta}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tj.

$$\vec{\eta}(0) = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ Y_1 + Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{\eta}}(0) = \begin{pmatrix} i\omega_0(X_2 - X_1) \\ i\omega_0(Y_2 - Y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

které splňují

$$X_1 = X_2 = \tfrac{a}{2},$$
$$Y_1 = Y_2 = 0.$$

Řešení je tedy tvaru

$$\begin{aligned} x'(t) &= a\cos\omega_0 t \\ y'(t) &= 0 \\ z'(t) &= 0 \end{aligned}$$

Příklad 1.3 □

Příklad 1.4

Vypočtěte celkový moment hybnosti $\vec{L}^Q$ soustavy hmotných bodů v systému S, ale vzhledem k bodu $Q \not\equiv 0$, který má v S pevnou polohu (tj. $\dot{\vec{r}}(Q) = 0$). Udejte, pro které body Q je $\vec{L}^Q = \vec{L}$. Ukažte, že $\vec{L}^Q = \vec{L}'$, kde $\vec{L}'$ je moment hybnosti v soustavě S' vzhledem k počátku $O' \equiv Q$, jestliže se S' neotáčí vůči S.

Řešení: Použijme vztah

$$\vec{L} = \vec{L}^Q + \vec{r}(Q) \times \vec{P} + \vec{r}(Q) \times M\dot{\vec{r}}(Q) + t\dot{\vec{r}}(Q) \times \vec{P} - \dot{\vec{r}}(Q) \times M\vec{R},$$

do kterého dosadíme předpoklady a vyjádříme z něj

$$\vec{L}^Q = \vec{L} - \vec{r}(Q) \times \vec{P}.$$

Rovnost $\vec{L} = \vec{L}^Q$ nastává právě když jsou vektory $\vec{P}$ a $\vec{r}(Q)$ kolineární.

Příklad 1.4 □

2 Kapitola 2: Lagrangeův formalismus

Příklad 2.1

Napište Lagrangeovu funkci volného bezsilového hmotného bodu (a) v kartézských souřadnicích, (b) ve sférických souřadnicích, (c) v cylindrických souřadnicích.
Řešení: (a)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

(b) transformace (a) pomocí

$$x_1 = r\cos\varphi\sin\theta$$
$$x_2 = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$x_3 = r\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2)$$

(c) transformace (a) pomocí

$$x_1 = r\cos\varphi$$
$$x_2 = r\sin\varphi$$
$$x_3 = x_3$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}_3^2)$$

Příklad 2.1 □

Příklad 2.2

Napište Lagrangeovu funkci volného hmotného bodu, na který působí homogenní gravitační pole a elastická centrální izotropní síla.
Řešení:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - mgx_3 - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Příklad 2.2 □

Příklad 2.3

Napište Lagrangeovu funkci volné nabité částice v elektrostatickém poli.
Řešení:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - q(\varphi - \sum_{i=1}^{3} A_i\dot{x}_i)$$

Příklad 2.3 □

Příklad 2.4

Najděte výraz pro obecnou hybnost a energii nabité částice v elektromagnetickém poli z Lagrangeovy funkce $L = \frac{1}{2}mv^2 - q(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A})$.

Řešení: Obecná hybnost:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + qA_j$$

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

Obecná energie:

$$E = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\dot{x}_j - L = \sum_j \frac{1}{2}m\dot{x}_j^2 + q\varphi$$

Příklad 2.4 □

Příklad 2.5

Přesvědčete se, že vazba určená Pfaffovou formou

$$\left[x_2(x_1-x_2)^2 - x_1x_2^3\right]dx_1 + \left[x_1^3x_2 - x_1(x_1-x_2)^2\right]dx_2 - x_1x_2(x_1-x_2)^2dx_3 = 0$$

je ekvivalentní holonomní vazbě $x_3 = \ln\left|\frac{x_1}{x_2}\right| + \frac{x_1x_2}{x_1-x_2} + C$.

Řešení: Označíme-li pro přehlednost funkce u diferenciálů Pfaffovy formy $a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 = 0$, můžeme podmínku ekvivalence vazeb zachytit jako

$$\begin{array}{l} 0 = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{a_1}{a_3} \\ 0 = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{a_2}{a_3} \end{array}.$$

Upravíme výrazy a dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\ln\left|\frac{x_1}{x_2}\right| + \frac{x_1x_2}{x_1-x_2} + C\right) - \frac{x_2(x_1-x_2)^2 - x_1x_2^3}{x_1x_2(x_1-x_2)^2} =$$
$$= \frac{x_2}{x_1x_2} + \frac{x_2(x_1-x_2) - x_1x_2}{(x_1-x_2)^2} - \frac{1}{x_1} + \frac{x_2^2}{(x_1-x_2)^2} = 0.$$

a

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\ln\left|\frac{x_1}{x_2}\right| + \frac{x_1x_2}{x_1-x_2} + C\right) + \frac{x_1(x_1-x_2)^2 - x_1^3x_2}{x_1x_2(x_1-x_2)^2} =,$$
$$= -\frac{x_2x_1}{x_1x_2^2} + \frac{x_1(x_1-x_2) + x_1x_2}{(x_1-x_2)^2} + \frac{1}{x_2} - \frac{x_1^2}{(x_1-x_2)^2} = 0,$$

což bylo dokázati.

Příklad 2.5 □

Příklad 2.6

Napište Lagrangeovu funkci matematického kyvadla.
Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$L = T - U = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr\cos\varphi$$

Příklad 2.6 □

Příklad 2.7

Odvoďte pohybové rovnice matematického kyvadla s pružným závěsem tuhosti k a s rovnovážnou délkou r_0 (bez zatížení). Zkoumejte limitu $k/m \to \infty$ jako přechod k ideální vazbě (pozn. osy volíme tak, že tíhové pole působí ve směru osy y).
Řešení: Pomocí

$$\begin{aligned} x &= r(t)\cos\varphi(t) \\ y &= r(t)\sin\varphi(t) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

transformujeme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy - \frac{1}{2}k\left(r - r_0\right)^2$$

na

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos\varphi - \frac{1}{2}k\left(r - r_0\right)^2.$$

Lagrangeovy pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + k(r - r_0) = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + k(r - r_0) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) - mgr\sin\varphi = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} - mgr\sin\varphi = 0$$

čímž jsme dostali soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{m}{k}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi) + r - r_0 = 0$$

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\varphi} - \frac{g}{r}\sin\varphi = 0$$

a při limitě $\frac{k}{m} \to \infty$, tj. $\frac{m}{k} \to 0$, dostaneme z první rovnice $r = r_0$ a druhá rovnice potom popisuje pohyb matematického kyvadla s pevným závěsem.

Příklad 2.7 □

Příklad 2.8

Odvoďte pohybovou rovnici matematického kyvadla, jehož délka roste lineárně s časem $r = r_0(1+kt)$, kde r_0 a k jsou konstanty. (pozn. osy volíme tak, že tíhové pole působí ve směru osy y)

Řešení: Pomocí

$$\begin{aligned} x &= r_0(1+kt)\sin\varphi(t) \\ y &= r_0(1+kt)\cos\varphi(t) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

transformujeme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy$$

na

$$L = \frac{1}{2}m(r_0^2k^2 + r_0^2(1+kt)^2\dot{\varphi}^2) + mgr_0(1+kt)\cos\varphi$$

a zjednodušíme vypuštěním konstant

$$L = \frac{1}{2}mr_0^2(1+kt)^2\dot{\varphi}^2 + mgr_0(1+kt)\cos\varphi.$$

Lagrangeovy pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr_0^2(1+kt)^2\dot{\varphi}\right) + mgr_0(1+kt)\sin\varphi = mr_0^2 2k(1+kt)\dot{\varphi} + mr_0^2(1+kt)^2\ddot{\varphi} + mgr_0(1+kt)\sin\varphi = 0$$

čímž jsme dostali diferenciální rovnici

$$(1+kt)\ddot{\varphi} + 2k\dot{\varphi} + \frac{g}{r_0}\sin\varphi = 0.$$

(pozn.: Pro přehlednost je lepší pracovat obecně, tj. použít $r(t)$ jako v př. 2.7 a dosazovat až nakonec.)

Příklad 2.8 □

Příklad 2.9

Napište Lagrangeovu funkci matematického kyvadla, jehož bod závěsu se pohybuje předepsaným způsobem v rovině kyvů (rheonomní vazba) (a) konstantní rychlostí po vodorovné přímce (b) s konstantním zrychlením po vodorovné přímce (c) kmitavým pohybem podle zákona $a\cos\omega t$ po vodorovné přímce (d) kmitavým pohybem $a\sin\omega t$ po svislé přímce (e) s konstantní úhlovou rychlostí ω po svislé kružnici.

Řešení: V inerciální soustavě má Lagrangeova funkce tvar $L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r})$

Po transformaci do obecně neinerciální soustavy vztahem $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}(t)$, kde $\vec{V}(t)$ je rychlost, kterou se soustava pohybuje, a po vypuštění úplných časových derivací (viz teorie) dostaneme

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}').$$

Poznamenejme ještě transformační vztahy do polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi(t) \\ y &= r\cos\varphi(t) \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0) \\ \vec{v}^2 &= r^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned} .$$

(a) $\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}(V, 0, 0) = \vec{0}$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos\varphi$$

(b) $\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}(at, 0, 0) = (a, 0, 0)$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2) - mar\sin\varphi + mgr\cos\varphi$$

(c) $\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(a\cos\omega t), 0, 0\right) = (-\omega^2 a\cos\omega t, 0, 0)$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2) + \omega^2 mr\cos\omega t\sin\varphi + mgr\cos\varphi$$

(d) $\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}\left(0, \frac{d}{dt}(a\sin\omega t), 0\right) = (0, -\omega^2 a\sin\omega t, 0)$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2) + \omega^2 mr\sin\omega t\cos\varphi + mgr\cos\varphi$$

(e) $\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(a\cos\omega t), \frac{d}{dt}(a\sin\omega t), 0\right) = (-\omega^2 a\cos\omega t, -\omega^2 a\sin\omega t, 0)$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2) + \omega^2 mr\sin(\omega t + \varphi) + mgr\cos\varphi$$

Příklad 2.11

Hmotný bod se pohybuje působením tíže po svislé kružnici poloměru a. Byl vypuštěn s nulovou počáteční rychlostí z nejvyššího bodu kružnice. Určete polohu hmotného bodu v libovolném okamžiku, tj. určete $\varphi = \varphi(t)$.

Řešení: Počátek kartézského souřadného systému umístíme do středu kružnice, kladný směr osy y volíme proti směru tíhového pole a vzhledem k vazbě na kružnici volíme transformaci

$$\begin{aligned} x &= a \sin\varphi \\ y &= a \cos\varphi \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy = \frac{1}{2} ma^2\dot{\varphi}^2 - mga\cos\varphi.$$

Z obecné energie

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} ma^2\dot{\varphi}^2 + mga\cos\varphi$$

zjistíme E, neb víme, že v čase $t = 0$, kterému odpovídá $\varphi = 0$, bylo těleso vypuštěno s nulovou počáteční rychlostí, tedy

$$E = 0 + mga\cos 0 = mga.$$

Pomocí zákona zachování energie odvodíme pohybovou rovnici

$$\begin{aligned} mga &= \frac{1}{2} ma^2\dot{\varphi}^2 + mga\cos\varphi \\ 2\frac{g}{a}(1 - \cos\varphi) &= \dot{\varphi}^2 \\ 2\frac{g}{a}(1 - \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}) &= \dot{\varphi}^2 \\ 2\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\frac{\varphi}{2} &= \dot{\varphi} \end{aligned}$$

a tuto rovnici budeme integrovat.

$$2\sqrt{\frac{g}{a}}t + 2\delta = \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi/2} = \int \frac{\sin \varphi/2}{\sin^2 \varphi/2} d\varphi = \left\{ z = \cos \frac{\varphi}{2} \right\} =$$
$$= -2 \int \frac{dz}{1 - z^2} = -2 \operatorname{argtgh}(z),$$

a tedy výsledek můžeme napsat jako

$$\tanh\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t + \delta\right) = -\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Poznámka k výsledku ve skriptu: volbou úhlu $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ dostaneme

$$-\cos\frac{\varphi}{2} = -\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = tgh\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t + \delta\right).$$

Příklad 2.11 □

Příklad 2.12

Ve vodorovné rovině může klouzat bez tření těleso hmotnosti m_1. Je spojeno nehmotnou tyčí délky r s tělesem hmotnosti m_2, které koná působením tíže kmitavý pohyb ve svislé rovině. Dokažte, že těleso m_2 se pohybuje po elipse, a vypočítejte dobu kmitu T tohoto eliptického kyvadla pro malé amplitudy.

Řešení: Kartézský souřadný systém zvolíme tak, že kladný směr osy y je ve směru tíhového pole vazby:

$$z_1 = z_2 = y_1 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = r^2$$

Zvolíme nezávislé souřadnice podle vztahů

$$\begin{aligned} y_2 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= x_1 + r\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= -r\sin\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 - r\cos\varphi\dot{\varphi} \end{aligned}\ .$$

Potom Lagrangeova funkce

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)+m_2gy_2$$

bude mít v těchto nových souřadnicích tvar

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2(m_1+m_2)+m_2\dot{x}_1r\cos\varphi\dot{\varphi}+\frac{1}{2}m_2r^2\dot{\varphi}^2+m_2gr\cos\varphi$$

Abychom mohli při malých výchylkách určit periodu kmitů, aproximujeme Lagrangeovu funkci

$$\cos\varphi\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}\approx 1$$

$$\tilde{L}=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2(m_1+m_2)+m_2\dot{x}_1r\dot{\varphi}+\frac{1}{2}m_2r^2\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}m_2gr\varphi^2.$$

Potom budou mít Lagrangeovy rovnice mít tvar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\varphi}=\frac{d}{dt}\left(m_2r\dot{x}_1+m_2r^2\dot{\varphi}\right)+m_2gr\varphi=m_2r\ddot{x}_1+m_2r^2\ddot{\varphi}+m_2gr\varphi=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\varphi}=\frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)\dot{x}_1+m_2r\dot{\varphi}\right)=(m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2r\ddot{\varphi}=0$$

a dostali jsme soustavu diferenciálních rovnic

$$\ddot{x}_1+r\ddot{\varphi}+g\varphi=0$$

$$\ddot{x}_1+\frac{m_2}{m_1+m_2}r\ddot{\varphi}=0$$

odkud po úpravě dostaneme rovnici

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{r}\frac{m_1+m_2}{m_1}\varphi=0$$

která představuje rovnici harmonického $\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0$oscilátoru s úhlovou frekvencí $\omega=\sqrt{\frac{g}{r}\frac{m_1+m_2}{m_1}}$ a protože $\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}$ dostaneme

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r}{g}\frac{m_1}{m_1+m_2}}$$

nyní ještě stačí dokázat, že se m_2 pohybuje po elipse – zde je výhodné se vrátit k neaproximované Lagrangeově funkci a využít, že

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=\frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)\dot{x}_1+m_2r\cos\varphi+\dot{\varphi}\right)=0$$

je integrál pohybu a tedy

$$(m_1 + m_2) \int dx_1 + m_2 r \int \cos\varphi d\varphi = C_1 \int dt + C_2$$

$$(m_1 + m_2)x_1 + m_2 r \sin\varphi = C_1 t + C_2$$

a protože chceme trajektorii hmotného bodu m_2, dosadíme za $x_1 = x_2 - r\sin\varphi$

$$(m_1 + m_2)x_2 - m_1 r \sin\varphi = C_1 t + C_2$$

nyní eliminujeme φ – za tím účelem si vhodně vyjádříme předchozí rovnice

$$\frac{(m_1 + m_2)x_2 - C_1 t - C_2}{m_1 r} = \sin\varphi$$

$$\frac{y_2}{r} = \cos\varphi$$

které umocníme na druhou a sečteme, čímž dostaneme hledanou rovnici elipsy

$$\frac{y_2^2}{r^2} + \frac{\left((m_1 + m_2)x_2 - C_1 t - C_2\right)^2}{m_1^2 r^2} = 1$$

Příklad 2.12 □

Příklad 2.17

Přesvědčete se, že funkce $F_1(x, \dot{x}, t) = \dot{x} + gt$a $F_2(x, \dot{x}, t) = \dot{x}^2 + 2gx$ jsou první integrály rovnice $\ddot{x}+g = 0$, kde g je konstanta. Vypočítejte pomocí nich $x = x(t)$.
Řešení: F je integrál rovnice $\ddot{x} + g = 0$ právě když platí $\frac{d}{dt}F = 0$ a to použijeme:

$$\frac{d}{dt}F_1(x, \dot{x}, t) = \ddot{x} + g = 0$$

$$\frac{d}{dt}F_2(x, \dot{x}, t) = 2\dot{x}\ddot{x} + 2g\dot{x} = 2\dot{x}(\ddot{x} + g) = 0,$$

což bylo dokázati.

$x = x(t)$ vypočítáme pomocí těchto integrálů tak, že z první funkce vyjádříme $\dot{x} = F_1 - gt$ a dosadíme do druhé $F_2 = (F_1 - gt)^2 + 2gx$ a z této jednoduché rovnice nám vyjde, že

$$x(t) = \frac{F_2 - (F_1 - gt)^2}{2g} = -\frac{1}{2}gt^2 + F_1 t + \frac{F_2 - F_1}{2g}$$

Příklad 2.17 □

Příklad 2.18

Přesvědčete se, že funkce $F_1(x, \dot{x}, t) = -\omega t + \arctan\left(\frac{\omega x}{\dot{x}}\right)$ a $F_2(x, \dot{x}, t) = \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} + x^2$ jsou první integrály rovnice $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, kde ω je kladná konstanta.

Řešení: Vypočítejte pomocí nich $x = x(t)$

$$\frac{d}{dt}F_1 = -\omega + \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2}\frac{\dot{x}^2 - x\ddot{x}}{\dot{x}^2}\omega = \omega\frac{-(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) + \dot{x}^2 - x\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2} = -\omega x\frac{\ddot{x} + \omega^2 x}{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}F_2 = \frac{2\dot{x}\ddot{x}}{\omega^2} + 2x\dot{x} = 2\dot{x}\frac{\ddot{x} + \omega^2 x}{\omega^2} = 0$$

což bylo dokázati

a nyní odvodíme $x = x(t)$ tak, že z první funkce vyjádříme

$$\frac{\dot{x}}{\omega} = \frac{x}{tg(F_1 + \omega t)}$$

a dosadíme do druhé

$$F_2 = \frac{x^2}{tg^2(F_1 + \omega t)} + x^2 = x^2\frac{1 + tg^2(F_1 + \omega t)}{tg^2(F_1 + \omega t)} = x^2\frac{1}{\sin^2(F_1 + \omega t)}$$

čímž po úpravě dostaneme

$$x(t) = \sqrt{F_2}\sin(F_1 + \omega t)$$

Příklad 2.18 □

Příklad 2.22

Vypočtěte složky vektorů dostředivého, Eulerova a Coriolisova zrychlení v neinerciální soustavě S', která se otáčí kolem osy z' s předepsanou časovou závislostí úhlu otočení $\varphi = \varphi(t)$.

Řešení: Vektor otáčení okolo osy z :

$$\vec{\Omega} = (0, 0, \dot{\varphi}(t))$$

$$\dot{\vec{\Omega}} = (0, 0, \ddot{\varphi}(t))$$

dostředivé zrychlení $\vec{a}_d = -\vec{\Omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\Omega}) = (-\dot{\varphi}^2 x', \ -\dot{\varphi}^2 y', 0)$

Eulerovo zdrchlení $\vec{a}_E = -\vec{r}' \times \dot{\vec{\Omega}} = (-\ddot{\varphi} y', \ -\ddot{\varphi} x', 0)$

Coriolisovo zrychlení $\vec{a}_C = -2\dot{\vec{r}}' \times \vec{\Omega} = (-2\dot{\varphi}\dot{y}', \ -2\dot{\varphi}\dot{x}', 0)$

Příklad 2.22 □

Příklad 2.23

Hmotný bod je vázán na polopřímku vycházející z počátku O inerciálního systému S souřadnic x_1, x_2, x_3. Polopřímka leží v roviněx_1, x_2a otáčí se vůči S s konstantní úhlovou rychlostí Ω. Hmotný bod o hmotnosti m je po přímce volně pohyblivý a nepůsobí na něj žádná skutečná síla. Pomocí Lagrangeovy funkce odvoďte jeho pohybovou rovnici a integrujte ji.

Řešení: Vazby a následné transformace tedy jsou

$$\begin{aligned} \varphi &= \Omega t + \varphi_0 \\ x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2)$$

a řešíme Lagrangeovu rovnici

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m\Omega^2 r = m\ddot{r} - m\Omega^2 r = 0$$

dostali jsme diferenciální rovnici

$$\ddot{r} - \Omega^2 r = 0$$

jejímž řešení je

$$r(t) = A\cosh(\Omega t + \varphi_0)$$

Příklad 2.23 □

Příklad 2.24

Odvoďte rovnici pohybu hmotného bodu po kružnici poloměru R, která se otáčí konstantní úhlovou rychlostí Ω kolem svislé osy, ležící v rovině kružnice. Vzdálenost středu kružnice od osy otáčení je a. Soustava je v homogenním tíhovém poli. Při a = 0 diskutujte rovnovážné polohy bodu v závislosti na Ω.

Řešení: Počátek naší inerciální soustavy souřadné umístíme tak, že osa z je totožná s osou otáčení a kladný směr směřuje proti tíhovému poli, a zbylé dvě osy tvoří rovinu, ve které leží otáčející se střed kružnicenapišme Lagrangeovu funkci této soustavy

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

a vazby, kterým se soustava podřizuje

$$(x-a)^2+z^2=R^2$$

vzhledem k těmto vazbám i ke konstantní rychlosti otáčení kolem svislé osy zaveďme nové obecné souřadnice

$$\begin{aligned}x &= (a+R\sin\varphi)\cos\Omega t\\ y &= (a+R\sin\varphi)\sin\Omega t\\ z &= R\cos\varphi\end{aligned}$$

čímž Lagrangeova funkce dostane novou podobu

$$L=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2+2\Omega^2 aR\sin\varphi+\Omega^2R^2\sin^2\varphi)-mgR\cos\varphi$$

a přistoupíme k napsání Lagrangeových rovnic II. druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=mR^2\ddot{\varphi}-m\Omega^2aR\cos\varphi-\Omega^2R^2\sin\varphi\cos\varphi-mgR\sin\varphi=0$$

$$\ddot{\varphi}-\Omega^2\sin\varphi\cos\varphi-\frac{g}{R}\sin\varphi-\frac{\Omega^2a}{R}\cos\varphi=0$$

a nyní položme a $=0$ a hledejme rovnovážné body z podmínky $\ddot{\varphi}=0$

$$-\Omega^2\sin\varphi\cos\varphi-\frac{g}{R}\sin\varphi=0$$

$$\sin\varphi\left(\cos\varphi+\frac{g}{R\Omega^2}\right)=0$$

odkud dostáváme rovnovážné body jako

$$\varphi\in\left\{\pi\cdot Z,\ -\frac{g}{R\Omega^2}\right\}$$

Příklad 2.24 □

3 Kapitola 3: Základní úlohy mechaniky

Příklad 3.1

Řešte rovnici $\ddot{x} = k \sin \omega t$**, kde k a** ω **jsou kladné konstanty s počátečními podmínkami** $x(t_0) = x_0 = -\frac{k}{\omega^2} \sin \omega t_0$ **a** $\dot{x}(t_0) = v_0 = -\frac{k}{\omega} \cos \omega t_0$**. (Vynucené kmity)**
Řešení: Rovnici

$$\ddot{x} = k \sin \omega t$$

dvojnásobně separujeme a integrujeme na

$$x(t) = k \iint \sin \omega t \; dtdt = -\frac{k}{\omega^2} \sin \omega t + v_0 t + x_0.$$

Z počátečních podmínek dostaneme $x_0 = 0$ a $v_0 = 0$ a tedy výsledkem je

$$x(t) = -\frac{k}{\omega^2} \sin \omega t.$$

Příklad 3.1 □

Příklad 3.2

Řešte rovnici $\ddot{x} = -k\dot{x}$**, kde k je kladná konstanta, s počátečními podmínkami** $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$**. (Pohyb s odporem úměrným rychlosti) Znázorněte závislost** $x = x(t)$ **graficky !**
Řešení: V prvním kroku separací vyřešíme diferenciální rovnici v $\dot{x}$

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -k \sim \int \frac{1}{\dot{x}} d\dot{x} = -kt \sim \dot{x} = C_1 e^{-kt}$$

a po aplikaci počátečních podmínek

$$\dot{x}(0) = C_1 e^0 = C_1 = v_0$$

dostaneme

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-kt}.$$

V druhém kroku tento výraz separujeme na

$$dx(t) = v_0 e^{-kt} dt$$

a integrujeme obě strany, čímž dostaneme

$$x(t) = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2.$$

Obdobně jako v prvním kroku aplikujeme počáteční podmínky

$$x(0) = -\frac{v_0}{k}e^{-k0} + C_2 = x_0,$$

odkud $C_2 = x_0 + \frac{v_0}{k}$.

Výsledek je

$$x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) + x_0.$$

Příklad 3.2 □

Příklad 3.3

Řešte rovnici $\ddot{x} = -\omega^2 x$, kde ω je kladná konstanta (harmonický pohyb). Vyjádřete amplitudu A a počáteční fázi β kmitů pomocí počátečních hodnot $x(t_0) = x_0$ a $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Řešení: Řešení rovnice $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ hledáme ve tvaru

$$x(t) = A\cos(\omega t - \omega t_0 + \beta)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t - \omega t_0 + \beta)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t - \omega t_0 + \beta) = -\omega^2 x(t)$$

po dosazení do $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ dostaneme $-\omega^2 x(t) + \omega^2 x(t) = 0$ čímž jsme našli obecné řešení. Z počátečních podmínek

$$x(t_0) = x_0 = A\cos(\omega t_0 - \omega t_0 + \beta) = A\cos\beta$$

$$v(t_0) = v_0 = -\omega A\sin(\omega t_0 - \omega t_0 + \beta) = -\omega A\sin\beta$$

obdržíme soustavu dvou rovnic pro A a β, z které získáme A tak, že první z rovnic vynásobíme ω, obě pak umocníme na druhou a sečteme

$$\omega^2 x_0^2 + v_0^2 = \omega^2 A^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Neznámou β dostaneme tak, že zkoumáme poměr $-\frac{\omega x_0}{v_0}$

$$-\frac{\omega x_0}{v_0} = \frac{A\cos\beta}{A\sin\beta} = \cot g\ \beta$$

$$\beta = arctg(-\frac{v_0}{\omega x_0})$$

Příklad 3.3 □

Příklad 3.4

Najděte obecné řešení rovnice $\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x}$, kde ω_0, δ jsou kladné konstanty (tlumený harmonický oscilátor)

Řešení: Z charakteristické rovnice diferenciální rovnice $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

vypočteme

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - \omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

a tudíž řešení pro tlumený harmonický oscilátor je

$$x(t) = C_1 e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}.$$

Příklad 3.4 □

Příklad 3.5

Najděte obecné řešení rovnice $\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x} + B\sin\Omega t$, kde ω_0, δ jsou kladné konstanty (tlumený harmonický oscilátor)

Řešení: Vzhledem k výsledku příkladu 3.4 předpokládáme řešení rovnice $\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega_0^2 z = B\sin\Omega t$ ve tvaru

$$z(t) \;=\; x(t) + \xi(t),$$

kde $x(t) = C_1 e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}$ je obecné řešení diferenciální rovnice bez pravé strany $\xi(t)$je nějaké řešení diferenciální rovnice s pravou stranou (partikulární řešení). Po dosazení $z(t)$ do $\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega_0^2 z - B\sin\Omega t = 0$ dostaneme

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi - B\sin\Omega t = 0.$$

Protože $x(t)$ je řešením rovnice$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, dostaneme opět stejnou diferenciální rovnici

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi - B\sin\Omega t = 0.$$

Hledáme řešení ve tvaru

$$\xi(t) \;=\; A_1\cos\Omega t + A_2\sin\Omega t$$

$$\dot{\xi}(t) \;=\; -\Omega A_1\sin\Omega t + \Omega A_2\cos\Omega t$$

$$\ddot{\xi}(t) \;=\; -\Omega^2\xi(t)$$

Po dosazení upravujeme

$$(\omega_0^2-\Omega^2)(A_1\cos\Omega t+A_2\sin\Omega t)-2\delta A_1\Omega\sin\Omega+2\delta A_2\Omega\cos\Omega t-B\sin\Omega t=0$$

$$[(\omega_0^2-\Omega^2)A_1+2\delta A_2\Omega]\cos\Omega t+[(\omega_0^2-\Omega^2)A_2-2\delta A_1\Omega-B]\sin\Omega t=0$$

odkud získáme cennou soustavu rovnic

$$\begin{array}{l}(\omega_0^2-\Omega^2)A_1+2\delta A_2\Omega=0\\(\omega_0^2-\Omega^2)A_2-2\delta A_1\Omega-B=0\end{array},$$

odkud

$$\begin{array}{l}A_1=-\frac{2\delta\Omega}{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+(2\delta\Omega)^2}B\\A_2=-\frac{\Omega^2-\omega_0^2}{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+(2\delta\Omega)^2}B\end{array}.$$

Řešením je tedy

$$z(t)=C_1e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}+C_2e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}-\frac{B}{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+(2\delta\Omega)^2}(2\delta\Omega\cos\Omega t+(\Omega^2-\omega_0^2)\sin\Omega t)$$

Příklad 3.5 □

Příklad 3.6

Napište Lagrangeovu funkci hmotného bodu vázaného na kružnici o poloměru R a integrujte pohybovou rovnici.
Řešení: Vazby:

$$x^2+y^2=R^2$$

$$\begin{array}{l}x(t)\ =R\cos\varphi\\y(t)=R\sin\varphi\\z(t)=0\end{array}$$

derivace

$$\begin{array}{l}\dot x(t)\ =-\dot\varphi R\sin\varphi\\\dot y(t)=\dot\varphi R\cos\varphi\\\dot z(t)=0\end{array}$$

Lagrangeova funkce

$$L=T-U=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)=\frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2L=T-U=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)=\frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2L=T-U=\frac{1}{2}m(\dot R^2+R^2\varphi$$

z Lagrangeovy pohybové rovnice dostaneme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}L\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi}L = \frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\varphi}\right) = 0$$

a máme integrál pohybu, který nám rovnou umožní vyjádřit si

$$\dot{\varphi} = \frac{C_1}{mR^2}$$

odkud integrací

$$\varphi(t) = \frac{C_1}{mR^2}t + C_2 = \omega t + \varphi_0$$

Příklad 3.6 □

Příklad 3.7

Řešte pohybovou rovnici volného pádu s odporem vzduchu úměrným rychlosti.

Řešení: $m\ddot{x} + 2\delta\dot{x} = mg$, kde $\delta > 0$, upravíme na tvar diferenciální rovnice $\ddot{x} + k\dot{x} = g$, kde $k = \frac{2\delta}{m}$

Obecné řešení diferenciální rovnice bez pravé strany $\ddot{x} + k\dot{x} = 0$ (viz příklad 3.2) je

$$x(t) = K_1 e^{-kt} + K_2$$

řešení diferenciální rovnice s pravou stranou $\ddot{x} + k\dot{x} = g$ (partikulární řešení) nalezneme metodou variace konstant

$$\dot{x}(t) = -kK_1 e^{-kt} + \dot{K}_1 e^{-kt} + \dot{K}_2 = -kK_1 e^{-kt}$$

kde klademe

$$\dot{K}_1 e^{-kt} + \dot{K}_2 = 0$$

dále pak

$$\ddot{x}(t) = k^2 K_1 e^{-kt} - \dot{K}_1 k e^{-kt}$$

dosadíme do $\ddot{x} + k\dot{x} = g$

$$k^2 K_1 e^{-kt} - \dot{K}_1 k e^{-kt} - k^2 K_1 e^{-kt} = -\dot{K}_1 k e^{-kt} = g$$

odkud spočítáme

$$K_1 = -\frac{g}{k}\int e^{kt} dt + C_1 = -\frac{g}{k^2}e^{kt} + C_1$$

a z první rovnice $\dot{K}_1 e^{-kt} + \dot{K}_2 = 0$ dopočítáme

$$K_2 = -\int \dot{K}_1 e^{-kt} dt + C_2 = \frac{g}{k} t + C_2$$

řešení je tedy

$$x(t) = K_1 e^{-kt} + K_2 = -\frac{g}{k^2} + C_1 e^{-kt} + \frac{g}{k} t + C_2$$

budeme-li ovšem nárokovat počáteční podmínky $x(\textbf{??}) = x_0$ et $\dot{x}(\textbf{??}) = v_0$ dostaneme

$$\begin{array}{l} x(0) = -\frac{g}{k^2} + C_1 + C_2 = x_0 \\ \dot{x}(0) = -kC_1 + \frac{g}{k} = v_0 \end{array}$$

odkud

$$\begin{array}{l} C_1 = \frac{g}{k^2} - \frac{v_0}{k} \\ C_2 = x_0 + \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2} + \frac{v_0}{k} = x_0 + \frac{v_0}{k} \end{array} .$$

Celkem dostaneme řešení

$$x(t) = (\frac{g}{k^2} - \frac{v_0}{k}) e^{-kt} + \frac{g}{k} t + x_0 + \frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2}$$

a dosadíme ještě $k = \frac{2\delta}{m}$

$$x(t) = (\frac{gm^2}{4\delta^2} - \frac{mv_0}{2\delta}) e^{-\frac{2\delta}{m} t} + \frac{mg}{2\delta} t + x_0 + \frac{mv_0}{2\delta} - \frac{m^2 g}{4\delta^2}$$

Příklad 3.7 □

Příklad 3.8

Hmotný bod m pod vlivem tíže, zavěšený na pružině tuhosti k, je vázán na parabolu $z = \frac{x^2}{4a}$, v jejímž ohnisku $x = 0, z = a$ je pružina uchycena. Zaveďte obecnou souřadnici, sestavte Lagrangeovu funkci a řešte Lagrangeovy rovnice.

Řešení: 1. Sestavení Lagrangeovy funkce

Lagrangeova funkce

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{1}{2} k (r - r_0)^2$$

vazby jsou

$$z = \frac{x^2}{4a}, y = 0, r^2 = (z - a)^2 + x^2$$

volíme obecné souřadnice takto

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi \\ z &= a - r\cos\varphi \end{aligned}$$

a použijeme vazby k eliminaci r

$$z = \frac{x^2}{4a} = a - r\cos\varphi = \frac{(r\sin\varphi)^2}{4a}$$

převedeme rovnici kvadratickou v r

$$\sin^2(\varphi)\ r^2\ + 4a\cos(\varphi)\ r - 4a^2 = 0$$

kterou lehce vyřešíme a z kořenů

$$r_{1,2} = \frac{-2a\cos\varphi \pm 2a}{\sin^2\varphi} = \pm 2a\frac{1 \mp \cos\varphi}{1-\cos^2\varphi} = \pm 2a\frac{1}{1 \pm \cos\varphi}$$

zvolíme ten kladný

$$r = 2a\frac{1}{1+\cos\varphi}$$

vyčíslíme nyní souřadnice x a z pouze pomocí φ

$$\begin{aligned} x &= 2a\tfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \\ z &= \ \tfrac{4a^2}{4a}\tfrac{\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = a\tfrac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \end{aligned}$$

jejichž časové derivace jsou

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2a\tfrac{\cos\varphi(1+\cos\varphi)+\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}\dot{\varphi} = 2a\tfrac{1}{1+\cos\varphi}\dot{\varphi} \\ \dot{z} &= \ \tfrac{x}{2a}\dot{x} \end{aligned}$$

provedeme transformaci Lagrangeovy funkce na jedinou souřadnici φ

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz - \tfrac{1}{2}k(r-r_0)^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1+\tfrac{x^2}{4a^2}\right) - mgz - \tfrac{1}{2}k(r-r_0)^2 = \\ &= \tfrac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 4a^2\tfrac{1}{(1+\cos\varphi)^2}\left(1+\tfrac{\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}\right) - mga\tfrac{\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} - \tfrac{1}{2}k\left(\tfrac{2a}{1+\cos\varphi} - r_0\right)^2 \end{aligned}$$

a po úpravách goniometrických funkcí

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 8a^2\frac{1}{(1+\cos\varphi)^3} - mga\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} - \frac{1}{2}k\frac{(2a-r_0)^2 - 2(2a-r_0)r_0\cos\varphi + r_0^2\cos^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$$

2. Řešení Lagrangeových rovnic
kvůli řešitelnosti je potřeba provést aproximaci malých kmitů

$\frac{1}{1+\cos\varphi} \approx \frac{1}{2}$
$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2!}$
$\cos^2\varphi \approx 1 - \varphi^2$

potom Lagrangeova funkce, kde při úpravách vypustíme přebytečné konstanty, má mnohem jednodušší tvar

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 - mga\frac{\varphi^2}{4} - \frac{1}{2}k\frac{(2a-r_0)r_0\varphi^2 - r_0^2\varphi^2}{4} = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2a^2 - \frac{mga - k(ar_0 - r_0^2)}{4}\varphi^2$$

Lagrangeova pohybová rovnice druhého druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = ma^2\ddot{\varphi} + \frac{mga - k(ar_0 - r_0^2)}{2}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga - k(ar_0 - r_0^2)}{2ma^2}\varphi = 0$$

což je rovnice harmonického oscilátoru $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$, kde $\omega^2 = \frac{mga-k(ar_0-r_0^2)}{2ma^2}$
aproximovaným řešením této pohybové rovnice je tedy

$$\varphi(t) = A\cos\left(\frac{mga - k(ar_0 - r_0^2)}{2ma^2}t\right) + B\sin\left(\frac{mga - k(ar_0 - r_0^2)}{2ma^2}t\right)$$

Příklad 3.8 □

Příklad 3.9

Určete periodu kmitů v závislosti na energii, T=T(E), při jednorozměrném pohybu částice hmotnosti m v polích s potenciálními energiemi: a) $U(x) = A\left|x\right|^n$**b)** $U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2\alpha x},\ \ -U_0 < E < 0$**c)** $U(x) = U_0 tg^2\alpha x$

Řešení: Nejprve si připomeneme odvození obecného vyjádření periody T=T(E), kdy vyjdeme od zákona zachování energie

$$E = T + U = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = konst$$

odkud vyjádříme

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}$$

a vynásobíme-li tuto rovnici diferenciálem dt ,vydělíme pravou stranou a zintegrujeme, dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E-U}} + t_0$$

pro určení periody je nutné znát tzv. body obratu, které získáme z podmínky nulovosti kinetické energie

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E-U) = 0$$

a tedy vyšetřujeme, pro jaká x nastává E = U

požadovanou periodu v závislosti na E dostaneme jako dvojnásobek určitého integrálu času mezi body obratu $x_1,\ x_2$:

$$T = T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} (E-U)^{-1/2} dx$$

případ za a)

potenciál je$U(x) = A\left|x\right|^n$

body obratu získáme z rovnice $E = U = A\left|x\right|^n$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{\frac{E}{A}}$$

počítáme tedy určitý integrál

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} (E - A\left|x\right|^n)^{-1/2} dx = 2\sqrt{2m} \int_0^{\sqrt[n]{E/A}} (E - A\left|x\right|^n)^{-1/2} dx = \left\{ y = \frac{A}{E} x^n \right\} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2m}{E}} \sqrt[n]{\frac{E}{A}} \int_0^1$$

případ za b)

potenciál je$U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}$ kde $-U_0 < E < 0$

body obratu získáme z rovnice $E = U = -\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}$

$$\sinh^2 \alpha x = \cosh^2 \alpha - 1 = -\frac{U_0}{E} - 1 = -\frac{U_0 + E}{E}$$

$$\sinh \alpha x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{U_0 + E}{E}}$$

poznamenejme jen, že vhledem k podmínce $-U_0 < E < 0$má výše uvedený výraz smysl a důvod, proč ho ponecháváme právě v tomto vyjádření vyplyne z následujícího výpočtu určitého integrálu

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cosh \alpha x}{\sqrt{E \cosh^2 \alpha x + U_0}} dx = \sqrt{\frac{2m}{U_0 + E}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cosh \alpha x}{\sqrt{E/_{E+U_0} \sinh^2 \alpha x + 1}} dx = \left\{ y = \sqrt{\frac{-E}{E+U_0}} \sinh \alpha \right\} =$$
$$= \frac{\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{-E}} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{-E}} \left[\arcsin y \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{-E}}$$

$$T(E) = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{-E}}$$

případ za c)
potenciál je$U(x) = U_0 tg^2 \alpha x$
body obratu získáme z rovnice $E = U = U_0 tg^2 \alpha x$

$$tg \alpha x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{E}{U_0}}$$

výpočet určitého integrálu

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{E-U_0 tg^2 \alpha x}}dx = \sqrt{\frac{2m}{E}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\cos\alpha x}{\sqrt{1-{}^{(E+U_0)}/_{E}\sin^2\alpha x}}dx = \left\{y = \sqrt{\frac{E+U_0}{E}}\sin\alpha x\right\} =$$
$$= \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{E+U_0}}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{E+U_0}}[\arcsin y\,\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{E+U_0}}$$

$$T(E) = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{E+U_0}}$$

Příklad 3.9 □

Příklad 3.10

Odvoďte jednorozměrný pohyb částice v poli $U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}),\ A > 0,\ \alpha > 0$**:1) určete body obratu v závislosti na E2) určete** $x = x(t)$
Řešení: 1) body obratu
body obratu zjistíme z rovnice $E = U = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$, neb T = 0, tj. vyřešíme rovnici kvadratickou v $e^{-\alpha x}$:

$$e^{-\alpha x_{1,2}} = \frac{2A \pm \sqrt{4A^2 + 4AE}}{2A} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{A}}$$

pro další vývoj bádání je nutné si položit otázku, kdy má tato rovnice dvě různá řešení - je to právě když $E > -A$, aby byl diskriminant kladný a když $1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{A}} > 0$
odsud a ze zadání příkladu dostaneme celkem podmínky na A a E

$$-A\ <\ E < 0 < A$$

body obratu jsou
2) x = x(t)$x_{1,2} = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{A}}\right)$
vyjdeme ze zákona zachování energie

$$E = T + U = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = konst$$

odkud vyjádříme

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}$$

a vynásobíme-li tuto rovnici diferenciálem dt ,vydělíme pravou stranou a zintegrujeme, dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U}} + t_0$$

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - Ae^{-2\alpha x} + 2Ae^{-\alpha x}}} = \left\{ y = \frac{E}{\sqrt{AE + A^2}} \left(e^{\alpha x} + \frac{A}{E} \right) \right\} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{-2E}} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{-2E}} \arcsin y = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{-2E}} \arcsin \frac{E}{\sqrt{AE + A^2}} \left(e^{\alpha x} + \frac{A}{E} \right)$$

a po úpravách vedoucích k vyjádření x dostaneme

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(-\frac{A}{E} - \frac{\sqrt{AE + A^2}}{E} \sin \alpha \sqrt{\frac{-2E}{m}} (t - t_0) \right)$$

Příklad 3.10 □

Příklad 3.11

Na ose x inerciálního systému S se pohybují dva hmotné body $m_1,\ x_1$; $m_2,\ x_2$, pod účinkem konzervativní síly vzájemného působení s potenciální energií U(x), kde $x = x_1 - x_2$. Zaveďte souřadnice $x_1{}'$, x_2' vzhledem k těžišti, vyjádřete kinetickou energii v těžišťové soustavě pomocí $x = x_1{}' - x_2{}' = x_1 - x_2$ a napište Lagrangeovou funkci L. Jak souvisí obecná hybnost $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ s hybnostmi $p_1 = m_1\dot{x}_1,\ p_2 = m_2\dot{x}_2$?

Řešení: Označme souřadnice těžiště

$$R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

zaveďme tedy čárkované souřadnice vzhledem k těžišti

$$x_1' = x_1 - R$$
$$x_2' = x_2 - R$$

pro těžišťovou soustavu platí

$$m_1 x_1' + m_2 x_2' = 0$$

a zavedeme ještě

$$x = {x_1}' - {x_2}' = x_1 - x_2$$

můžeme tedy vyjádřit souřadnice v těžišťové soustavě pomocí jedné souřadnice x takto

$$\begin{aligned} x_1' &= \tfrac{m_2}{m_1+m_2} x \\ x_2' &= -\tfrac{m_1}{m_1+m_2} x \end{aligned}$$

kinetická energie vyjádřená v těžišťové soustavě

$$T = m_1 \dot{x'}_1^2 + m_2 \dot{x'}_2^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{x}^2$$

přičemž Lagrangeova funkce bude mít tvar

$$L = T - U = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{x}^2 - U(x)$$

a hybnost

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{x} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$p = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_2$$

Příklad 3.11 □

Příklad 3.12

Soustava se skládá z jedné částice hmotnosti M a n částic o stejných hmotnostech m. Vyloučením pohybu hmotného středu zredukujte úlohu na problém pohybu n těles.

Řešení: $\vec{R}$ je polohový vektor částice o hmotnosti M , $\vec{R}_i$ jsou polohové vektory n částic o hmotnosti m

zavedeme nové proměnné $\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{R}$a počátek umístíme do hmotného středu tak, že platí

$$M\vec{R} + m \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i = 0$$

nyní si vyjádříme "staré"proměnné pomocí "nových"

po úpravách a dosazení nových proměnných platí, že

$$\vec{R} = -\frac{m}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i = -\frac{m}{M}\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i + \vec{R}) = \frac{m}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i - n\frac{m}{M}\vec{R}$$

odkud snadno dostaneme

$$\vec{R} = -\frac{m}{M+nm}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i$$

$$\dot{\vec{R}} = -\frac{m}{M+nm}\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i$$

zbývající staré souřadnice vyjádříme takto (rovnou jejich derivace)

$$\dot{\vec{R}}_k = \dot{\vec{r}}_k + \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{r}}_k - \frac{m}{M+nm}\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i$$

Lagrangeovu funkci $L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}m\sum_{k=1}^{n}\dot{\vec{R}}_k^2 - U$ nyní přetransformujeme do nových souřadnic

$$L = \frac{1}{2}M\left(-\frac{m}{M+nm}\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i\right)^2 + \frac{1}{2}m\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{\vec{r}}_k - \frac{m}{M+nm}\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i\right)^2 - U =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Mm^2}{(M+nm)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i\right)^2 + \frac{1}{2}m\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{\vec{r}}_k^2 - 2\frac{m}{M+nm}\dot{\vec{r}}_k\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i + \frac{m^2}{(M+nm)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i\right)^2\right) - U =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Mm^2 + nm^3}{(M+nm)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i\right)^2 + \frac{1}{2}m\sum_{k=1}^{n}\dot{\vec{r}}_k^2 - \frac{m^2}{M+nm}\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{\vec{r}}_k\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i\right) - U =$$

$$= L = \frac{1}{2}m\sum_{k=1}^{n}\dot{\vec{r}}_k^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+nm}\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{\vec{r}}_i\right)^2 - U$$

Příklad 3.12 □

Příklad 3.13

Odvoďte Newtonův zákon gravitační z Keplerových zákonů.

Řešení: Z rovnic $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$a $r^2\dot{\varphi} = A$ vypočítáme $a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$a $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$

$$a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{1+e\cos\varphi}{p}\frac{d}{dt}A = 0$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{p}{1+e\cos\varphi}\right) - \frac{A^2}{r^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{pe\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}\dot{\varphi}\right) - \frac{A^2}{r^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{A}{r^2}\frac{per^2\sin\varphi}{p^2}\right) - \frac{A^2}{r^3} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{Ae}{p}\sin\varphi\right) - \frac{A^2}{r^3} = \frac{Ae}{p}\cos\varphi\dot{\varphi} - \frac{A^2}{r^3} = \frac{A^2}{r^2}\left(\frac{e}{p}\cos\varphi - \frac{1}{r}\right) = \frac{A^2}{r^2}\left(\frac{e\cos\varphi}{p} - \frac{1+e\cos\varphi}{p}\right) = -\frac{A^2}{pr^2}$$

poznamenejme jen pro přehlednost, že jsme v předchozích krocích použili $\dot{\varphi} = \frac{A}{r^2}$ výsledek opravdu odpovídá Newtonovu gravitačnímu zákonu

$$a_\varphi = 0 \; et \; a_r = -\frac{A}{pr^2}$$

Příklad 3.13 □

Příklad 3.14

Ze vzdálenosti R (s nulovou počáteční rychlostí) padá těleso malé hmotnosti m_1 (meteor) k tělesu hmotnosti $m_2 \gg m_1$ (Země). Zapište a řešte pohybovou rovnici meteoru ve vhodném inerciálním systému. Určete dobu pádu t(h), kde $h = R - r$a ukažte, že $t(h) \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}$je-li $h \ll R$.

Řešení: Za souřadný inerciální systém zvolíme systém spojený s tělesem hmotnosti m_1 a za počátek zvolíme přirozeně jeho střed

vyjádříme zákon zachování energie druhého tělesa (meteoru) v gravitačním poli tělesa prvního

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 - \gamma\frac{m_1 m_2}{r}$$

kde r je vzdálenost mezi středy oněch těles a ještě určíme z počátečních podmínek celkovou energii soustavy - totiž, že v času t = 0 padá těleso s nulovou počáteční rychlostí v výšky R

$$E = -\gamma\frac{m_1 m_2}{R}$$

a tak nás rovnice

$$E = -\gamma\frac{m_1 m_2}{R} = \frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 - \gamma\frac{m_1 m_2}{r}$$

přivádí k možnosti vyjádřit pohybovou rovnici

$$\dot{r} = -\sqrt{2\gamma\frac{m_1 m_2}{m_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

odkud po separaci dostaneme výraz elementu času dt, který zintegrujeme a dostaneme rešení pohybové rovnice

$$t-t_0 = -\int \frac{dr}{\sqrt{2\gamma m_2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)}} = \left\{\xi = \sqrt{\frac{r}{R}}\right\} = -\frac{2R\sqrt{R}}{\sqrt{2\gamma m_2}}\int \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{2R\sqrt{R}}{\sqrt{2\gamma m_2}}\left[-\frac{1}{2}\xi\sqrt{1-\xi^2}+\frac{1}{2}\text{arcsi}\right.$$

čímž dostaneme

$$t-t_0 = -\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2\gamma m_2}}\left[-\sqrt{\frac{r}{R}}\sqrt{1-\frac{r}{R}}+R\arcsin\left(\sqrt{\frac{r}{R}}\right)\right]$$

pro zjištění doby pádu z výšky R (počáteční $r = R$ pro$t_0 = 0$) do nějaké výšky $r = R-h$

$$t(h) = -\frac{R\sqrt{R}}{\sqrt{2\gamma m_2}}\left[-\sqrt{\frac{R-h}{R}}\sqrt{1-\frac{(R-h)}{R}}+\arcsin\left(\sqrt{\frac{R-h}{R}}\right)+\sqrt{\frac{R}{R}}\sqrt{1-\frac{R}{R}}-\arcsin\left(\sqrt{\frac{R}{R}}\right)\right] t(h) =$$

Příklad 3.14 □

Příklad 3.17

Nakreslete si graf efektivního potenciálu pro izotropní prostorový oscilátor $U = \frac{1}{2}kr^2$, $k > 0$. Diskutujte kruhovou dráhu částice: určete poloměr dráhy, rychlost a energii částice při dané hodnotě momentu hybnosti l.

Řešení: (pozn. kreslit v této verzi příručky nebudeme)

efektivní potenciál je

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2} = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$$

kruhová dráha částice v tomto poli nastává právě když $E_0 = (U_{ef})_{\min} = U_{ef}(r_0)$, takže nám nezbývá než najít minimum funkce $U_{ef}(r)$, přičemž si rovnou všimneme, že funkce $U_{ef}(r)$je pro kladná r spojitá a zdola omezená (např. 0) a shora omezená není ($\lim_{r\to\infty} U_{ef}(r) = \infty$), takže minimum existuje

$$U'_{ef}(r) = kr - \frac{l^2}{mr^3}$$

$$U'_{ef}(r_0) = 0 = kr_0 - \frac{l^2}{mr_0^3}$$

$$r_0^2 = \frac{l}{\sqrt{km}}$$

energie

$$E_0 = (U_{ef})_{\min} = U_{ef}(r_0) = \sqrt{\frac{k}{m}}l$$

rychlost zjistíme ze zákona zachování energie

$$E_0 = T + U = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mr_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{l}{\sqrt{km}} = \sqrt{\frac{k}{m}}l$$

$$v_0^2 = \frac{\sqrt{km}}{m^2}l$$

Příklad 3.17 □

Příklad 3.19

Ukažte, že orbita je v bodech obratu k centru vydutá, je-li tam skutečná síla přitažlivá, a je vypuklá, je-li tam skutečná síla odpudivá.

Řešení: Budeme zkoumat vztah

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -U'(r)$$

v bodech obratu platí, že $\ddot{r} = 0$ a tedy

$$ma_r = -mr\dot{\varphi}^2 = -U'(r)$$

a odtud rovnou vidíme, že je-li v tomto místě skutečná síla přitažlivá, tj. je $-U'(r) < 0$ a tudíž i $ma_r < 0$ a obráceně.

Příklad 3.19 □

Příklad 3.20

Ukažte, že při pohybu částice v poli $U(r) = \frac{\alpha}{r}$, kde α má libovolné znamení, existuje vektorový integrál pohybu $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + \alpha\frac{\vec{r}}{r}$ (Runge-Lentzův vektor) specifický právě pro toto pole.

Řešení: $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + \alpha\frac{\vec{r}}{r}$ je integrálem pohybu $\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A} = \vec{0}$

Zkoumejme tedy

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} \times \vec{L}\right) + \alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} + \alpha\frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2}$$

zde je dobré si uvědomit několik vztahů:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U = -\nabla\frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{r}\times\vec{r}=\vec{0}$$

$\vec{a}\times\ (\vec{b}\times\vec{c})\ =\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ (věta "bac-cab")
na jejichž základě rovnou dostaneme, že

$$\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{L}}=\dot{\vec{r}}\times(\vec{r}\times m\ddot{\vec{r}}+\dot{\vec{r}}\times m\dot{\vec{r}})=\dot{\vec{r}}\times(\vec{r}\times\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}+m\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}})=\dot{\vec{r}}\times(\vec{0}+\vec{0})=\vec{0}$$

a zbude nám

$$\frac{d}{dt}\vec{A}=\ddot{\vec{r}}\times\vec{L}+\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{L}}+\alpha\frac{\dot{\vec{r}}r-\vec{r}\dot{r}}{r^2}=\ddot{\vec{r}}\times(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}})+\alpha\frac{\dot{\vec{r}}r-\vec{r}\dot{r}}{r^2}=\alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r^3}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})+\alpha\frac{\dot{\vec{r}}r-\vec{r}\dot{r}}{r^2}$$

kde jsme použili $m\ddot{\vec{r}}=\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$.
nyní opět aplikujeme větu "bac-cab"na vektorový součin

$$\frac{d}{dt}\vec{A}=\alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r^3}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})+\alpha\frac{\dot{\vec{r}}r-\vec{r}\dot{r}}{r^2}=\frac{\alpha}{r^3}(\vec{r}(\dot{\vec{r}}\vec{r})-\dot{\vec{r}}(\vec{r}\vec{r})+\dot{\vec{r}}r^2-\vec{r}\dot{r}r)$$

a ze znalosti že$\vec{r}\,\dot{\vec{r}}=r\,\dot{r}$ rovnou plyne, že

$$\frac{d}{dt}\vec{A}=\frac{\alpha}{r^3}(\vec{r}(\dot{r}r)-\dot{\vec{r}}r^2+\dot{\vec{r}}r^2-\vec{r}\dot{r}r)=0$$

Příklad 3.20 □

Příklad 3.22

Určete rovnici dráhy v potenciálu $U(r)=-\frac{\alpha}{r^2}$pro ty hodnoty l, při nichž nastane pád na centrum.
Řešení: Efektivní potenciál je

$$U_{ef}=U(r)+\frac{l^2}{2mr^2}$$

podmínka pádu na centrum zní:

$$r^2U(r)+\frac{l^2}{2mr^2}<0$$

a odtud snadno přeformulujeme tuto podmínku na

$$\frac{l^2}{2mr^2}<\alpha$$

a nyní pro tyto hodnoty určíme rovnici dráhy - vyjdeme ze zákona zachování energie

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{ef} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{l^2}{2m} - \alpha\right)$$

který separujeme na rovnici

$$\frac{2}{m}(E + B\frac{1}{r^2}) = \dot{r}^2$$

kde jsme označili $B = \left(\alpha - \frac{l^2}{2m}\right)$a z podmínky pro pád na centrum $\frac{l^2}{2mr^2} < \alpha$ vidíme, že B > 0

potom

$$dt = -\frac{rdr}{\sqrt{\frac{2}{m}(Er^2 + B)}}$$

vyjádřili jsme si tak diferenciál času, který budeme dosazovat do rovnice

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$$

kterou ovšem za tím účelem musíme separovat

$$d\varphi = \frac{l}{mr^2}dt = -\frac{l}{mr^2}\frac{rdr}{\sqrt{\frac{2}{m}(Er^2 + B)}}$$

a tuto rovnici budeme integrovat

$$\varphi + \varphi_0 = -\frac{l}{\sqrt{2Bm}}\int\frac{dr}{r\sqrt{\frac{E}{B}r^2 + 1}} = \left\{\xi = \sqrt{\frac{|E|}{B}}\frac{1}{r}\right\} = \frac{l}{\sqrt{2Bm}}\int\frac{\xi d\xi}{\xi^2\sqrt{\frac{E}{|E|}\frac{1}{\xi^2} + 1}} = \frac{l}{\sqrt{2Bm}}\int\frac{d\xi}{\sqrt{\frac{E}{|E|} + \xi^2}}$$

uvědomme si, že integrál

$$\int\frac{d\xi}{\sqrt{-1+\xi^2}} = arccosh(\xi)$$
$$\int\frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = arcsinh(\xi)$$

dostaneme tedy dvě různá řešení v závislosti na znaménku energie

$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - l^2}}\cosh\left(\sqrt{\frac{2m\alpha}{l^2} - 1}(\varphi + \varphi_0)\right)$ pro $E \leq 0$

$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - l^2}}\sinh\left(\sqrt{\frac{2m\alpha}{l^2} - 1}(\varphi + \varphi_0)\right)$pro $E \geq 0$

Příklad 3.22 □

Příklad 3.23

Při jakých hodnotách lje možný finitní pohyb v polích(a) $U(r) = -\alpha\frac{1}{r}e^{-\kappa r}$ $(\alpha > 0)$**(b)** $U(r) = -Ve^{-\kappa^2 r^2}(V > 0)$

Řešení: Finitní pohyb nastává v případě, jen když U_{ef}má minimum

budeme předpokládat pouze kladná r

(a) $U(r) = -\alpha\frac{e^{-\kappa r}}{r}$

efektivní energie je

$$U_{ef}(r) = -\alpha\frac{e^{-\kappa r}}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

zajímá nás, jestli a pro jaké hodnoty $l$nabývá efektivní energie minimum - z toho důvodu budeme zkoumat její první derivaci podle r

$$U'_{ef} = \alpha\frac{e^{-\kappa r}}{r^2} + \alpha\kappa\frac{e^{-\kappa r}}{r} - \frac{l^2}{mr^3}$$

a budeme hledat, za jakých podmínek je tato funkce rovna nule

$$\frac{\alpha}{r^3}\left(re^{-\kappa r} + \kappa r^2 e^{-\kappa r} - \frac{l^2}{\alpha m}\right) = 0$$

rovnou je vidět, že tato podmínka bude splněna, pokud (použijeme-li pro přehlednost následující označení)

$$g(r) = e^{-\kappa r}(r + \kappa r^2) - \frac{l^2}{\alpha m} = 0$$

vlastnosti funkce g(r):

limita v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \lim_{r\to 0+} g(r) = -\frac{l^2}{\alpha m} \ < \ 0$$

pro zjištění znaménka funkce potřebujeme

$$g'(r) = e^{-\kappa r}(1 + \kappa r - \kappa^2 r^2)$$

nyní přichází nejdůležitější úvaha celého příkladu - protože potřebujeme vědět, kdy funkce $U_{ef}(r)$ nabývá minima, je nezbytné zjistit, za jakých podmínek je její první derivace podle r nulová

tento problém ovšem přeneseme na hledání nulového bodu funkce g(r) a protože známe limity této funkce na okrajích definičního oboru a tato funkce je spojitá na tomto definičním oboru, stačí když najdeme bod r_0 takový, že $g'(r_0) = 0$ (křivka g(r) se v tomto bodě láme) a $g(r_0) \geq 0$ (křivka g(r) má v okrajích svého definičního oboru záporné limity a proto nalezneme-li touto podmínkou taková l, pro která bude díky spojitosti zaručena existence alespoň jednoho nulového bodu, máme vyhráno)

hledejme tedy

$$g'(r_0) = e^{-\kappa r_0}(1 + \kappa r_0 - \kappa^2 r_0^2) = 0$$

neboli

$$1 + \kappa r_0 - \kappa^2 r_0^2 = 0$$

a tuto kvadratickou rovnici vyřešíme a protože hledáme pouze nezáporná řešení, dostaneme

$$r_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\kappa}$$

z podmínky $g(r_0) \geq 0$ dostaneme podmínku

$$g(r_0) = e^{-\kappa r_0}(r_0 + \kappa r_0^2) - \frac{l^2}{\alpha m} \geq 0$$

$$l^2 \leq \alpha m e^{-\kappa r_0}(r_0 + \kappa r_0^2)$$

takže po dosazení za r_0 výše zmíněný výraz dostaneme, že finitní pohyb v tomto potenciálním poli nastává pro hodnoty

$$l^2 \leq \frac{\alpha m}{\kappa} e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(2 + \sqrt{5})$$

(b) $U(r) = -Ve^{-\kappa^2 r^2}$

budeme postupovat obdobně jako v případě (a), tentokráte ovšem stručněji

$$U_{ef}(r) = -Ve^{-\kappa^2 r^2} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

první derivace podle r

$$U'_{ef} = 2V\kappa^2 r e^{-\kappa^2 r^2} - \frac{l^2}{mr^3}$$

a budeme hledat, za jakých podmínek je tato funkce rovna nule, tedy

$$2V\kappa^2 r e^{-\kappa^2 r^2} - \frac{l^2}{mr^3} = 0$$

a tuto rovnici přeformulujeme pro kladná r takto (přičemž opět provedeme pro přehlednost následující označení)

$$g(r) = r^4 e^{-\kappa^2 r^2} - \frac{l^2}{2V\kappa^2 m} = 0$$

vlastnosti funkce g(r):

limita v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \lim_{r\to 0+} g(r) = -\frac{l^2}{2V\kappa^2 m} < 0$$

pro zajištění existence nulového bodu funkce g(r) potřebujeme vědět, kdy

$$g'(r) = e^{-\kappa^2 r^2}(4r^3 - 2\kappa^2 r^5) = 0$$

neboli

$$4 - 2\kappa^2 r^2 = 0$$

$$r_0^2 = \frac{2}{\kappa^2}$$

a protože nás zajímají pouze kladné body

$$r_0 = \frac{\sqrt{2}}{\kappa}$$

v tomto bodě tedy funkce g(r) nabývá stacionární hodnoty a vzhledem k její spojitosti a kladným limitám v krajních bodech svého definičního oboru nyní stačí určit, při jakých hodnotách $l$je $g(r_0) \geq 0$

$$g(r_0) = r_0^4 e^{-\kappa^2 r_0^2} - \frac{l^2}{2V\kappa^2 m} = \frac{4}{\kappa^4}e^{-2} - \frac{l^2}{2V\kappa^2 m} \geq 0$$

$$l^2 \leq Vm\frac{8}{\kappa^2}e^{-2}$$

3.24 Najděte trajektorie a zákon pohybu částice v poli sférické potenciálové jámy $U = \begin{cases} -U_0\ , r < R \\ 0,\ r > \ R \end{cases}$ při různých hodnotách **l**, E.

pro r < R vyjádříme ze zákona zachování energie (kde při úpravě použijeme $\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - U_0$$

diferenciál dt takto

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}(E + U_0) - \frac{l^2}{m^2 r^2}$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + U_0) - \frac{l^2}{m^2 r^2}}}$$

z již zmíněného vztahu $\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$ vyjádříme

$$d\varphi = \frac{l}{mr^2}dt = \frac{l}{mr^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+U_0) - \frac{l^2}{m^2r^2}}} = \frac{ldr}{r^2\sqrt{2m(E+U_0) - \frac{l^2}{r^2}}}$$

zintegrujeme tento vztah a dostaneme

$$\varphi = \int \frac{ldr}{r^2\sqrt{2m(E+U_0) - \frac{l^2}{r^2}}} = \frac{l}{\sqrt{2m(E+U_0)}}\int \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{l^2}{2m(E+U_0)r^2}}} = \left\{ y = \frac{l}{r\sqrt{2m(E+U_0)}} \right\} = -\int$$

rovnice trajektorie je

$$r(\varphi) = \frac{l}{\cos(\varphi+\varphi_0)\sqrt{2m(E+U_0)}}$$

Příklad 3.23 □

Příklad 3.27

Při jakém poměru hmotností částic $\kappa = \frac{m_1}{m_2}$ je energie předaná při jejich pružné srážce maximální ?

Řešení: budeme diskutovat čelní ráz $\frac{E_2'}{E_1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$ kdy chceme, aby poměr energií byl co největší při daných hmotnostech

označíme si tedy tento poměr jako funkci $f(\kappa)$

$$f(\kappa) = \frac{E_2'}{E_1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = 2\frac{(m_1+m_2)^2}{(m_1+m_2)^2} - 2\frac{m_1^2+m_2^2}{(m_1+m_2)^2} = 2 - 2\frac{\kappa^2+1}{(\kappa+1)^2}$$

a hledejme extrém této funkce

$$f'(\kappa) = -2\frac{2\kappa(\kappa+1)^2 - 2(\kappa+1)(\kappa^2+1)}{(\kappa+1)^4} = -2\frac{2\kappa(\kappa+1) - 2(\kappa^2+1)}{(\kappa+1)^3} = -2\frac{2\kappa-2}{(\kappa+1)^3} = 0$$

$$\kappa_0 = 1$$

odkud plyne, že energie předaná při pružné srážce je maximální pro $m_1 = m_2$.

Příklad 3.27 □

Příklad 3.28

Dokažte zákon odrazu (rovnost úhlu odrazu a úhlu dopadu) pro pružný odraz částice m na pevné stěně ($M \to \infty$).
Řešení: Vyjdeme ze vztahu pro pružné srážky dvou hmotných bodů hmotností m a M, kdy těleso hmotnosti M je v klidu a těleso hmotnosti m na něj nalétává pod úhlem θ_1 a úhel rozptylu částic se značí χ

ona rovnice zní

$$tg\ \theta_1 = \frac{M \sin\chi}{m + M\cos\chi} = \frac{\sin\chi}{\kappa + \cos\chi}$$

kde κznačí poměr $\kappa = \frac{m}{M}$
při $M \to \infty$jde $\kappa \to 0$ a vztah mezi úhly přechází v

$$tg\ \theta_1 = \frac{\sin\chi}{\cos\chi} = tg\ \chi$$

Příklad 3.28 □

Příklad 3.37

Soustava podle obr. 3.38 (skriptum str. 112) se otáčí kolem svislé osy s konstantní úhlovou rychlostí $\dot\varphi = \Omega$; bod m_2 se může volně pohybovat podél osy.(??) Napište Lagrangeovu funkci soustavy.(??) Při $m_1 = m_2 = m$a $\Omega > \Omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}}$ určete úhlovou frekvenci ωmalých kmitů soustavy kolem rovnovážné polohy.
Řešení: (??) Lagrangeovu funkci soustavy

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot x_1^2 + \dot x_3^2 + \dot y_1^2 + \dot y_3^2 + \dot z_1^2 + \dot z_3^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot x_2^2 + \dot y_2^2 + \dot z_2^2) + m_1 g(y_1 + y_3) + m_2 g y_2$$

vyjádříme v obecné souřadnici θ(viz obrázek) a k tomu použijeme vazby

$$\begin{aligned} &x_1^2 + (y_2 - y_1)^2 = a^2 \\ &x_3^2 + (y_3 - y_1)^2 = a^2 \\ &y_1 = y_3 \end{aligned}$$

a vzhledem k otáčení soustavy kolem osy y úhlovou rychlostí $\varphi = \Omega t$ zavedeme nové polární souřadnice vztahy :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a\sin\theta\cos\Omega t\\
x_2 &= 0\\
x_3 &= -a\sin\theta\cos\Omega t\\
y_1 &= a\cos\theta\\
y_2 &= 2a\cos\theta\\
y_3 &= a\cos\theta\\
z_1 &= a\sin\theta\sin\Omega t\\
z_2 &= 0\\
z_3 &= -a\sin\theta\sin\Omega t
\end{aligned}
$$

a tak tedy dostaneme Lagrangeovu funkci

$$L = m_1a^2(\dot\theta^2 + \Omega^2\sin^2\theta) + 2a^2m_2\sin^2\theta\dot\theta^2 + 2ga(m_1+m_2)\cos\theta$$

(**??**) nyní je potřeba odvodit úhlovou frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy (viz teorie) při $m_1 = m_2 = ma$ pro tento účel vyjdeme z upravené Lagrangeovy funkce

$$L = ma^2(\dot\theta^2 + \Omega^2\sin^2\theta + 2\sin^2\theta\dot\theta^2 + 2\Omega_0^2\cos\theta)$$

odvodíme Lagrangeovy pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = ma^2\frac{d}{dt}\left(2\dot\theta + 4\sin^2\theta\dot\theta\right) - ma^2(2\Omega^2\sin\theta\cos\theta + 4\sin\theta\cos\theta\dot\theta^2 - 2\Omega_0^2\sin\theta) = 0$$

$$\ddot\theta + 2\sin^2\theta\ddot\theta - \Omega^2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta\dot\theta^2 + \Omega_0^2\sin\theta = 0$$

rovnovážnou polohu dostaneme z podmínky $\left[\dot\theta\right]_{\theta=\theta_0} = 0$, pak se předchozí vztah zjednoduší na

$$-\Omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0 + \Omega_0^2\sin\theta_0 = 0$$

a rovnováha nastává pro úhel

$$\cos\theta_0 = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$$

určíme úhlovou frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy tak, že pomocí Taylorovy věty rozvineme U a T v bodě θ_0, kdy nás bude zejména zajímat (opět viz teorie)
$\gamma = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)_{\theta=\theta_0}$ a $\mu = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right)_{\theta=\theta_0}$
a potom podmínka

$$\left|\gamma - \omega^2\mu\right| = 0$$

nám konečně nabídne hledanou frekvenci
z potenciální energie

$$U = -ma^2(\Omega^2 \sin^2\theta + 2\Omega_0^2 \cos\theta)$$

$$\gamma = -ma^2 \frac{1}{2!}\left(-2\Omega^2 + 4\Omega^2 \frac{\Omega_0^4}{\Omega^4} - 2\Omega_0^2 \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\right) = ma^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{\Omega^2}$$

z kinetické energie

$$T = ma^2\dot{\theta}^2(1 + 2\sin^2\theta)$$

$$\mu = ma^2\left(3 - 2\frac{\Omega_0^4}{\Omega^4}\right) = ma^2 \frac{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}{\Omega^4}$$

rovnice $|\gamma - \omega^2\mu| = 0$ se převede na

$$ma^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{\Omega^2} - \omega^2 ma^2 \frac{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}{\Omega^4} = 0$$

odkud snadno dostaneme výsledek

$$\omega^2 = \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{\Omega^2} \frac{\Omega^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4} = \Omega^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}$$

Příklad 3.37 □

Příklad 3.38

Určete normální kmity dvojitého kyvadla (viz skripta U 2.4) při malých amplitudách. Zkoumejte zvláště případ $l_1 = l_2$, $m_1 \gg m_2$, v němž jsou vlastní frekvence téměř stejné. Ukažte, že po malém vychýlení horní hmoty se amplitudy obou hmot budou střídavě zvětšovat a zmenšovat ("rázy").

Řešení: V tomto příkladě volně navážeme na řešený příklad U2.4 na straně 44 a tedy přepišme Lagrangeovu funkci v polárních souřadnicích

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2)gl_1\cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

najděme (pomocí teorie) vlastní frekvence těchto kmitů kolem rovnovážné polohy ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$)při malých výchylkách

vyjádříme si potenciální energii

$$U = -(m_1+m_2)gl_1\cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

a najdeme matici charakterizující aproximaci potenciální energie do druhého řádu

$$\gamma_{i,k} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi_i\partial\varphi_k}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2gl_2 \end{pmatrix}$$

vyjádříme si kinetickou energii

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

a najdeme matici charakterizující aproximaci kinetické energie do druhého řádu

$$\mu_{i,k} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\varphi}_i\partial\dot{\varphi}_k}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix}$$

vlastní frekvence dostaneme z rovnice (opět viz teorie)

$$\left|\gamma_{i,k} - \omega^2\mu_{i,k}\right| = 0$$

čímž dostaneme

$$\begin{vmatrix} (m_1+m_2)gl_1 - \omega^2(m_1+m_2)l_1^2 & -\omega^2m_2l_1l_2 \\ -\omega^2m_2l_1l_2 & m_2gl_2 - \omega^2m_2l_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$[(m_1+m_2)gl_1 - \omega^2(m_1+m_2)l_1^2][m_2gl_2 - \omega^2m_2l_2^2] - \omega^4m_2^2l_1^2l_2^2 = 0$$

$(m_1+m_2)g^2m_2l_2l_1 - \omega^2(m_1+m_2)m_2gl_2l_1^2 - \omega^2(m_1+m_2)gm_2l_2^2l_1 + \omega^4(m_1+m_2)m_2l_2^2l_1^2 - \omega^4m_2^2l_1^2l_2^2 = 0$a zjednodušíme na

$$(m_1+m_2)g^2 - \omega^2g(m_1+m_2)(l_1+l_2) + \omega^4m_1l_2l_1 = 0$$

což je kvadratická rovnice v ω^2, kterou snadno vyřešíme a dostaneme

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1l_1l_2}\left((m_1+m_2)(l_1+l_2) \pm \sqrt{(m_1+m_2)^2(l_1+l_2)^2 - 4m_1(m_1+m_2)l_1l_2}\right)$$

Příklad 3.38 □

Příklad 3.39

Určete kmity soustavy dvou harmonických oscilátorů se slabou bilineární vazbou, $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(x^2+y^2) + \alpha xy,\ \alpha \ll \omega_0^2$.

Řešení: příslušné Lagrangeovy rovnice II. druhu získáme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \ddot{x} + \omega_0^2x - \alpha y = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \ddot{y} + \omega_0^2y - \alpha x = 0$$

dostaneme tak soustavu dvou diferenciálních rovnic, z které sečtením a také odečtením dostaneme nové dvě rovnice

$$\begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2}(x-y) + \omega_0^2(x-y) + \alpha(x-y) = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}(x+y) + \omega_0^2(x+y) - \alpha(x+y) = 0 \end{array}$$

zavedeme nové souřadnice $q_1,\ q_2$ vztahy

$$q_1 = x - y,\ q_2 = x + y$$

a soustava rovnic přejde na

$$\begin{array}{l} \ddot{q}_1 + (\omega_0^2 + \alpha)q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + (\omega_0^2 - \alpha)q_2 = 0 \end{array}$$

odkud lehce zjistíme normální kmity soustavy jako

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \pm \alpha$$

(poznámka: k nalezení těchto frekvencí lze také použít obdobnou metodiku jako v příkladě 3.28)

Příklad 3.39 □

Příklad 3.41

Padostroj. Přes volně otáčivý válec poloměru R a momentem setrvačnosti I je nataženo nehmotné vlákno délky l, na němž jsou zavěšena tělesa hmotností m_1, m_2. Sestavte a řešte Lagrangeovu rovnici.

Řešení: počátek soustavy souřadné umístíme do středu válce, kladný směr osy z směřuje proti směru tíhového pole, úhel φ určuje pootočení válce

vazby jsou

$$\begin{array}{l} x_1 = -x_2 = R \\ y_1 = y_2 = 0 \\ z_1 + z_2 + \pi R = l \\ z_1 = \varphi R + z_1^{(0)} \end{array}$$

Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

pomocí těchto vazeb přetransformujeme (s vypuštěním konstantních členů) na

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\dot{z}_1^2 + (m_1 - m_2) g z_1$$

řešme nyní Lagrangeovu rovnici II. druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_1} = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{z}_1 - (m_1 - m_2)g = 0$$

kterou řeší s ohledem na neznámé počáteční podmínky

$$z_1(t) = \tfrac{1}{2}\tfrac{(m_1-m_2)R^2}{(m_1+m_2)R^2+I}gt^2 + \dot{z}_1^{(0)}t + z_1^{(0)}$$
$$z_2(t) = -\tfrac{1}{2}\tfrac{(m_1-m_2)R^2}{(m_1+m_2)R^2+I}gt^2 + \dot{z}_2^{(0)}t + z_2^{(0)}$$

Příklad 3.41 □

Příklad 3.42

Dvojitý padostroj. Na soustavu podle obr. 3.39 (skriptum strana 113) působí síla tíže. Horní otáčivá kladka (moment setrvačnosti I_1, poloměr r_1) je pevně zavěšena, dolní otáčivá kladka (hmotnost m_2, poloměr r_2, moment setrvačnosti I_2) je pohyblivá ve svislém směru. Vlákno spojující tělesa m_1, m_2 má délku l_1, vlákno spojující tělesa m_3, m_4 má délku l_2. Sestavte a řešte Lagrangeovy rovnice.

Řešení: napišme nejprve vazby

$$z_1 + z_2 + \pi r_1 = l_1$$

$$z_3 - z_2 + z_4 - z_2 + \pi r_2 = l_2$$

$$z_1 = \varphi_1 r_1 + z_1^{(0)}$$

$$z_3 = \varphi_2 r_2 + z_3^{(0)}$$

ze kterých vyjádříme

$$z_2 = l_1 - \pi r_1 - z_1$$

$$z_4 = l_2 - \pi r_2 + 2l_1 - 2\pi r_1 - 2z_1 - z_3$$

$$\varphi_1 = \frac{z_1 - z_1^{(0)}}{r_1}$$

$$\varphi_2 = \frac{z_3 - z_3^{(0)}}{r_2}$$

a dosadíme do této Lagrangeova funkce

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_i \dot{z}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} I_i \dot{\varphi}_i^2 + \sum_{i=1}^{4} m_i g z_i$$

čímž po úpravách dostaneme
$L = \underbrace{\frac{(m_1+m_2+4m_4)r_1^2+I_1}{2r_1^2}}_{A}\dot{z}_1^2 + \underbrace{\frac{(m_3+m_4)r_2^2+I_2}{2r_2^2}}_{B}\dot{z}_3^2 + \underbrace{2m_4}_{C}\dot{z}_1\dot{z}_3 + \underbrace{(m_1-m_2-2m_4)g}_{D}z_1 + \underbrace{(m_3-m_4)g}_{E}z_3$a pro přehlednost dalších kroků jsme si jednotlivé členy označili písmenky

$$L = A\dot{z}_1^2 + B\dot{z}_3^2 + C\dot{z}_1\dot{z}_3 + Dz_1 + Ez_3$$

sestavme Lagrangeovy rovnice II. druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_1} = 2A\ddot{z}_1 + C\ddot{z}_3 - D = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_3} = 2B\ddot{z}_3 + C\ddot{z}_1 - E = 0$$

které nás dovedou na soustavu diferenciálních rovnic, maticově zapsanou jako

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2A & C \\ C & 2B \end{pmatrix}\ddot{\vec{z}} + = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

kterou vyřešíme tak, že najdeme inverzní matici

$$\frac{1}{4AB - C^2}\begin{pmatrix} 2B & -C \\ -C & 2A \end{pmatrix}$$

a celou rovnost zprava touto maticí vynásobíme a dostaneme tak

$$\ddot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} 2BD - CE \\ 2AE - CD \end{pmatrix}$$

a tedy řešením je
$\vec{z} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2BD - CE \\ 2AE - CD \end{pmatrix} t^2 + \dot{\vec{z}}^{(??)}t + \vec{z}^{(??)}$

Příklad 3.42 □

4 Kapitola 4: Základní principy mechaniky

Příklad 4.2

Přes hřeben střechy (vrcholový úhel2α) je nataženo nehmotné vlákno délky lzatížené na koncích hmotnostmi m_1, m_2. Kdy nastane rovnováha ?

Řešení: označme souřadnice obou těles: $m_1 : [x_1, z_1]$ *resp.* $m_2 : [x_2,\ z_2]$ a zvolme počátek ve vrcholu střechy přičemž kladný směr osy z míří proti tíhovému zrychlení

nejprve si zapíšeme vazby, které tato tělesa podstupují

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 \equiv x_1 - z_1 tg\alpha_1 = 0\\
&\varphi_2 \equiv x_2 + z_2 tg\alpha_2 = 0\\
&\varphi_3 \equiv \sqrt{x_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + z_2^2} - \mathbf{l} = 0
\end{aligned}$$

a skutečné síly, které na tělesa působí

$$\begin{aligned}
&\vec{F}_1 = \ (0, 0, -m_1 g)\\
&\vec{F}_2 = (0, 0, -m_2 g)
\end{aligned}$$

problém statické rovnováhy budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů (viz teorie), která nás v tomto případě přivede na soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 + \lambda_3 \tfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+z_1^2}} = 0\\
&-m_1 g - \lambda_1 tg\ \alpha_1 + \lambda_3 \tfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+z_1^2}} = 0\\
&\lambda_2 + \lambda_3 \tfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2+z_2^2}} = 0\\
&-m_2 g + \lambda_2 tg\ \alpha_2 + \lambda_3 \tfrac{z_2}{\sqrt{x_2^2+z_2^2}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_1 - z_1 tg\ \alpha_1 = 0\\
&x_2 + z_2 tg\ \alpha_2 = 0\\
&\sqrt{x_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + z_2^2} - \mathbf{l} = 0
\end{aligned}$$

z této soustavy si vyjádříme

$$\begin{aligned}
&x_1 = z_1 tg\alpha_1\\
&x_2 = -z_2 tg\alpha_2
\end{aligned}$$

odkud plyne (z předpokladu pohybu pouze po střeše, tj. že souřadnice z jsou záporné), že z první a třetí rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = -\lambda_3 \tfrac{z_1 tg\ \alpha_1}{\sqrt{z_1^2(1+tg^2\alpha_1)}} = -\lambda_3 \tfrac{z_1}{|z_1|} \sin\alpha_1 = \lambda_3 \sin\alpha_1\\
&\lambda_2 = \lambda_3 \tfrac{z_2 tg\ \alpha_2}{\sqrt{z_2^2(1+tg^2\alpha_2)}} = \lambda_3 \tfrac{z_2}{|z_2|} \sin\alpha_2 = -\lambda_3 \sin\alpha_2
\end{aligned}$$

a druhá a čtvrtá na tvar

$$\begin{aligned}
&-m_1 g - \lambda_1 tg\ \alpha_1 - \lambda_3 \cos\alpha_1 = 0\\
&-m_2 g + \lambda_2 tg\ \alpha_2 - \lambda_3 \cos\alpha_2 = 0
\end{aligned}$$

kde ještě provedeme dosazení za λ_1 a λ_2

$$\begin{aligned} -m_1 g - \lambda_3 \sin\alpha_1 \; tg\alpha_1 - \lambda_3 \cos\alpha_1 = 0 \\ -m_2 g - \lambda_3 \sin\alpha_2 \; tg\alpha_2 - \lambda_3 \cos\alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

čímž po vyjádření λ_3 z každé rovnice dostaneme podmínku statické rovnováhy (pro libovolné souřadnice obou hmotných bodů svázaných pouze vazebními podminkami)

$$\begin{aligned} \lambda_3 = -m_1 g \cos\alpha_1 \\ \lambda_3 = -m_2 g \cos\alpha_2 \end{aligned}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}$$

Příklad 4.2 □

Příklad 4.3

Dva hmotné body m_1, m_2kloužou bez tření po parabole $z = -\frac{x^2}{2p}$a jsou spojeny nehmotným vláknem délky r, které prochází ohniskem paraboly $[0, 0, -\frac{p}{2}]$. Která poloha hmotných bodů je rovnovážná ?

Řešení: poznamenejme, že tíhové pole má směr jako obvykle, totiž působí proti směru osy z.

tuto úlohu opět budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů (hledání extrémů na varietách)

síly působící na hmotné body jsou

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 = \; (0, 0, -m_1 g) \\ \vec{F}_2 = (0, 0, -m_2 g) \end{aligned}$$

napišme vazby, podle kterých se pohyb může uskutečnit

$$\begin{aligned} &\varphi_1 \equiv \sqrt{x_1^2 + (z_1 + \tfrac{p}{2})^2} + \sqrt{x_2^2 + (z_2 + \tfrac{p}{2})^2} - r = \; 0 \\ &\varphi_2 \equiv z_1 + \tfrac{x_1^2}{2p} = 0 \\ &\varphi_3 \equiv z_2 + \tfrac{x_2^2}{2p} = 0 \end{aligned}$$

pro jednoduchost dalších výpočtů aplikací vazeb φ_2 a $\varphi_3$na vazbu první dostaneme

$$\begin{aligned} &\varphi_1 \equiv -z_1 - z_2 + p - r = \; 0 \\ &\varphi_2 \equiv z_1 + \tfrac{x_1^2}{2p} = 0 \\ &\varphi_3 \equiv z_2 + \tfrac{x_2^2}{2p} = 0 \end{aligned}$$

již zmiňovanou metodou Lagrangeových multiplikátorů dostaneme rovnice

$$\lambda_2 \frac{x_1}{p} = 0$$
$$\lambda_3 \frac{x_2}{p} = 0$$
$$-m_1 g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$-m_2 g + \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

a k této soustavě patří ještě již zmiňované vazby

$$-z_1 - z_2 + p - r = 0$$
$$z_1 + \frac{x_1^2}{2p} = 0$$
$$z_2 + \frac{x_2^2}{2p} = 0$$

ze kterých dostaneme přípustná řešení

x_1	z_1	x_2	z_2	λ_1	λ_2	λ_3
0	0	$\pm\sqrt{2p(r-p)}$	$p-r$	m_2	$g(m_1 - m_2)$	0
$\pm\sqrt{2p(r-p)}$	$p-r$	0	0	0	$g(m_2 - m_1)$	m_1

poznámka: povšimněme si, že kromě velikosti vazbových sil (udané Lagrangeovými multiplikátory) nezávisí rovnovážná poloha na hmotnostech.

Příklad 4.3 □

Příklad 4.4

Nehmotné vlákno délky l je položeno přes vrcholek paraboly $z = -\frac{x^2}{2p}$. Jeho konce jsou zatíženy hmotnostmi m_1, m_2. Ve které poloze vlákna nastane rovnováha ?

Řešení: poznámka: k řešení tohoto příkladu, ostatně jako k mnoha dalším lze použít různé přístupy, znalosti a podobně - avšak i tentokrát použijeme do jisté míry (s ohledem na řešitelnost rovnic) univerzální Lagrangeův formalismus

začněme tedy tak, že popíšeme vazby, kterými se tělesa při svém pohybu řídí

$$\varphi_1 \equiv z_1 + \frac{x_1^2}{2p} = 0$$
$$\varphi_2 \equiv z_2 + \frac{x_2^2}{2p} = 0$$
$$\varphi_3 \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + z'^2} dx - l = 0$$

povšimněme si na vysvětlenou vazby φ_3 - tato vazba vyjadřuje spojení obou hmotných bodů nehmotným vláknem délky l, která se docela snadno odvodí přes Pythagorovu větu aplikovanou na infinitesimální přírůstky $(dl)^2 = (dx)^2 + (dz)^2$ - zbytek už si laskavý čtenář jistě domyslí sám

tuto vazbu si samozřejmě zjednodušíme a to následovně : ze vztahů

$$z=-\frac{x^2}{2p},\ z'=-\frac{x}{p}$$

po dosazení do vazby φ_3 dostaneme

$$\varphi_3 \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\tfrac{x^2}{p^2}}dx - l = \ 0$$

nyní se pustíme do hledání bodů statické rovnováhy - budeme postupovat obdobně jako v předchozím příkladě, a to metodou Lagrangeových multiplikátorů, čímž dostaneme tyto čtyři rovnice

$$\begin{array}{l}\lambda_1\frac{x_1}{p}-\lambda_3\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}=0\\ -m_1g+\lambda_1=0\\ \lambda_2\frac{x_2}{p}+\lambda_3\sqrt{1+\frac{x_2^2}{p^2}}=0\\ -m_2g+\lambda_2=0\end{array}$$

matematická poznámka: $\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx = f(x_2)-f(x_1)$ a proto jsme při odvozování předchozích rovnic mohli použít $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}dx\right)=-\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}dx\right)=\sqrt{1+\frac{x_2^2}{p^2}}$

z těchto čtyř rovnic si vyjádříme

$$\begin{array}{l}\lambda_1=m_1g\\ \lambda_2=m_2g\end{array}$$

a po dosazení do zbylých dvou rovnic máme

$$\begin{array}{l}m_1g\frac{x_1}{p}-\lambda_3\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}=0\\ m_2g\frac{x_2}{p}+\lambda_3\sqrt{1+\frac{x_2^2}{p^2}}=0\end{array}$$

odkud nakonec eliminací λ_3 vyplyne rovnice

$$\frac{m_1x_1}{\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}}+\frac{m_2x_2}{\sqrt{1+\frac{x_2^2}{p^2}}}=0$$

to je ovšem jen jedna rovnice pro dvě neznámé - tu druhou nám zajistí dosud nepoužitá vazba

$$\varphi_3 \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\tfrac{x^2}{p^2}}dx - l = \ 0$$

spočtěme integrál

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\tfrac{x^2}{p^2}}dx = \ \left\{\frac{x}{p}=\sinh\xi\right\} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} p\cosh^2(\xi)d\xi = \frac{p}{4}\left[2\xi+\sinh 2\xi\right]_{\xi_1}^{\xi_2}$$

$$\xi = arcsinh\frac{x}{p}$$

druhá rovnice tedy bude

$$\frac{p}{4}\left[2arcsinh\frac{x_2}{p} + \sinh\left(2arcsinh\frac{x_2}{p}\right)\xi - 2arcsinh\frac{x_1}{p} - \sinh\left(2arcsinh\frac{x_1}{p}\right)\xi\right] = l$$

kterou lze ještě nepatrně zjednodušit na

$$\frac{p}{2}\left[arcsinh\frac{x_2}{p} + \frac{x_2}{p}\sqrt{1+\frac{x_2^2}{p^2}} - arcsinh\frac{x_1}{p} - \frac{x_1}{p}\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}\right] = l$$

a tedy rovnovážné hodnoty souřadnic x_1, x_2 jsou řešením těchto dvou zarámovaných rovnic.

Příklad 4.4 □

Příklad 4.5

Hmotný bod m je vázán na elipsu ve svislé rovině s poloosami a (vodorovná), b (svislá), a < b. Kromě tíže g působí na bod pružina o tuhosti k uchycená ve středu elipsy, jejíž rovnovážná délka $a_0 < a$. Určete rovnovážné polohy bodu.

Řešení: souřadný systém zvolíme, jako obvykle, tak, střed souřadného systému umístíme přirozeně do středu elipsy a kladný směr osy y bude opět směřovat proti směru působení tíhového pole

vazbu v takovéto soustavě potom zachycuje rovnice

$$\varphi \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

k nalezení rovnovážných poloh použijeme opět Lagrangeův formalismus, tj. metodu hledání extrému funkce na varietě - stacionární bod potenciálu U

vyjádřeme si potenciální energii jako

$$U = mgy + \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2+y^2} - a_0)^2$$

hledejme tedy stacionární body této funkce dvou proměnných na varietě φ (pomocí Lagrangeových multiplikátorů - viz matematická analýza)

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{x^2+y^2} - a_0) - 2b^2x\lambda = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = mg + k\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{x^2+y^2} - a_0) - 2a^2y\lambda = 0$$

celkem se tedy dostáváme soustavu rovnic

$$x\left(1-2b^2\lambda-\frac{a_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$$

$$y\left(1-2a^2\lambda-\frac{a_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{mg}{k}$$

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

tuto soustavu řeší následující dva stacionární body:

$$x=0,\ \ y=\pm b$$

a body, které jsou řešením této soustavy rovnic

$$x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2,\ kde\ x\neq 0$$

$$y\left(1-\frac{a_0}{\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2+y^2}}\right)=\frac{mg}{k}\frac{2b^2}{b^2-a^2}$$

poznámka: z poslední rovnice je vidět, že při $\frac{m}{k}\to 0$je dalším přibližným stacionárním bodem $x=\pm b,\ y\ =\ 0$

Příklad 4.5 □

Příklad 4.6

Na přímce jsou dány tři ekvidistantní elektricky nabité hmotné body s náboji $e_1,\ e_2,\ e_3$. Určete náboje tak, aby soustava byla v udané konfiguraci v rovnováze a ukažte, že tato rovnováha není stabilní.

Řešení: statická rovnováha pro ekvidistantní náboje znamená, že podle principu virtuální práce (virtuálního posunutí) musí platit

$$\sum_i F_i\delta x_i=0$$

protože naším úkolem bude zjistit, je-li tato konfigurace v takové rovnováze stabilní či nikoliv, vyčísleme nejdříve potenciál této soustavy

$$U(x_1,x_2,x_3)=\frac{e_1e_2}{x_2-x_1}+\frac{e_1e_3}{x_3-x_1}+\frac{e_2e_3}{x_3-x_2}$$

potom síly působící v této soustavě se vyjádří

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

a podmínka statické rovnováhy je pak

$$-\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i = 0$$

a protože δx_i můžou být obecně lineárně nezávislá je tato podmínka splněna právě když

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

což nás dovede v ekvidistantních bodech $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = a$; $x_3 - x_1 = 2a$ na soustavu rovnic

$$-\frac{e_1 e_2}{a^2} - \frac{e_1 e_3}{4a^2} = 0$$

$$\frac{e_1 e_2}{a^2} - \frac{e_2 e_3}{a^2} = 0$$

$$\frac{e_1 e_3}{4a^2} + \frac{e_2 e_3}{a^2} = 0$$

odtud dostaneme podmínku pro rovnováhu

$$\begin{array}{l} e_1 = e_3 = e \\ e_2 = -\frac{1}{4}e_1 = -\frac{1}{4}e \end{array}$$

abychom mohli nyní rozhodnout, zda-li je tato rovnováha stabilní, je nutné zjistit, jestli v bodech stability potenciál U nabývá minimum.

pro přehlednost nyní zvolme nové souřadnice $y_i = x_i - x_2$, $i \in \hat{3}$, tj. spojíme novou soustavu souřadnou pevně s prostředním nábojem

potenciál má nyní tvar

$$U(y_1, y_3) = \frac{1}{4}e^2\left(+\frac{1}{y_1} + 4\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_3}\right) = \frac{1}{4}e^2\frac{(y_1 + y_3)^2}{y_1 y_2 (y_3 - y_1)}$$

a budeme zkoumat extrém této funkce dvou reálných proměnných v bodě $[y_1 = -a, y_3 = a]$

$$U'(y_1, y_3) = \frac{1}{4}e^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{y_1^2} + \frac{4}{(y_3 - y_1)^2} \\ \frac{1}{y_3^2} - \frac{4}{(y_3 - y_1)^2} \end{pmatrix}$$

a budeme zkoumat definitnost druhé derivace potenciálu (podrobnosti vyšetřování reálných funkcí více proměnných se dozvíte v matematické analýze)

$$U''(y_1,y_3)=\frac{1}{2}e^2\begin{pmatrix} \frac{1}{y_1^3}+\frac{4}{(y_3-y_1)^3} & -\frac{4}{(y_3-y_1)^3} \\ -\frac{4}{(y_3-y_1)^3} & -\frac{1}{y_3^3}+\frac{4}{(y_3-y_1)^3} \end{pmatrix}$$

$$U''(-a,a)=\frac{1}{2}\frac{e^2}{a^3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

tato matice je indefinitní a tudíž potenciál nemá v této konfiguraci minimum a rovnováha je proto nestabilní

Příklad 4.6 □

Příklad 4.9

Na hmotný bod vázaný na kulové ploše $\varphi \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2-r^2=0$ působí konstantní gravitační síla $\vec{F}=(0,0,-mg)$. Určete rovnovážné polohy (x_i^o)a složky reakční síly R_i^o v (x_i^o).

Řešení:

opět použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů a tak dostaneme podmínky statické rovnováhy jako

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-r^2=0$$

$$0+2\lambda x_1=0$$

$$0+2\lambda x_2=0$$

$$-mg+2\lambda x_3=0$$

odkud dostaneme řešení

$$\vec{x}^o=(0,0,\pm r)$$

a reakční síla v těchto bodech je

$$\vec{R}^o=(0,0,mg)$$

Příklad 4.9 □

Příklad 4.10

Hmotný bod, na který působí konstantní gravitační síla $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ je vázán na dvě válcové plochy $\varphi_1 \equiv x_1^2 + x_3^2 - a^2 = 0$ a $\varphi_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - b^2 = 0$, kde $a^2 > b^2 > 0$. Určete rovnovážné polohy (x_i^o) a složky reakční síly R_i^o v (x_i^o). Které rovnovážné polohy jsou stabilní ?

Řešení: protože budeme na konci rozhodovat o stabilitě, použijeme v tomto příkladě metodu hledání extrému funkce více proměnné na varietách z matematické analýzy - zkoumaná funkce bude potenciál U a budou nás zajímat (a) stacionární body této funkce vzhledem k varietám(b) v kterých bodech má tato funkce minimum vzhledem k varietám (v takových bodech je potom rovnováha stabilní).

(a) stacionární body

sestavme funkci

$$\Lambda = U - \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2$$

po dosazení

$$\Lambda = mgx_3 - \lambda_1(x_1^2 + x_3^2 - a^2) - \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - b^2)$$

a hledejme její stacionární body (tj. $\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i} = 0$)

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1} = -2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_1 = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2} = -2\lambda_2 x_2 = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_3} = mg - 2\lambda_1 x_3 = 0$$

a nezapomeňme ještě na vazbové podmínky

$$\Phi \equiv \begin{cases} \varphi_1 \equiv x_1^2 + x_3^2 - a^2 = 0 \\ \varphi_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - b^2 = 0 \end{cases}$$

takovouto soustavu rovnic potom řeší (pro přehlednost liché indexy řešení odpovídají bodům majícím kladnou složku odpovídající souřadnici x_3 a sudé opačně - tj. body s lichými indexy jsou "nahoře"a body se sudými "dole", budeme-li se orientovat podle působení tíhového pole)

indexy řešení	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2	$\vec{R}$
	0	$\pm b$	a	$\frac{mg}{2a}$	0	$(0, 0, mg)$
	0	$\pm b$	-a	-$\frac{mg}{2a}$	0	$(0, 0, mg)$
	$\pm b$	0	$\sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{mg}{2\sqrt{a^2-b^2}}$	-$\frac{mg}{2\sqrt{a^2-b^2}}$	$(0, 0, mg)$
	$\pm b$	0	-$\sqrt{a^2 - b^2}$	-$\frac{mg}{2\sqrt{a^2-b^2}}$	$\frac{mg}{2\sqrt{a^2-b^2}}$	$(0, 0, mg)$

kde jsme použili $\vec{R} = (2x_1\lambda_1 + 2x_1\lambda_2,\ 2\lambda_2 x_2,\ 2\lambda_1 x_3)$
(b) otázka minima ve stacionárních bodech
první derivaci funkce Λ lze obecně zapsat (viz předchozí rovnice)

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_1 \\ -2\lambda_2 x_2 \\ mg - 2\lambda_1 x_3 \end{pmatrix}$$

druhá derivace bude

$$\Lambda'' = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 - 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

zkoumejme nyní definitnost v jednotlivých stacionárních bodech a to tak, že zúžíme druhou derivaci na tečný prostor (podrobnosti viz matematická analýza)

protože $\Phi' = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$, dostaneme v konkrétních případech

	Φ'	Λ''	příslušná kvadratická forma
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2a \\ 0 & \pm 2b & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{mg}{a}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$Q(h) = \frac{mg}{a}(h,0,0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{mg}{a}h^2$ lokální maximum $\Rightarrow$nestabilní rovnovážná poloha
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a \\ 0 & \pm 2b & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{mg}{a}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Q(h) = \frac{mg}{a}(h,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mg}{a}h^2$ lokální minimum $\Rightarrow$stabilní rovnovážná poloha
	$\begin{pmatrix} \pm 2b & 0 & 2\sqrt{a^2-b^2} \\ \pm 2b & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$Q(h) = \frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}(0,h,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}h^2$ lokální minimum $\Rightarrow$stabilní rovnovážná poloha
	$\begin{pmatrix} \pm 2b & 0 & -2\sqrt{a^2-b^2} \\ \pm 2b & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Q(h) = \frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}(0,h,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}h^2$ lokální maximum $\Rightarrow$nestabilní rovnovážná poloha

poznámka k řešení: postup užitý v tomto příkladě není jediný možný, je však názorný z hlediska aplikace poznatků matematické analýzy

Příklad 4.10 □

Příklad 4.11

Pomocí d'Alembertova principu odvoďte pohybovou rovnici matematického kyvadla.

Řešení:

zavedeme úhel φ jako obecnou souřadnici a pomocí něj vyjádříme všechny veličiny vystupující v d'Alembertově principu

d'Alembertův princip v kartézských souřadnicích je (kde osa y směřuje ve směru tíhového zrychlení)

$$(-m\ddot{x})\delta x + (mg - m\ddot{y})\delta y = 0$$

a použijeme vzhledem k povaze matematického kyvadla transformace

$$x = r\sin\varphi$$
$$y = r\cos\varphi$$

kde

$$\ddot{x} = -r\dot{\varphi}^2\sin\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\ddot{y} = -r\dot{\varphi}^2\cos\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi$$

a

$$\delta x = r\cos\varphi\;\delta\varphi$$
$$\delta y = -r\sin\varphi\;\delta\varphi$$

transformujme d'Alembertův princip na

$$(mr\dot{\varphi}^2\sin\varphi - mr\ddot{\varphi}\cos\varphi)r\cos\varphi\;\delta\varphi - (mg + mr\dot{\varphi}^2\cos\varphi + mr\ddot{\varphi}\sin\varphi)r\sin\varphi\;\delta\varphi = 0$$

$$mr^2(-\ddot{\varphi} - \frac{g}{r}\sin\varphi)\;\delta\varphi = 0$$

a má-li být tato rovnost splněna pro libovolné $\delta\varphi$, dostáváme pohybovou rovnici matematického kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0$$

Příklad 4.11 □

Příklad 4.13

Dvě tělesa hmotností m_1, m_2 jsou spojena nehmotným vláknem délky l klouzajícím bez tření po pevném válci o poloměru R. Určete pohyb soustavy pod vlivem tíže s použitím d'Alembertova principu. Vypočtěte sílu napínající vlákno.

Řešení: nechť kladný směr osy z směřuje ve směru působení tíhového zrychlení

zapišme vazbu mezi tělesy jako

$$z_1 + z_2 = l - \pi R$$

odkud plyne

$$\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_2$$

zapišme d'Alemberův princip

$$(m_1 g - T - m_1\ddot{z}_1)\delta z_1 + (m_2 g - T - m_2\ddot{z}_2)\delta z_2 = 0$$

z kterého, má-li být tato rovnost splněna pro libovolné δz_i, obdržíme soustavu rovnic (po použití vazby)

$$m_1 g - T - m_1\ddot{z}_1 = 0$$

$$m_2 g - T + m_2\ddot{z}_1 = 0$$

snadno z této soustavy rovnic vyjádříme

$$T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

a

$$\ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

odkud integrací dostáváme

$$z_1(t) = \frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2 + \dot{z}_1^o t + z_1^o$$

$$z_2(t) = -\frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2 - \dot{z}_1^o t - z_1^o + l - \pi R$$

4.14 Těžní klec. Lano nesoucí klec o hmotnosti M je vedeno přes kolo poloměru R a je taženo silou F=F(t). Pomocí d'Alembertova principu odvoďte pohybovou rovnici klece. Moment setrvačnosti kola hmotnosti m vyjádřete pomocí gyračního poloměru R_g, $I = mR_g^2$.

d'Alembertův princip pro tuto situaci zní

$$(F - Mg - M\ddot{z})\delta z + (-I\ddot{\varphi})\delta\varphi = 0$$

s použitím vztahů

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{z}}{R}$$

$$\delta z = R\delta\varphi$$

dostáváme

$$(F - Mg - M\ddot{z})\delta z + (-m\frac{R_g^2}{R}\ddot{z})\frac{\delta z}{R} = 0$$

a tedy

$$(F - Mg - M\ddot{z} - m\frac{R_g^2}{R^2}\ddot{z})\delta z = 0$$

odkud pohybová rovnice

$$\left(M + m\frac{R_g^2}{R^2}\right)\ddot{z} = F - Mg$$

Příklad 4.13 □

Příklad 4.15

Pomocí d'Alembertova principu odvoďte pohybovou rovnici rotačního tělesa (hmotnost m, poloměr R, gyrační poloměr Rg), které se valí bez klouzání po rovině nakloněné pod úhlem α.

Řešení: d'Alembertův princip v této situaci je

$$(mg\sin\alpha - m\ddot{s})\delta s + (-I\ddot{\varphi})\delta\varphi = 0$$

transformujeme pomocí vztahů

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{R}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{s}}{R}$$

$$I = mR_g^2$$

na

$$(mg\sin\alpha - m\ddot{s})\delta s + (-mR_g^2\frac{\ddot{s}}{R})\frac{\delta s}{R} = 0$$

a po úpravě dostaneme

$$m\left[g\sin\alpha - \ddot{s}\left(1 + \frac{R_g^2}{R^2}\right)\right]\delta s = 0$$

odkud obdržíme pohybovou rovnici

$$\ddot{s} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{R_g^2}{R^2}}$$

Příklad 4.15 □

Příklad 4.18

Přesvědčete se přímým výpočtem, že změna vázanosti $Z(\ddot{x}_i)$ při změně zrychlení o $\delta\ddot{x}_i$ je rovna $Z(\ddot{x}_i+\delta\ddot{x}_i)-Z(\ddot{x}_i)=\sum_i(m_i\ddot{x}_i-F_i)\delta\ddot{x}_i+\frac{1}{2}\sum_i m_i(\delta\ddot{x}_i)^2$ a tedy podle Gaussova principu $\sum_i F_i-m_i\ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i=0,\ (\delta x_i=\delta\dot{x}_i=0)$Z nabývá při skutečném pohybu svého minima.

Řešení: veličina vázanost (nutkání) představuje

$$Z(\ddot{x}_i)=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\ddot{x}_i-\frac{F_i}{m_i}\right)^2$$

zkoumejme tedy

$$Z(\ddot{x}_i+\delta\ddot{x}_i)-Z(\ddot{x}_i)=\frac{1}{2}\sum_i\left\{m_i\left[(\ddot{x}_i+\delta\ddot{x}_i)^2-\ddot{x}_i^2\right]-2F_i\left[\ddot{x}_i+\delta\ddot{x}_i-\ddot{x}_i\right]+\frac{F_i^2}{m_i}-\frac{F_i^2}{m_i}\right\}$$

$$Z(\ddot{x}_i+\delta\ddot{x}_i)-Z(\ddot{x}_i)=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left[2\ddot{x}_i\delta\ddot{x}_i+(\delta\ddot{x}_i)^2\right]-2F_i\delta\ddot{x}_i=\sum_i\left(m_i\ddot{x}_i-F_i\right)\delta\ddot{x}_i+\frac{1}{2}\sum_i m_i(\delta\ddot{x}_i)^2$$

což bylo dokázati

Příklad 4.18 □

Příklad 4.20

Vypočtěte hodnotu akce $S=\int_0^T L\,dt$pro(a) skutečný pohyb při volném pádu hmotného bodu hmotnosti m, $z_a(t)=\frac{1}{2}gt^2$(b) variovaný pohyb $z_b(t)=ct$, kde c je určeno podmínkou pevných konců $z_b(T)=z_a(T)$(c) variovaný pohyb$z_c(t)=at^3$, kde a je určeno podmínkou pevných konců $z_c(T)=z_a(T)$.Ukažte, že hodnota S je v případě (a) menší než v případech (b), (c).

Řešení: Lagrangeova funkce popisující volný pád je

$$L=\frac{1}{2}m\dot{z}^2+mgz$$

nejprve určíme z podmínek pevných konců konstantu c

$$z_b(T)=cT=z_a(T)=\frac{1}{2}gT^2$$

$$c=\frac{1}{2}gT$$

a konstantu a

$$z_c(T) = aT^3 = z_a(T) = \frac{1}{2}gT^2$$

$$a = \frac{1}{2}\frac{g}{T}$$

dosazujme tedy za z(t) postupně z (a),(b) a (c) a spočítejme hodnotu akce

$$S_a = \int_0^T Ldt = \int_0^T \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2dt = \frac{1}{3}mg^2T^3$$

$$S_b = \int_0^T Ldt = \int_0^T \frac{1}{8}mg^2T^2 + \frac{1}{2}mg^2Tt\, dt = \frac{3}{8}mg^2T^3$$

$$S_c = \int_0^T Ldt = \int_0^T \frac{9}{8}\frac{mg^2}{T^2}t^4 + \frac{1}{2}\frac{mg^2}{T}t^3\, dt = \frac{7}{20}mg^2T^3$$

je tedy zřejmé, že skutečnému pohybu skutečně odpovídá nejmenší akce
což bylo dokázati a spočítati

Příklad 4.20 □

Příklad 4.21

Bylo zjištěno, že hmotný bod při volném pádu s nulovou počáteční rychlostí urazí dráhu z_0 za dobu $t_0 = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$. Předpokládejme, že pro $z \neq z_0$doba pádu není známa a že víme jen to, že z(t) závisí na t podle vztahu $z(t) = at + bt^2$. Ukažte, že když konstanty a, b zvolíte tak, aby doba pádu z výšky z_0 byla t_0, pak akce $S = \int_0^{t_0} L\, dt$bude mít extrém jen při $a = 0$, $b = \frac{1}{2}g$.

Řešení: Lagrangeova funkce popisující volný pád je

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz$$

kde ovšem

$$z(t) = at + bt^2$$

spočítejme akci

$$S(a, b) = \int_0^{t_0} \frac{1}{2}m(a^2+2abt+b^2t^2)+mgat+mgbt^2\, dt = \frac{1}{6}m\left[3a^2t_0 + 6abt_0^2 + 4b^2t_0^3 + 3agt_0^2 + 2bgt_0^3\right]$$

zvolme nyní konstanty a, b tak, aby

$$z(t_0) = z_0 = at_0 + bt_0^2$$

kde

$$t_0 = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$$

odkud zřejmě

$$z_0 = \frac{1}{2}gt_0^2$$

celkem jsme dostali rovnici

$$\frac{1}{2}gt_0^2 = at_0 + bt_0^2$$

odkud si vyjádříme

$$a = \frac{1}{2}(g - 2b)t_0$$

nyní si můžeme pomocí tohoto vztahu vyjádřit akci už jen jako funkci jedné proměnné b

$$S(b) = \frac{1}{6}m\left[3\left(\tfrac{g}{2} - b\right)^2 t_0^3 + 6\left(\tfrac{g}{2} - b\right)bt_0^3 + 4b^2t_0^3 + 3\left(\tfrac{g}{2} - b\right)gt_0^3 + 2bgt_0^3\right] = mt_0^3\left[\frac{3}{8}g^2 - \frac{1}{6}gb + \frac{1}{6}b^2\right]$$

abychom našli extrém této funkce, musíme znát stacionární bod její derivace

$$S'(b_0) = \frac{1}{6}mt_0^3\left[-g + 2b_0\right] = 0$$

$$b_0 = \frac{g}{2}$$

a dopočítáme ještě

$$a_0 = \frac{1}{2}(g - 2b_0)t_0 = 0$$

což bylo dokázati

Příklad 4.21 □

Příklad 4.22

Vypočtěte akci $S = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}^2 - x^2 \, dt$ **pro jednoparametrický systém trajektorií** $x = x_\varepsilon(t) = \frac{\sin t + \varepsilon t}{\sin 1 + \varepsilon}$**a vyneste závislost** $S = S(\varepsilon)$ **do grafu.**

Řešení: nejprve si tedy spočtěme první derivaci (respektive kvadrát derivace) trajektorie

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = \frac{\cos t + \varepsilon}{\sin 1 + \varepsilon}$$

$$\dot{x}_\varepsilon^2 = \frac{\cos^2 t + 2\varepsilon \cos t + \varepsilon^2}{(\sin 1 + \varepsilon)^2}$$

$$x_\varepsilon^2 = \frac{\sin^2 t + 2\varepsilon t \sin t + \varepsilon^2 t^2}{(\sin 1 + \varepsilon)^2}$$

spočtěme tedy akci

$$S = \frac{1}{2(\sin 1 + \varepsilon)^2} \int_0^1 \cos^2 t + 2\varepsilon \cos t + \varepsilon^2 - \sin^2 t - 2\varepsilon t \sin t - \varepsilon^2 t^2 dt$$

jemně ještě zjednodušíme

$$S = \frac{1}{2(\sin 1 + \varepsilon)^2} \int_0^1 \cos 2t + 2\varepsilon \cos t + \varepsilon^2 - 2\varepsilon t \sin t - \varepsilon^2 t^2 dt$$

a ze znalostí integrálů, zvláštěpak

$$\int_0^1 t \sin t dt = -\cos 1 + \int_0^1 \cos t dt = \sin 1 - \cos 1$$

dostaneme

$$S = \frac{1}{2(\sin 1 + \varepsilon)^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2 + 2\varepsilon \sin 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \sin 1 + 2\varepsilon \cos 1 - \frac{1}{3}\varepsilon^2 \right)$$

$$S = \frac{3 \sin 1 \cos 1 + 6\varepsilon \cos 1 + 2\varepsilon^2}{6(\sin 1 + \varepsilon)^2}$$

graf akce v závislosti na ϵ

Příklad 4.22 □

Příklad 4.24

Zapište Lagrangeovu funkci a pohybové rovnice částice v poli $U(x)$**, jestliže zavedeme "místní čas"**$\tau = t - \lambda x$**.**

Řešení: Lagrangeova funkce se při přechodu k novým obecným souřadnicím a "času" transformuje takto

$$L'\left(x, \tfrac{dx}{d\tau}, \tau\right) = L\left(x, \tfrac{dx}{dt}, t\right)\frac{dt}{d\tau}$$

Lagrangeova funkce v tomto případě je

$$L\left(x, \tfrac{dx}{dt}, t\right) = \frac{1}{2}m\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 - U(x)$$

a pomocí vztahů

$$t = \tau + \lambda x$$

ji transformujme

$L'\left(x, \tfrac{dx}{d\tau}, \tau\right) = L\left(x, \tfrac{dx}{dt}, t\right)\tfrac{dt}{d\tau} = \left[\tfrac{1}{2}m\left(\tfrac{dx}{dt}\tfrac{dt}{d\tau}\tfrac{d\tau}{dt}\right)^2 - U(x)\right]\left(1+\lambda\tfrac{dx}{d\tau}\right) = \tfrac{1}{2}m\left(\tfrac{dx}{d\tau}\right)^2\frac{1}{1+\lambda\frac{dx}{d\tau}} - \left(1+\lambda\tfrac{dx}{d\tau}\right)U(x)$a tedy zkráceně můžeme psát

$$L'(x, \dot{x}, \tau) = \frac{1}{2}m\frac{\dot{x}^2}{1+\lambda\dot{x}} - (1+\lambda\dot{x})\,U(x)$$

Příklad 4.24 □

Příklad 4.25

Jak se transformuje Lagrangeova funkce $L = -\sqrt{1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$při přechodu k souřadnicím q a "času"τ podle vztahů $x = q\cosh\lambda + \tau\sinh\lambda$, $t = q\sinh\lambda + \tau\cosh\lambda$ (Lorentzova transformace) ?

Řešení: pomocí vztahů

$$\begin{aligned} dx &= \cosh\lambda dq + \sinh\lambda d\tau \\ dt &= \sinh\lambda dq + \cosh\lambda d\tau \end{aligned}$$

přetransformujme Lagrangeovu funkci

$$L' = L\frac{dt}{d\tau} = -\left(\sinh\lambda\,\frac{dq}{d\tau} + \cosh\lambda\frac{d\tau}{d\tau}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\cosh\lambda dq + \sinh\lambda d\tau}{\sinh\lambda dq + \cosh\lambda d\tau}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{\frac{(\sinh\lambda dq\ + \cosh\lambda d\tau)^2}{(d\tau)^2}\frac{(\sinh\lambda dq + \cosh\lambda d\tau)^2 - (\cosh\lambda dq + \sinh\lambda d\tau)^2}{(\sinh\lambda dq + \cosh\lambda d\tau)^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{sh^2\lambda\,(dq)^2 + 2sh\lambda ch\lambda\;dq\;d\tau + ch^2\lambda\,(d\tau)^2 - ch^2\lambda\,(dq)^2 - 2sh\lambda ch\lambda\;dq\;d\tau - sh^2\lambda\,(d\tau)^2}{(d\tau)^2}} == -\sqrt{\frac{\sinh^2}{}}$$

a tedy konečný výsledek

$$L' = -\sqrt{1 - \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2}$$

Příklad 4.25 $\square$

5 Kapitola 5: Hamiltonův formalismus

Příklad 5.2

Napište Hamiltonovu funkci volného hmotného bodu v kartézských, sférických a cylindrických souřadnicích.

Řešení: Hamiltonova funkce v obecných souřadnicích je definovaná takto

$$H(p_j, q_j, t) = \sum_j p_j\ \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

kde v našem případě platí

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

(a) kartézské souřadnice

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

odkud

$$p_x = m\dot{x}$$
$$p_y = m\dot{y}$$
$$p_z = m\dot{z}$$

a zpětně si vyjádříme časové derivace souřadnice

$$\dot{x} = \tfrac{1}{m} p_x$$
$$\dot{y} = \tfrac{1}{m} p_y$$
$$\dot{z} = \tfrac{1}{m} p_z$$

takže Hamiltonova funkce dostane tvar

$$H = \frac{1}{m} \sum_{j\,\in\,\{x,y,z\}} p_j^2 - \frac{1}{2} m (\tfrac{1}{m} p_j)^2 + U(x, y, z) = \frac{1}{2m} \sum_{j\,\in\,\{x,y,z\}} p_j^2 + U(x, y, z)$$

(b) polární souřadnice

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r, \varphi, \theta)$$

odkud

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

a zpětně

$$\dot{r} = \tfrac{1}{m} p_r$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{mr^2 \sin^2\theta} p_\varphi$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mr^2} p_\theta$$

Hamiltonova funkce poté dostane tvar

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \varphi, \theta)$$

(c) cylindrické souřadnice

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r, \varphi, z)$$

odkud dostaneme

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

zpětně si vyjádříme

$$\dot{r} = \frac{1}{m} p_r$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{mr^2} p_\varphi$$

$$\dot{z} = \frac{1}{m} p_z$$

a Hamiltonova funkce dostává tvar

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \varphi, z)$$

Příklad 5.2 □

Příklad 5.3

Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu v poli konzervativních sil (v kartézských souřadnicích) a ukažte, že získané rovnice jsou ekvivalentní s rovnicemi Newtonovými.

Řešení: Hamiltonovy rovnice jsou dány vztahy

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

uplatníme tedy znalost Hamiltonovy funkce v kartézských souřadnicích (viz předchozí příklad)

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U(x_1, x_2, x_3)$$

a po dosazení do výše zmíněných rovnic dostaneme, že pro $j \in \hat{3}$ platí

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{1}{m}p_j$$

což se dalo očekávat neb se jedná o hybnost a z druhé rovnosti dostaneme při použití prvního výsledku

$$\dot{p}_j = m\ddot{x}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_j}$$

a zapíšeme-li tuto rovnici vektorově, dostáváme výsledek

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla U$$

Příklad 5.3 □

Příklad 5.4

Napište Hamiltonovu funkci harmonického oscilátoru.

Řešení: Lagrangeova funkce harmonického oscilátoru má tvar

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Hamiltonovu funkci dostaneme použitím

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

a po dosazení výrazu

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p$$

obdržíme Hamiltonovu funkci

$$H(x,p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Příklad 5.4 □

Příklad 5.5

Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu pod vlivem centrální síly s potenciálem U(r) ve sférických souřadnicích. Určete integrály pohybu.

Řešení: Hamiltonova funkce v sférických souřadnicích má tvar

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r)$$

Hamiltonovy rovnice

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{m r^3} + \frac{p_\theta^2}{m r^3 \sin^2 \theta} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$ integrál pohybu

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\theta^2}{m r^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

Příklad 5.5 □

Příklad 5.6

Hmotný bod m je vázán na válcovou plochu $x^2 + y^2 = R^2$ a pohybuje se pod vlivem centrální elastické síly $\vec{F} = -k\dot{\vec{r}}$. Určete Hamiltonovu funkci, sestavte Hamiltonovy rovnice a řešte je (v cylindrických souřadnicích).

Řešení: Hamiltonova funkce volného hmotného bodu v cylindrických souřadnicích (viz příklad 5.2) je dána vztahem

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \varphi, z)$$

kde ovšem r = R = konst a $U(r, \varphi, z) = U(z) = \frac{1}{2}k(\underbrace{x^2 + y^2}_{R^2} + z^2) = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$

mějme tedy tuto Hamiltonovu funkci s přesností na konstantu

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\varphi^2}{R^2} + p_z^2\right) + \frac{1}{2}kz^2$$

Hamiltonovy pohybové rovnice mají tvar
$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$ integrál pohybu

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m}p_z \; odkud \; p_z = m\dot{z}_-$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{mR^2}p_\varphi \; odkud \; p_\varphi = mR^2\dot{\varphi}_-$$

takže máme tuto soustavu diferenciálních rovnic a po dosazení dostaneme rovnice

$$\dot{p}_z = m\ddot{z} = -kz$$

$$\dot{p}_\varphi = mR^2\ddot{\varphi} = 0$$

kterou řeší

$$z(t) = A\cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t + \delta)$$

$$\varphi(t) = v_{\varphi 0}t + \varphi_0$$

Příklad 5.6 □

Příklad 5.7

Napište Hamiltonovu funkci částice s nábojem e a hmotností m v daném vnějším elektromagnetickém poli s potenciály $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$.

Řešení: napišme nejprve Lagrangeovu funkci a drobě si ji upravme

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e(\varphi - \dot{\vec{r}}\vec{A}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\dot{\vec{r}}\vec{A} - e\varphi$$

pomocí obecné hybnosti

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}$$

odvodíme, že

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}(\vec{p} - e\vec{A})$$

nyní na základě Lagrangeovy funkce sestavíme Hamiltonovu funkci tak, že za $\dot{\vec{r}}$ dosadíme z předešlého vztahu

$$H = \vec{p}\dot{\vec{r}} - L = \frac{1}{m}\vec{p}(\vec{p} - e\vec{A}) - \frac{1}{2}m\frac{1}{m^2}(\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{1}{m}(\vec{p} - e\vec{A})e\vec{A} + e\varphi$$

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - \frac{e}{m}\vec{p}\vec{A} + \frac{1}{2m}e^2\vec{A}^2 + e\varphi$$

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi$$

Příklad 5.7 □

Příklad 5.8

Napište Hamiltonovu funkci částice v neinerciální soustavě souřadné rotující s konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$.

Řešení: vyjdeme ze vztahu pro energii v neinerciální soustavě

$$H = E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + U - \vec{p} \times \vec{r} \cdot \vec{\Omega}$$

a dosadíme do něj z výrazu pro hybnost

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{p}$$

čímž obdržíme

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + U - \vec{p} \times \vec{r} \cdot \vec{\Omega}$$

Příklad 5.8 □

Příklad 5.9

Najděte Routhovu funkci symetrického setrvačníku ve vnějším poli $U(\varphi,\theta)$, vyloučí-li se cyklická souřadnice ψ.
Řešení: vyjdeme z Lagrangeovy funkce

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2 - U(\varphi,\theta)$$

obecnou hybnost ve směru ψspočítáme z

$$p_{\text{-}\psi} = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)$$

a zpětně dostaneme, že

$$\dot\psi = \frac{1}{I_3}p_{\text{-}\psi} - \dot\varphi\cos\theta$$

vyloučíme ψ , tj. Routhovu funkci budeme počítat jako

$$R = p_\psi\dot\psi - L = \frac{1}{I_3}p_{\text{-}\psi}^2 - p_\psi\dot\varphi\cos\theta - \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) - \frac{I_3}{2}(\frac{1}{I_3}p_{\text{-}\psi} - \dot\varphi\cos\theta + \dot\varphi\cos\theta)^2 + U(\varphi,\theta)$$

$$R = \frac{1}{2I_3}p_{\text{-}\psi}^2 - p_\psi\dot\varphi\cos\theta - \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + U(\varphi,\theta)$$

Příklad 5.9 □

Příklad 5.10

Odvoďte Hamiltonovu funkci, zvolíte-li za Lagrangeovu funkci výraz
Řešení:

$$L = \left[\frac{1}{2}m(\dot x + ax)^2 - \frac{1}{2}m(b^2 - a^2)x^2\right]e^{2at}$$

Ukažte, že Hamiltonovy rovnice jsou ekvivalentní rovnici $\ddot x + 2a\dot x + b^2 x = 0$ pro tlumený harmonický oscilátor.

vyjádřeme nejprve obecnou hybnost

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m(\dot x + ax)e^{2at}$$

odkud zřejmě

$$\dot{x} = \frac{e^{-2at}}{m} p - ax$$

sestavme Hamiltonovu funkci

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \left[m(\dot{x} + ax)\dot{x} - \frac{1}{2} m(\dot{x} + ax)^2 + \frac{1}{2} m(b^2 - a^2)x^2 \right] e^{2at}$$

$$H = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 - 2a^2x^2 + b^2x^2 \right] e^{2at}$$

a dosaďme sem za $\dot{x}$

$$H = \frac{1}{2} m \left[(\frac{e^{-2at}}{m} p - ax)^2 - 2a^2x^2 + b^2x^2 \right] e^{2at}$$

$$H = \frac{1}{2} m \left[\frac{e^{-4at}}{m^2} p^2 - 2\frac{e^{-2at}}{m} pax + a^2x^2 - 2a^2x^2 + b^2x^2 \right] e^{2at}$$

$$H = \frac{e^{-2at}}{2m} p^2 - pax + \frac{1}{2} m(b^2 - a^2)x^2 e^{2at}$$

Hamiltonovy rovnice

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{e^{-2at}}{m} p - ax$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = pa - m(b^2 - a^2)xe^{2at}$$

a když za p dosadíme z první rovnice do druhé dostáváme po provedení operace derivace

$$m(\ddot{x} + a\dot{x})e^{2at} + 2am(\dot{x} + ax)e^{2at} = am(\dot{x} + ax)e^{2at} - m(b^2 - a^2)xe^{2at}$$

tuto rovnici vydělíme me^{2at} a dostaneme tak

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + b^2x = 0$$

Příklad 5.10 □

Příklad 5.11

Napište pohybové rovnice částice, jejíž Hamiltonova funkce je $H(\vec{r},\vec{k}) = c\frac{|\vec{k}|}{n(\vec{r},\vec{k})}$(světelný paprsek s vlnovým vektorem $\vec{k}$).
Řešení: nejprve si uvědomíme, že

$$\left|\vec{k}\right| = \sqrt{\vec{k}\vec{k}} = k$$

a tedy Hamiltonovy rovnice budou

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{k}} = \frac{c\vec{k}}{nk} - \frac{c\vec{k}}{n^2}\frac{\partial n}{\partial \vec{k}}$$

$$\dot{\vec{k}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{ck}{n^2}\frac{\partial n}{\partial \vec{r}}$$

Příklad 5.11 □

Příklad 5.12

Vypočtěte $\left\{e^{\alpha q}, e^{\beta p}\right\}$.
Řešení:

$$\left\{e^{\alpha q}, e^{\beta p}\right\} = \frac{\partial e^{\alpha q}}{\partial q}\frac{\partial e^{\beta p}}{\partial p} - \frac{\partial e^{\alpha q}}{\partial p}\frac{\partial e^{\beta p}}{\partial q} = \alpha\beta e^{\alpha q+\beta p}$$

Příklad 5.12 □

Příklad 5.15

Dokažte, že platí: jsou-li L_1, L_2 integrály pohybu, je i L_3integrálem pohybu.
Řešení: vzhledem k výsledku příkladu 5.13 snadno určíme, že

$$\{L_1, L_2\} = \sum_k \varepsilon_{12k} L_k = L_3$$

a tedy zkoumání, je-li L_3 integrálem pohybu, tj. zda

$$\{L_3, H\} \stackrel{?}{=} 0$$

převedeme na problém

$$\{\{L_1, L_2\}, H\} \stackrel{?}{=} 0$$

zde ovšem aplikací Poissonovy věty : "Poissonova závorka dvou integrálů pohybu je opět integrálem pohybu."dostáváme, že předchozí rovnost skutečně platí a otazníček můžeme smazat.

což bylo dokázati.

Příklad 5.15 □

Příklad 5.17

Pomocí Poissonovy věty odvoďte další integrál Hamiltonových rovnic v případě hmotného bodu pod vlivem centrální síly v otáčející se soustavě, znáte-li první integrály $v = \sum_{i \in \hat{3}} \frac{p_i^2}{2m} + U(r)$**a** $u = \sum_{i \in \hat{3}} \frac{p_i^2}{2m} - \Omega(x_1 p_2 - x_2 p_1) + U(r)$**.**

Řešení: spočítáme tedy nějakou novou funkci (označíme ji w) jako Poissonovu závorku z již známých prvních integrálů pohybu (Poissonova věta)

$$w = \{u, v\} = 0 \ = \sum_{i \in \hat{3}} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} =$$

$$= \left(-\Omega p_2 + \frac{\partial U}{\partial x_1}\right)\frac{p_1}{m} - \left(\frac{p_1}{m} + \Omega x_2\right)\frac{\partial U}{\partial x_1} + \left(\Omega p_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\right)\frac{p_2}{m} - \left(\frac{p_2}{m} - \Omega x_1\right)\frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{p_3}{m} - \frac{p_3}{m}\frac{\partial U}{\partial x_3} =$$

$$= -\Omega x_2 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \Omega x_1 \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0$$

dostali jsme tak další integrál pohybu

$$w = -\Omega x_2 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \Omega x_1 \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0$$

Příklad 5.17 □

Příklad 5.19

Ukažte, že transformace $Q_j = p_j$ **,** $P_j = -q_j$ **je kanonická.**

Řešení: budeme zkoumat, zda-li existuje taková funkce F, která splňuje rovnici

$$\sum_j P_j dQ_j - p_j dq_j = dF$$

to jest po dosazení

$$\sum_j -q_j dp_j - p_j dq_j = dF$$

odkud je rovnou vidět, že

$$-d\left(\sum_j q_j p_j\right) = dF$$

$$-2\sum_j q_j p_j = F$$

takže se nám to ukázat podařilo.

Příklad 5.19 □

Příklad 5.20

Ukažte, že kanonická transformace $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \to (R, \varphi, z, P_R, P_\varphi, P_z)$ **s vytvořující funkcí** $F_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}P_R + (arctg\frac{x_2}{x_1})P_\varphi + x_3 P_z$ **převádí souřadnice kartézské na cylindrické.**

Řešení: ze vztahů

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\ kde\ i\ \in\ \hat{3}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_2}{\partial i}\ kde\ i\ \in\ \{R,\varphi, z\}$$

dostaneme po dosazení za F_2soustavu vztahů

$$p_1 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}P_R - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}P_\varphi$$

$$p_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}P_R + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}P_\varphi$$

$$p_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = P_z$$

$$R = \frac{\partial F_2}{\partial P_R} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\varphi = \frac{\partial F_2}{\partial P_\varphi} = arctg\frac{x_2}{x_1}$$

$$z = \frac{\partial F_2}{\partial P_z} = x_3$$

pomocí nich můžeme též lehce vyjádřit

$$x_1 = R\cos\varphi$$
$$x_2 = R\sin\varphi$$
$$x_3 = z$$

a dosadit do výrazů pro hybnosti, čímž dostaneme

$$p_1 = P_R cos\varphi - P_\varphi \frac{\sin\varphi}{R}$$

$$p_2 = P_R sin\varphi + P_\varphi \frac{\cos\varphi}{R}$$

$$p_3 = P_z$$

Příklad 5.20 □

Příklad 5.21

Ukažte, že transformace $Q = arctg\left(\sqrt{km}\frac{q}{p}\right)$**,** $P = \frac{1}{2}\left(\sqrt{km}q^2 + \frac{1}{\sqrt{km}}p^2\right)$ **je kanonická. Užijte ji k řešení pohybových rovnice harmonického oscilátoru** $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2$**.**

Řešení: nejprve vyjádříme souřadnice q,p v závislosti na Q,P

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\sqrt{km}}}\sin Q$$

$$p = \sqrt{2P\sqrt{km}}\cos Q$$

pro ověření, zda jsou takovéto transformace kanonické se pokusíme nalézt takovou funkci F, která splňuje rovnost

$$dF = PdQ - pdq$$

budeme tedy za p a q dosazovat výše napsané vztahy

$$dF \stackrel{?}{=} PdQ - \sqrt{2P\sqrt{km}}\cos Q\left(\sqrt{\frac{2P}{\sqrt{km}}}\cos QdQ + \sqrt{\frac{1}{2P\sqrt{km}}}\sin QdP\right)$$

$$dF \stackrel{?}{=} P\left(1 - 2\cos^2 Q\right)dQ - \frac{1}{2}\sin 2QdP$$

použijeme vztahu $2\cos^2 Q = 1 + \cos 2Q$

$$dF \stackrel{?}{=} -P\cos 2QdQ - \frac{1}{2}\sin 2QdP$$

$$dF = d\left(-\frac{1}{2}P\sin 2Q\right)$$

našli jsme tak hledanou funkci, proto je takováto transformace kanonická
přetransformujeme ještě Hamiltonovu funkci

$$H' = \tfrac{1}{2m}p^2 + \tfrac{k}{2}q^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}P$$

Hamiltonovy rovnice v nových souřadnicích tedy budou

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

a tedy

$$Q = \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_Q$$

$$P = C_P$$

Příklad 5.21 □

Příklad 5.22

Ukažte, že transformace $q = -\sqrt{\frac{2Q}{\sqrt{km}}}\sin P$**,** $p = \sqrt{2Q\sqrt{km}}\cos P$**je kanonická.**

Řešení: opět budeme hledat nějakou funkci F, která vyhovuje rovnici

$$dF = PdQ - pdq$$

tedy

$$dF \stackrel{?}{=} PdQ - \sqrt{2Q\sqrt{km}}\cos P\left(-\sqrt{\frac{2}{2Q\sqrt{km}}}\sin P - \sqrt{\frac{2Q}{\sqrt{km}}}\cos PdP\right)$$

$$dF \stackrel{?}{=} PdQ + \sin P\cos PdQ + 2Q\cos^2 PdP$$

$$dF \stackrel{?}{=} \left(P + \frac{1}{2}\sin 2P\right)dQ + 2Q\left(\frac{1+\cos 2P}{2}\right)dP$$

$$dF \stackrel{?}{=} \left(P + \frac{1}{2}\sin 2P\right)dQ + Q\left(1+\cos 2P\right)dP$$

$$dF = d\left(PQ + \frac{1}{2}Q\sin 2P\right)$$

podařilo se nám najít takovou funkci a proto je transformace kanonická.

Příklad 5.22 □

Příklad 5.23

Jaké kanonické transformace určují vytvořující funkce $F_1 = \frac{1}{2}\sqrt{km}q^2 \cot gQ$, resp. $F_3 = -\frac{p^2 tgQ}{2\sqrt{km}}$? Lze je použít k řešení pohybových rovnic harmonického oscilátoru ?

Řešení:

první funkce určuje kanonické transformace dané vztahy

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \sqrt{km}q \cot gQ$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2}\sqrt{km}q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} = \frac{1}{2}\sqrt{km}q^2 (1 + \cot g^2 Q)$$

odkud dostaneme závislosti

$$tgQ = \sqrt{km}\frac{q}{p} \;\Rightarrow\; Q = arctg\left(\sqrt{km}\frac{q}{p}\right)$$

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{km}q^2\left(1 + \frac{p^2}{q^2 km}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{km}q^2 \frac{1}{\sqrt{km}}p^2\right)$$

které jsou identické s kanonickými transformacemi z příkladu 5.21 a lze je tedy použít k řešení pohybových rovnic harmonického oscilátoru

druhá funkce určuje kanonické transformace

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = p\frac{1}{\sqrt{km}}tgQ$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{p^2}{2\sqrt{km}}\frac{1}{\cos^2 Q} = \frac{p^2}{2\sqrt{km}}\left(tg^2 Q + 1\right)$$

odkud dostaneme závislosti

$$tgQ = \frac{q}{p}\sqrt{km} \;\Rightarrow Q = arctg\left(\frac{q}{p}\sqrt{km}\right)$$

$$P = \frac{p^2}{2\sqrt{km}}\left(\frac{q^2}{p^2}km + 1\right) = \frac{1}{2}\left(q^2\sqrt{km} + p^2\frac{1}{\sqrt{km}}\right)$$

které jsou identické s kanonickými transformacemi z první části tohoto příkladu a tedy i příkladu 5.21 a lze je tedy použít k řešení pohybových rovnic harmonického oscilátoru

Příklad 5.23 □

Příklad 5.24

Uvažujte transformaci $(q,p) \to (Q,P)$, $Q = q^\alpha \cos\beta p$, $P = q^\alpha \sin\beta p$. Reálné konstanty α, β je třeba určit tak, aby transformace byla kanonická. Odvoďte též vytvořující funkci F.

Řešení: budeme požadovat, aby pro nějakou funkci F platilo

$$dF = PdQ - pdq$$

dosaďme tedy do tohoto výrazu za Q a P

$$dF = \alpha q^{2\alpha-1}\sin(\beta p)\cos(\beta p)dq \ - \ pdq - q^{2\alpha}\beta\sin^2(\beta p)dp$$

použijeme trigonometrické vzorce a tento vztah upravíme na

$$dF = \left(\frac{\alpha}{2}q^{2\alpha-1}\sin(2\beta p) - p\right)dq + \left(\frac{\beta}{2}q^{2\alpha}\cos(2\beta p) - \frac{\beta}{2}q^{2\alpha}\right)dp$$

abychom mohli napsat

$$dF = d(uv) = udv + vdu$$

je třeba, aby se rovnaly intergrály

$$\int \frac{\alpha}{2}q^{2\alpha-1}\sin(2\beta p) - p\ dq = \int \frac{\beta}{2}q^{2\alpha}\cos(2\beta p) - \frac{\beta}{2}q^{2\alpha}dp$$

$$\frac{\alpha}{2}\frac{1}{2\alpha}q^{2\alpha}\sin(2\beta p) - pq = \frac{\beta}{2}\frac{1}{2\beta}q^{2\alpha}\sin(2\beta p) - \frac{\beta}{2}pq^{2\alpha}$$

tedy krátce

$$pq = \frac{\beta}{2}pq^{2\alpha}$$

odkud plyne, že hledaná reálná čísla jsou

$$\alpha = \tfrac{1}{2}$$
$$\beta = 2$$

a tedy

$$dF = \left(\frac{1}{4}\sin(4p) - p\right)dq + \left(q\cos(4p) - q\right)dp$$

$$dF = d\left[\frac{q}{4}\left(\sin(4p) - 4p\right)\right]$$

a hledanou vytvořující funkci tak můžeme zapsat jako

$$F = \frac{q}{4}\left(\sin(4p) - 4p\right)$$

Příklad 5.25

Ukažte, že tyto transformace jsou kanonické(a) $Q = \sqrt{\frac{2q}{K}}\cos p,\ P = \sqrt{2qK}\sin p$**(b)** $Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right),\ P = q\ cotg\ p$**(c)** $Q = \ln\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right),\ P = 2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p$
Řešení: v každém ze tří případů se budeme snažit nalézt nějakou funkci F takovou, že splňuje rovnici

$$dF = PdQ - pdq$$

případ (a)

$$dF = PdQ - pdq = \sqrt{2Kq}\sin p\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{Kq}}\cos p\ dq - \sqrt{\frac{2q}{K}}\sin p\ dp\right) - pdq$$

$$dF = \left(\frac{1}{2}\sin 2p - p\right)dq + q(\cos 2p - 1)dp = d\left(\frac{1}{2}q\sin 2p - qp\right)$$

$$F = \frac{1}{2}q\sin 2p - qp$$

případ (b)

$$dF = PdQ - pdq = q\ \cot g(p)\ \left(\cot g(p)\ dp - \frac{1}{q}dq\right) - pdq$$

$$dF = q\ \cot g^2(p)\ dp - \cot g(p)dq - pdq$$

$$dF = -d\left[q(\cot g(p) + 1)\right]$$

$$F = -q(\cot g(p) + 1)$$

případ (c)

$$dF = PdQ - pdq = \frac{2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p}{1+\sqrt{q}\cos p}\left[\frac{1}{2\sqrt{q}}\cos p\ dq - \sqrt{q}\sin p\ dp\right] - pdq$$

$$dF = \left(\frac{1}{2}\sin 2p - p\right)dq + (q\cos 2p - q)\,dp$$

$$dF = d\left(\frac{1}{2}q\sin 2p - qp\right)$$

$$F = \frac{1}{2}q\sin 2p - qp$$

Příklad 5.25 □

Příklad 5.55

Najděte proměnné akce – úhel v případě harmonického oscilátoru,

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2).$$

Řešení:

Máme soustavu s jedním stupněm volnosti, $s = 1$. Pro integraci nám tedy postačí jeden integrál pohybu, za nějž zvolíme obecnou energii (Hamiltonián). Ve smyslu rovnice U 5.11.11 tedy definujeme

$$P_1 = H, \ \alpha_1 = E = \text{const.}$$

Harmonický oscilátor zřejmě vykonává finitní pohyb, jak je vidět z rovnice

$$\begin{aligned} H &= E \\ \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) &= E \\ \frac{p^2}{2E} + \frac{w^2 q^2}{2E} &= 1, \end{aligned}$$

varieta vytčená ve fázovém prostoru vztahem $H = E$ pro libovolnou hodnotu energie E je totiž elipsa o poloosách $\sqrt{2E}$ a $\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$. Je navíc okamžitě zřejmé, že ve smyslu topologie se jedná o torus T^1.

Zaveďme dle rovnice U 5.11.12 jednu akční proměnnou

$$I(E) := I_1(\alpha_1) = \frac{1}{2\pi}\oint_M pdq.$$

Integrace přitom probíhá po elipse M (triviálně jediné kružnici na dané varietě) parametrizované rovnicemi

$$\begin{aligned} p(\phi) &= \sqrt{2E}\cos\phi, \\ q(\phi) &= \tfrac{\sqrt{2E}}{\omega}\sin\phi, \\ \phi &\in < 0, 2\pi), \end{aligned}$$

je tedy

$$pdq = \sqrt{2E}\cos\phi \cdot \frac{\sqrt{2E}}{\omega}\cos\phi d\phi = \frac{2E}{\omega}\cos^2\phi d\phi$$

a odsud již

$$I(E) = \int_0^{2\pi} \frac{2E}{\omega} \cos^2 \phi d\phi = \frac{2E}{\omega} \cdot \frac{1}{2} = \frac{E}{\omega}. \quad (1)$$

Dále podle návodu je nyní třeba vztah (1) zinvertovat na tvar $E = \omega I$, dosadit do rovnice variety

$$\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = E = \omega I$$

a vyjádřit p pomocí q a I:

$$p = \pm\sqrt{2\omega I - \omega^2 q^2}. \quad (2)$$

Nyní máme vše připraveno k nalezení vytvořující funkce

$$S_0(q, I) = \int_0^q p(\tilde{q}, I) d\tilde{q} = \pm \int_0^q \sqrt{2\omega I - \omega^2 \tilde{q}^2} d\tilde{q} = \pm 2I \int_0^{\sqrt{\omega 2I} q} \sqrt{1 - z^2} dz.$$

Bude třeba si připravit integrál

$$\begin{aligned} A &= \int \sqrt{1 - z^2} dz = z\sqrt{1 - z^2} + \int \tfrac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} dz = z\sqrt{1 - z^2} + \int \tfrac{1-(1-z^2)}{\sqrt{1-z^2}} dz \\ &= z\sqrt{1 - z^2} + \arcsin z - A = \tfrac{1}{2}(z\sqrt{1 - z^2} + \arcsin z). \end{aligned}$$

S výsledkem tohoto pomocného výpočtu již snadno vyjádříme

$$S_0(q, I) = \pm I(\sqrt{\frac{\omega}{2I}} q \cdot \sqrt{1 - \omega \frac{q^2}{2I}} + \arcsin \sqrt{\frac{\omega}{2I}} q) = \pm(\frac{q}{2}\sqrt{2\omega I - \omega^2 q^2} + I \arcsin \sqrt{\omega 2I} q).$$

V tento okamžik tedy máme už jednu z nových kanonických souřadnic, I, vyjádřenou formálně pomocí rovnice (1), druhou získáme z funkce S_0, která má význam vytvořující funkce F_2 v proměnných "stará souřadnice, nová hybnost". Platí tedy

$$\theta = \frac{\partial S_0}{\partial I} = \ldots = \pm \arcsin \sqrt{\frac{\omega}{2I}} q. \quad (3)$$

Rovnicemi (2) a (3) je již zcela určen přechod mezi proměnnými (p, q) a (I, θ). Pro úplnost ještě můžeme z těchto vztahů se smíšenými proměnnými vyjádřit například "nové"souřadnice pomocí "starých":

$$\begin{aligned} I &= \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2\omega}, \\ \theta &= \pm \arcsin \omega q \sqrt{p^2 + \omega^2 q^2}. \end{aligned}$$

Příklad 5.55 □

6 Kapitola 7: speciální teorie relativity

Příklad 7.1

Transformační matice $A = (\alpha^\mu_\nu)$ **má prvky** $\alpha^0_0 = \gamma$**,** $\alpha^0_k = \alpha^k_0 = -\beta\gamma n_k$**,** $\alpha^j_k = \alpha^k_j = (\gamma-1)n_j n_k + \delta_{jk}$**, kde** β, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$**,** n_1, n_2, n_3 **jsou parametry a** $\vec{n}^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$**.Ukažte, že1) matice A splňuje podmínku** $A^T G A = G$ **Lorentzovy transformace2) systém S' se pohybuje vzhladem k S konstantní rychlostí** $\vec{V} = c\beta\vec{n}$**3) pro pohyb ve směru** x^1**(tj.** $\vec{n}^T = (1,0,0)$**) dostaneme matici (7.2.11 str. 244)**

Řešení: zadanou matici A přepíšeme do přehlednějšího tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & I + (\gamma-1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix}$$

1) vyšetříme platnost vztahu $A^T G A = G$

poznamenejme, že matice A je symetrická -proto $A = A^T$

$$A^T G A = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & I + (\gamma-1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & I + (\gamma-1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix}$$

$$A^T G A = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & -I - (\gamma-1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & I + (\gamma-1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix}$$

$$A^T G A = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \beta^2\gamma^2\vec{n}^T\vec{n} & \left(-\beta\gamma^2 + \beta\gamma + \beta\gamma(\gamma-1)\vec{n}^T\vec{n}\right)\vec{n}^T \\ \left(-\beta\gamma^2 + \beta\gamma + \beta\gamma(\gamma-1)\vec{n}^T\vec{n}\right)\vec{n}^T & \beta^2\gamma^2\vec{n}\vec{n}^T - \left(I + (\gamma-1)\vec{n}\vec{n}^T\right)^2 \end{pmatrix}$$

v dalším kroku použijeme $\vec{n}^T\vec{n} = \vec{n}^2 = 1$

$$A^T G A = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 & (-\beta\gamma^2 + \beta\gamma + \beta\gamma^2 - \beta\gamma)\vec{n}^T \\ (-\beta\gamma^2 + \beta\gamma + \beta\gamma^2 - \beta\gamma)\vec{n}^T & \beta^2\gamma^2\vec{n}\vec{n}^T - I - 2(\gamma-1)\vec{n}\vec{n}^T - (\gamma-1)^2\vec{n}\vec{n}^T\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix}$$

použijeme též $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$a rovnou dostaneme

$$A^T G A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = G$$

2) vzájemný pohyb systémů

vezměme čtyřvektor počátku soustavy S‘ v soustavě S $\vec{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$, který se má pohybovat rychlostí $\vec{V}$, tj.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{V}t \end{pmatrix}$$

dále známe polohu tohoto počátku v soustavě S'

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

pomocí transformačních vztahů

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

odkud

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{x}'$$

snadno určíme hledanou rychlost a to použitím výše ověřené identity

$$A^T G A = G$$

totiž

$$A^T G = G A^{-1}$$

a tak nám stačí zleva vynásobit zkoumaný výraz maticí G

$$G\vec{x} = G A^{-1}\vec{x}'$$

neboli po dosazení

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{V}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & I + (\gamma - 1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

odkud

$$\begin{pmatrix} ct \\ -\vec{V}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' \\ -\beta\gamma\vec{n}ct' \end{pmatrix}$$

a konečně vyjádříme-li si $t' = \frac{1}{\gamma}t$, dostáváme po menších kráceních hledaný výraz

$$\vec{V} = c\beta\vec{n}$$

3) poslední část příkladu

obyčejným dosazením do výše uvedené matice Avektoru $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ získáme hledanou matici

Příklad 7.1 □

Příklad 7.2

Přesvědčete se, že Lorentzovy transformace je možno zapsat v kompaktní vektorové podobě $\vec{r}' = \vec{r} + \left(\frac{\gamma-1}{V^2}\vec{V}\cdot\vec{r} - \gamma t\right)\vec{V}$, $t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{c^2}\right)$.

Řešení: rozložíme radius vektor na dvě složky – $\vec{r}_\parallel$ rovnoběžnou s $\vec{V}$ a $\vec{r}_\perp$ kolmou k $\vec{V}$

$$\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$$

kde $\vec{r}_\parallel$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\vec{r}_\parallel = \frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{V^2}\vec{V}$$

a proto též

$$\vec{r}_\perp = \vec{r} - \frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{V^2}\vec{V}$$

Lorentzovou transformací $\vec{r}_\perp$ zůstává nezměněné a $\vec{r}_\parallel$ se transformuje jako

$$\vec{r}'_\parallel = \frac{\vec{r}_\parallel - \vec{V}t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \gamma\left(\vec{r}_\parallel - \vec{V}t\right)$$

dostaneme tedy

$$\vec{r}' = \vec{r}_\perp + \gamma\vec{r}_\parallel - \gamma\vec{V}t$$

po dosazení výše vyjádřených složek obdržíme

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{V^2}\vec{V} + \gamma\frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{V^2}\vec{V} - \gamma\vec{V}t$$

a po úpravách

$$\vec{r}' = \vec{r} + \left((\gamma-1)\frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{V^2} - \gamma t\right)\vec{V}$$

čas se transformuje jako

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{V}\vec{r}}{c^2}\right)$$

Příklad 7.2 □

Příklad 7.4

Odvoďte zákon skládání rychlostí pro libovolnou vzájemnou orientaci obou rychlostí. Jak se zjednoduší pro $V \ll c$? Jaká bude velikost výsledné rychlosti ?

Řešení: budeme zkoumat $\frac{d\vec{r}}{dt}$(viz 7.2) přičemž vezmeme v úvahu časovou konstantnost rychlosti $\vec{V}$

inverzní transformace k výsledku z příkladu 7.2 jsou až na znaménko u $\vec{V}$identické

$$\vec{r} = \vec{r'} - \left(-(\gamma - 1)\frac{\vec{V}\cdot\vec{r'}}{V^2} - \gamma t'\right)\vec{V}$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\vec{V}\vec{r'}}{c^2}\right)$$

tedy

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r'} - \left(-(\gamma-1)\frac{\vec{V}\cdot d\vec{r'}}{V^2} - \gamma dt'\right)\vec{V}}{\gamma\left(dt' + \frac{\vec{V}d\vec{r'}}{c^2}\right)} = \frac{\frac{d\vec{r'}}{dt'} - \left(-(\gamma-1)\frac{\vec{V}}{V^2}\frac{d\vec{r'}}{dt'} - \gamma\right)\vec{V}}{\gamma\left(1 + \frac{\vec{V}}{c^2}\frac{d\vec{r'}}{dt'}\right)}$$

což lze také zapsat

$$\dot{\vec{r}} = \left[\frac{\dot{\vec{r'}}}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\vec{V}\dot{\vec{r'}}}{V^2}\vec{V} + \vec{V}\right]\left(1 + \frac{\vec{V}\dot{\vec{r'}}}{c^2}\right)^{-1} = \left[\dot{\vec{r'}}\sqrt{1-\beta^2} + (1 - \sqrt{1-\beta^2})\frac{\vec{V}\dot{\vec{r'}}}{V^2}\vec{V} + \vec{V}\right]\left(1 + \frac{\vec{V}\dot{\vec{r'}}}{c^2}\right)^{-1}$$

při aproximaci $V \ll c$ se tento vztah zjednoduší na

$$\dot{\vec{r}} = \left(\dot{\vec{r'}} + \vec{V}\right)\left(1 + \frac{\vec{V}\dot{\vec{r'}}}{c^2}\right)^{-1}$$

pomocí binomické věty dostaneme při zanedbání vyšších řádů v $\frac{V}{c}$ vztah

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r'}} + \vec{V} - \frac{\vec{V}\dot{\vec{r'}}}{c^2}\dot{\vec{r'}}$$

velikost výsledné rychlosti dostaneme přímým výpočtem normy

$$\dot{\vec{r}}^2 = \left[\dot{\vec{r'}}\sqrt{1-\beta^2} + (1 - \sqrt{1-\beta^2})\frac{\vec{V}\dot{\vec{r'}}}{V^2}\vec{V} + \vec{V}\right]^2\left(1 + \frac{\vec{V}\dot{\vec{r'}}}{c^2}\right)^{-2}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \left[\left(\dot{\vec{r'}} + \vec{V}\right) + (1 - \sqrt{1-\beta^2})\left(\frac{\vec{V}\dot{\vec{r'}}}{V^2}\vec{V} - \dot{\vec{r'}}\right)\right]^2\left(1 + \frac{\vec{V}\dot{\vec{r'}}}{c^2}\right)^{-2}$$

... po zdlouhavých úpravách ...

$$\dot{\vec{r}}^2 = \left[\left(\dot{\vec{r}}' + \vec{V} \right)^2 + \beta^2 \frac{\vec{V}\dot{\vec{r}}'\vec{V}\dot{\vec{r}}'}{V^2} - \beta^2 \dot{\vec{r}}'^2 \right] \left(1 + \frac{\vec{V}\dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^{-2}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \left[\left(\dot{\vec{r}}' + \vec{V} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\vec{V}\dot{\vec{r}}'\vec{V}\dot{\vec{r}}' - V^2 \dot{\vec{r}}'^2 \right) \right] \left(1 + \frac{\vec{V}\dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^{-2}$$

což lze též zapsat jako

$$\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\left(\dot{\vec{r}}' + \vec{V} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\dot{\vec{r}}' \times \vec{V} \right)^2}{\left(1 + \frac{\vec{V}\dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^2}$$

Příklad 7.4 □

Příklad 7.5

Relativní rychlost dvou částic je definována jako rychlost jedné z nich v soustavě, v níž je druhá v klidu. Určete kvadrát v_{rel}^2, jestliže v některé inerciální soustavě částice mají rychlost $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.
Řešení: do výsledku předchozího příkladu dosadíme za $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_{rel}$, $\dot{\vec{r}}' = \vec{v}_1$, $\vec{V} = -\vec{v}_2$ a dostaneme tak

$$\vec{v}_{rel}^2 = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)^2}$$

Příklad 7.5 □

Příklad 7.6

Rapidita μ je definována pomocí vztahu $tgh\mu = \frac{V}{c}$. Ukažte, že $\cosh\mu = \gamma$, $\sinh\mu = \beta\gamma$. Ze vzorce př. 7.5 pro relativní rychlost odvoĎte "kosinovou větu"pro relativní rapiditu.
Řešení: vztah

$$tgh\mu = \frac{V}{c} = \beta = \frac{\sinh\mu}{\cosh\mu}$$

umocníme na druhou

$$\beta^2 = tgh^2\mu = \frac{\sinh^2\mu}{\cosh^2\mu} = 1 - \frac{1}{\cosh^2\mu}$$

a tedy

$$\cosh\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

obdobně

$$\sinh\mu = \cosh\mu\; tgh\mu = \gamma\beta$$

vzorec z příkladu 7.5

$$\vec{v}_{rel}^2 = \left[(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_1\vec{v}_2 - \vec{v}_1^2\vec{v}_2^2\right)\right]\left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right)^{-2}$$

nejprve vhodně upravíme na tvar $\left(1-\frac{v_{rel}^2}{c^2}\right) = \left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v_2^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right)^{-1}$

$$1-\frac{\vec{v}_{rel}^2}{c^2} = \frac{1-2\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2} + \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^4} - \frac{(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2}{c^2} - \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_1\vec{v}_2-\vec{v}_1^2\vec{v}_2^2}{c^4}}{\left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right)^2}$$

$$1-\frac{\vec{v}_{rel}^2}{c^2} = \frac{1-2\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2} - \frac{\vec{v}_1^2-2\vec{v}_1\vec{v}_2+\vec{v}_2^2}{c^2} - \frac{\vec{v}_1^2\vec{v}_2^2}{c^4}}{\left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right)^2}$$

$$1-\frac{\vec{v}_{rel}^2}{c^2} = \frac{1-\frac{\vec{v}_1^2+\vec{v}_2^2}{c^2} - \frac{\vec{v}_1^2\vec{v}_2^2}{c^4}}{\left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{\vec{v}_1^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{\vec{v}_2^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right)^2}$$

pužijeme zavedené substituce

$$1-\frac{\vec{v}^2}{c^2} = 1-tgh^2\mu = \frac{\cosh^2\mu-\sinh^2\mu}{\cosh^2\mu} = \frac{1}{\cosh^2\mu}$$

dostaneme

$$\frac{1}{\cosh^2\mu_{rel}} = \frac{1}{\cosh^2\mu_1\cosh^2\mu_2\left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right)^2}$$

a jelikož výraz

$$\left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right)^2 = \left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\frac{v_1v_2}{v_1v_2}\right)^2 = (1-tgh\mu_1\; tgh\mu_2\cos\chi)^2,$$

kde χ značí úhel svírající vektory rychlostí $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ – tj. $\cos\chi = \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{v_1v_2}$ dostaneme po převrácení nakonec

$$\cosh\mu_{rel} = \cosh\mu_1\cosh\mu_2 - \sinh\mu_1\sinh\mu_2\cos\chi.$$

Příklad 7.6 □

Příklad 7.10

Světelný rok je vzdálenost, kterou světlo urazí za jeden rok. Vyjádřete zrychlení volného pádu g v jednotkách světelný rok/rok^2**. Čemu se rovná rychlost světla v těchto jednotkách?** $(1\ rok\ =\ 3.15 \cdot 10^7 s)$

Řešení: převedeme si sekundy a metry do nových jednotek

$$1\ s\ =\ \frac{1}{3,15 \cdot 10^7}\ rok$$

$$1\ m\ =\ \frac{1}{c \cdot 3,15 \cdot 10^7}\ sv.rok$$

potom již snadně převedeme

$$g = 9,81\ m/s^2 = \frac{9.81 \cdot 3,15 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8}\ sv.rok/rok^2 = 1,03\ sv.rok/rok^2$$

$$c = 3 \cdot 10^8\ m/s = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 3,15 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8 \cdot 3,15 \cdot 10^7}\ sv.rok/rok = 1\ sv.rok/rok$$

7.11 Kosmická loď se pohybuje s takovým zrachlením, že její posádka cítí konstantní sílu rovnou zemské tíži. Z hlediska pozorovatele na Zemi, odkud loď odstartovala, tento její pohyb trvá 5 let. Jak daleko loď za tuto dobu uletí a jaké rychlosti dosáhne ?

vyjdeme ze vztahu pro sílu

$$F = \frac{m_0 c^2}{b} = m_0 g$$

odkud

$$b = \frac{c^2}{g} = 9,17 \cdot 10^{15} m = 0,97\ sv.rok$$

rychlost bude

$$v = \frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} = \{t = 5\ let\} = 0,98\ sv.rok/rok = 0,98\ c$$

uletěná vzdálenost

$$x = \left(\sqrt{b^2 + c^2 t^2} - b^2\right) = \{t = 5\ let\} = 4,15\ sv.rok$$

Příklad 7.10 □

Příklad 7.15

Fizeauův pokus (??). Fizeau měřil pomocí interferometru rychlost světla v v kapalinách tekoucích po i proti směru šíření světla (rychlostí $\pm V$) a zjistil závislost $v = \frac{c}{n} \pm V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, kde n je index lomu kapaliny. Odvoďte tento empirický vztah pomocí zákona skládání rychlostí.

Řešení: do výsledku příkladu 7.4 dosadíme za $\dot{\vec{r}}' = \frac{c}{n}$a vzhledem k tomu, že jsme v tomto příkladě v konečném výsledku zanedbali všechny členy binomického rozvoje vyššího řádu než $\frac{V}{c}$, okamžitě dostáváme výsledek

$$v = \frac{c}{n} \pm V \mp \frac{V}{c^2}\frac{c^2}{n^2} = \frac{c}{n} \pm V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Příklad 7.15 □

Příklad 7.17

Rychlost $\vec{v}$(v soustavě S) leží v rovině xy a svírá s osou x úhel θ; podobně je definován úhel θ' pro rychlost $\vec{v}'$v soustavě S'. Odvoďte vztah mezi θ a θ' při speciální Lorentzově transformaci $S \to S'$ (viz skripta 7.1.3).

Řešení: opět použijeme výsledku příkladu 7.4 kde dosadíme za

$$\dot{\vec{r}}'^T = (v' \cos\theta', v' \sin\theta', 0)$$

$$\vec{V}^T = (V, 0, 0)$$

a dostaneme tak

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v'\cos\theta'\sqrt{1-\beta^2}+(1-\sqrt{1-\beta^2})\frac{Vv'}{V^2}\cos\theta' V+V}{1+\frac{Vv'}{c^2}\cos\theta'} = \frac{v'\cos\theta'+V}{1+\frac{Vv'}{c^2}\cos\theta'} \\ v_y &= \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{Vv'}{c^2}\cos\theta'} \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

zajímá nás ovšem velikost úhlu θ

$$tg\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{v'\cos\theta' + V}$$

Příklad 7.17 □

Příklad 7.18

Odvoďte transformační vztahy pro úhly θ , θ' za podmínek př. 7.17, jestliže $v = v' = c$. Vypočtěte $\Delta\theta = \theta' - \theta$ při $V \ll c$.

Řešení: dosadíme tyto hodnoty do předchozího výrazu

$$tg\theta = \frac{c\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{c\cos\theta' + V} = \frac{\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\theta' + \beta}$$

v dalším budeme potřebovat mit vyjádřeno

$$\cos\theta = \tfrac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}$$
$$\sin\theta = \tfrac{\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta'}$$

abychom přibližně vyjádřili $\Delta\theta$, budeme za tímto účelem zkoumat

$$\sin\Delta\theta = \sin(\theta' - \theta) = \sin\theta'\cos\theta - \sin\theta\cos\theta'$$

a dosadíme za sinθ a cosθ předešlých vzorců

$$\sin\Delta\theta = \sin\theta'\frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'} - \frac{\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta'}\cos\theta'$$

$$\sin\Delta\theta = \frac{\beta\sin\theta'}{1+\beta\cos\theta'} + \frac{\sin\theta'\cos\theta'\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)}{1+\beta\cos\theta'}$$

při aproximaci $\beta \ll 1$ zanedbáme pravý člen a jmenovatel prvního zlomku nahradíme jedničkou

$$\sin\Delta\theta \approx \beta\sin\theta'$$

pro malá $\Delta\theta$ proto můžeme aproximovat $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ a psát, že

$$\Delta\theta \doteq \frac{V}{c}\sin\theta'$$

7.24 Vypočtěte rychlosti částic v těchto případech:a) elektrony ve výbojce $E = 300\ eV$b) elektrony v synchrotronu $E = 300\ MeV$c) protony v synchrocyklotronu $E = 680\ MeV$d) protony v synchrofázotronu $E = 10\ GeV(m_e c^2 = 0,511\ MeV,\ m_p c^2 = 938,2\ MeV)$

ve všech případech platí vztah

$$E + m_0c^2 = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

vyjádříme si rychlost

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{E + m_0c^2}\right)^2}\, c$$

budeme postupně dosazovat
a) E = 300 eV

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{m_ec^2}{E + m_ec^2}\right)^2}\, c = 0,0342511\ c$$

b) E = 300 MeV

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{m_ec^2}{E + m_ec^2}\right)^2}\, c = 0,9999986\ c$$

c) E = 680 MeV

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{m_pc^2}{E + m_pc^2}\right)^2}\, c = 0,8147731\ c$$

d) E = 10 GeV

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{m_pc^2}{E + m_pc^2}\right)^2}\, c = 0,9963147\ c$$

Příklad 7.18 □

Příklad 7.26

V kosmickém záření se vyskytují protony s energií řádu $10^{10}\ GeV$. Nechť dráha tohoto protonu protíná naši Galaxii podél průměru 10^{10}světelných let. Srovnejte čas potřebný k průletu v systému spojeném se Zemí a v klidové soustavě protonu.

Řešení: rychlost protonu o takovéto řádové energii je

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{0,9382\ GeV}{10^{10}\ GeV}\right)^2}\, c \doteq c$$

a tedy doba průletu pozorovaná v soustavě spjaté se Zemí bude

$$t = 10^5\ let$$

a v klidové soustavě protonu bude tento čas přibližně ($m_0c^2 \approx 1\ GeV$)

$$\tau = \frac{m_0c^2}{E}t = \frac{1}{10^{10}} \cdot 10^5 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\ s \doteq 315\ s$$

Příklad 7.26 □

Příklad 7.27

Mezon π^0s klidovou hmotností m_0 pohybující se rychlostí v se rizpadá na dvě stejná kvanta záření gama (fotony). Určete úhel φ, který budou svírat směry pohybu fotonů.

Řešení: použijeme zákon zachování energie – hybnosti

po rozpadu musí platit, že

$$E = E_1 + E_2$$

a zároveň

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

kde se budeme zřejmě zajímat pouze o složky $p_1 \cos\frac{\varphi}{2} = p_2 \cos\frac{\varphi}{2}$ a pomocí těchto tří vztahů sestavíme rovnice

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2m_1c^2 = 2E_1 = 2E_2$$

$$p = mv = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = p_1\cos\frac{\varphi}{2} + p_2\cos\frac{\varphi}{2} = 2m_1c\cos\frac{\varphi}{2}$$

odkud dosazením za $2m_1$ z rovnosti energií

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c\cos\frac{\varphi}{2}$$

dostáváme

$$\varphi = 2\arccos\frac{v}{c}.$$

Příklad 7.27 □

Příklad 7.28

Dokažte, že v nepřítomnosti vnějšího pole se foton nemůže změnit v pár elektron-pozitron.

Řešení: Uvažujme, co by se stalo, kdyby se foton o hybnosti (p^μ) změnil v pár elektron [o hybnosti (p_-^μ)] pozitron [o hybnosti (p_+^μ)]

zákon zachování hybnosti-energie zní

$$p^\mu = p_-^\mu + p_+^\mu$$

protože má foton nulovou klidovou hmotnost, platí

$$p_\mu p^\mu = p_{-\mu} p_-^\mu + 2p_{-\mu} p_+^\mu + p_{+\mu} p_+^\mu = 0$$

v těžišťové soustavě platí (hmotnost elektronu je táž jako pozitronu)

$$(p_-^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}_-\right)$$

$$(p_+^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}_+\right) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}_-\right)$$

proto zřejmě

$$p_{-\mu} p_+^\mu = g_{\mu\nu} p_-^\nu p_+^\mu = \underbrace{\frac{E^2}{c^2}}_{>0} + \underbrace{\vec{p}_1^2}_{>0}$$

$$p_{-,\mu} p_-^\mu = p_{+,\mu} p_+^\mu = \underbrace{m_\pm^2 c^2}_{>0},$$

celkem tedy

$$p_\mu p^\mu = p_{-\mu} p_-^\mu + 2p_{-\mu} p_+^\mu + p_{+\mu} p_+^\mu > 0,$$

což je spor s předpokladem nulové klidové hmotnosti fotonu.

Příklad 7.28 □