

# Tenzorový počet

Tenzory umožňují zapsat zákony fyziky v tzv. kovariantním tvaru ve kterém se všechny členy rovnice transformují stejným způsobem. Rovnice, kde na obou stranách stojí tenzor stejného typu, bude mít stejný tvar ve všech inerciálních kartézských vztažných soustavách. Newtonovská mechanika  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ .

Relativistická mechanika používá zápis pomocí čtyřvektorů.

Bud'  $V$  vektorový prostor konečné dimenze  $n \in \mathbb{N}$  nad  $\mathbb{R}$  s bázemi  $B$  a  $\tilde{B}$

$$B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \quad \boxed{\tilde{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_i S_j^i} \quad \mathbf{e}_k = \tilde{\mathbf{e}}_j (S^{-1})_k^j \quad \tilde{B} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$$

$S = (S_j^i)$  ... matice přechodu od  $B$  k  $\tilde{B}$

$V^* = \{\boldsymbol{\alpha} : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \boldsymbol{\alpha} \text{ je lineární}\}$  ... duální vektorový prostor k  $V$

$B^* = (\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n)$  ... duální báze k  $B$  ve  $V^*$  tj.  $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i, \forall i, j \in \hat{n}$

$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_k) = \alpha_i \mathbf{e}^i(\mathbf{e}_k) = \alpha_i \delta_k^i = \alpha_k$  ... složky funkcionálu v duální bázi

$$\tilde{\mathbf{e}}^i = \tilde{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_k) \mathbf{e}^k = \tilde{\mathbf{e}}^i(\tilde{\mathbf{e}}_j (S^{-1})_k^j) \mathbf{e}^k = (S^{-1})_k^j \tilde{\mathbf{e}}^i(\tilde{\mathbf{e}}_j) \mathbf{e}^k = (S^{-1})_k^j \delta_j^i \mathbf{e}^k = (S^{-1})_k^i \mathbf{e}^k$$

## Vektor

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = \tilde{v}^j \tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{v}^j \mathbf{e}_i S_j^i$$

$$v^i = S_j^i \tilde{v}^j$$

$$\boxed{\tilde{v}^k = (S^{-1})_i^k v^i} \text{ kontravariantní}$$

## Kovektor (funkcionál, 1-forma)

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i \mathbf{e}^i = \tilde{\alpha}_j \tilde{\mathbf{e}}^j$$

$$\tilde{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{e}}_j) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_i S_j^i) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_i) S_j^i = \alpha_i S_j^i$$

$$\boxed{\tilde{\alpha}_j = \alpha_i S_j^i} \text{ kovariantní}$$

Př.  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = \alpha_i \mathbf{e}^i(v^j \mathbf{e}_j) = \alpha_i v^j \mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \alpha_i v^j \delta_j^i = \alpha_i v^i =: \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v} \rangle$

Pozn. Vektorové prostory  $V$  a  $V^*$  mají stejnou konečnou dimenzi a jsou tedy izomorfní. Žádný z jejich izomorfizmů však není nijak význačný (kanonický) - “nezávislý na volbě báze” a proto je nelze bez dodatečné struktury definované na  $V$  jednoznačně (kanonicky) ztotožnit. Prostory  $V$  a  $(V^*)^*$  již ztotožnit lze, neboť mezi nimi existuje *kanonický izomorfismus*:

$$f : V \rightarrow (V^*)^* \text{ definovaný vztahem } f(\mathbf{v})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}).$$

$$\text{Ztotožníme } \mathbf{v} \equiv f(\mathbf{v}), \text{ pak } \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v} \rangle = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$$

Obdobně lze ztotožňovat i duály vyšších řádů  $V^* \cong V^{***}, V^{**} \cong V^{****}$ .

Celkem tedy máme k dispozici následující objekty:

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha} \in V^*, \boldsymbol{\alpha} : V \rightarrow \mathbb{R}, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v} \rangle \\ \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} : V^* \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \\ a \in \mathbb{R}, a : \emptyset \mapsto a \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ Všechno jsou to lineární zobrazení.}$$

## Tenzor

Tenzorem typu  $\binom{p}{q}$  nad  $V$  (kontravariantním řádu  $p$  a kovariantním řádu  $q$ ) nazýváme každé multilineární (lineární v každé složce) zobrazení

$$T : V_q^p = \underbrace{V \times \dots \times V}_{q\text{-krát}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{p\text{-krát}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Řádem tenzoru nazýváme číslo  $p + q$ .

## Složky tenzoru

Tenzor je lineární zobrazení a proto je jednoznačně určen svými hodnotami na bázi  $V_q^p$ , které nazýváme složky tenzoru  $T$  vzhledem k bázi  $B$

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} := T(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_q}; \mathbf{e}^{j_1}, \dots, \mathbf{e}^{j_p}).$$

Transformace složek

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} &= T(\tilde{\mathbf{e}}_{i_1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{i_q}; \tilde{\mathbf{e}}^{j_1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}^{j_p}) = \\ &= T(\mathbf{e}_{k_1} S_{i_1}^{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_q} S_{i_q}^{k_q}; (S^{-1})_{l_1}^{j_1} \mathbf{e}^{l_1}, \dots, (S^{-1})_{l_p}^{j_p} \mathbf{e}^{l_p}) = \\ &= (S^{-1})_{l_1}^{j_1} \dots (S^{-1})_{l_p}^{j_p} T(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_q}; \mathbf{e}^{l_1}, \dots, \mathbf{e}^{l_p}) S_{i_1}^{k_1} \dots S_{i_q}^{k_q} = \\ &= (S^{-1})_{l_1}^{j_1} \dots (S^{-1})_{l_p}^{j_p} T_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p} S_{i_1}^{k_1} \dots S_{i_q}^{k_q} \end{aligned}$$

## Sečítání tenzorů a násobení číslem

$$(T + aR)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^p) = T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^p) + aR(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^p)$$

$$\text{Ve složkách} \quad (T + aR)_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} + aR_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} \quad a \in \mathbb{R}$$

Množina všech tenzorů typu  $\binom{p}{q}$  tvoří vektorový pr.  $T_q^p(V)$  dimenze  $n^{p+q}$ .

$$T_0^0(V) = \mathbb{R} \quad T_0^1(V) = V^{**} \equiv V \quad T_1^0(V) = V^*$$

$$T_1^1(V) \cong \text{Hom}(V, V) \quad T_2^0(V) \dots \text{bilineární formy na } V$$

## Tensorový součin\*

je zobrazení  $\otimes : T_q^p(V) \times T_s^r(V) \rightarrow T_{q+s}^{p+r}(V)$  definované předpisem

$$(T \otimes R)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{q+s}; \boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^{p+r}) := T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^p) \cdot R(\mathbf{v}_{q+1}, \dots, \mathbf{v}_{q+s}; \boldsymbol{\alpha}^{p+1}, \dots, \boldsymbol{\alpha}^{p+r}).$$

Ve složkách  $(T \otimes R)_{i_1 \dots i_{q+s}}^{j_1 \dots j_{p+r}} = T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} \cdot R_{i_{q+1} \dots i_{q+s}}^{j_{p+1} \dots j_{p+s}}$

Tensorový součin je bilineární, asociativní a nekomutativní.

$\{\mathbf{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{i_q} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_p} \mid i_k, j_l \in \hat{n}, \forall k \in \hat{q}, \forall l \in \hat{p}\}$  je báze pr.  $T_q^p(V)$ .

Pozn.\* Vektorový prostor  $T(V) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T_s^r(V)$  tvoří spolu s tenzorovým součinem  $\otimes : T(V) \times T(V) \rightarrow T(V)$  (dodefinovaným pomocí bilinearity) asociativní algebru nazývanou tenzorová algebra vektorového prostoru  $V$ .  
Př. Vnější součin pro 1-formy:  $\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j - \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i$ .

## Kontrakce tenzorů\*

Je zobrazení  $C_a^b : T_q^p(V) \rightarrow T_{q-1}^{p-1}(V)$  určené výběrem  $a \in \hat{q}, b \in \hat{p}$  a definované předpisem  $T \mapsto C_a^b T := \sum T(\dots, \underbrace{\mathbf{e}_k}_a, \dots; \dots, \underbrace{\mathbf{e}^k}_b, \dots)$ .

Ve složkách je výsledek  $\delta_{j_b}^{i_a} T_{i_1 \dots i_a \dots i_p}^{j_1 \dots j_b \dots j_p} = T_{i_1 \dots i_a \dots i_p}^{j_1 \dots j_b \dots j_p}$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}; \boldsymbol{\alpha}) &= T(v^k \mathbf{e}_k; \alpha_l \mathbf{e}^l) = v^k \alpha_l T(\mathbf{e}_k; \mathbf{e}^l) = T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j (v^k \mathbf{e}_k; \alpha_l \mathbf{e}^l) = \\ &= T_i^j v^k \alpha_l \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j (\mathbf{e}_k; \mathbf{e}^l) = T_i^j v^k \alpha_l \mathbf{e}^i (\mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_j (\mathbf{e}^l) = T_i^j v^k \alpha_l \delta_k^i \delta_j^l = \\ &= T_k^l v^k \alpha_l = T \otimes \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l; \mathbf{e}^l, \mathbf{e}^k) = C_1^1 C_1^2 (T \otimes \mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}$$

## Invariantní tenzory

Bud'  $G \subset GL(n)$  podgrupa. Tenzor  $T$  se nazývá  $G$ -invariantní, pokud se jeho složky nemění při změně báze  $\tilde{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_i S_j^i, \forall S \in G$ .

- tenzory nultého řádu (skaláry)  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = \alpha_i v^i, \quad T_i^i = \delta_j^j T_i^j$   
(výčíslení tenzoru na vektorech a kovektorech je nezávislé na bázi)
- jednotkový tenzor  $\hat{1} \in T_1^1(V)$  definovaný předpisem  $\hat{1}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})$   
 $\hat{1} = \delta_j^i \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i = \sum \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_i, \quad C\hat{1} = n = \dim V$   
–jediný (až na násobky) invariantní tenzor druhého řádu,
- mocniny jednotkového tenzoru  $\hat{1} \otimes \hat{1}$

Místo  $G$ -invariantní se říká invariantní, je-li zřejmé o jakou grupu  $G$  jde (zde  $G = GL(n)$ ).

Pokud je na  $V$  definovaná vhodná dodatečná struktura (nedegenerovaná bilineární forma například skalární součin nebo symplektická forma) lze ji využít k definici izomorfizmu  $V \rightarrow V^*$  a tyto prostory ztotožnit.

## (Pseudo)metrický tenzor

Metrický tenzor na  $V$  je každý symetrický nedegenerovaný tenzor typu  $\binom{0}{2}$ .

$$g \in T_2^0(V) \quad g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(v^i \mathbf{e}_i, w^j \mathbf{e}_j) = v^i w^j g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = v^i g_{ij} w^j = \tilde{v}^T (g_{ij}) \tilde{w}$$

- symetrický  $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad g_{ij} = g_{ji}$
- nedegenerovaný  $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in V \Rightarrow \mathbf{v} = 0 \quad \det(g_{ij}) \neq 0$

Pro každou symetrickou formu  $B \in T_2^0(V)$  existuje báze (polární báze, ortonormální báze) ve které má její matice tvar  $(B_{ij}) = (B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_s, \underbrace{0, \dots, 0}_u)$ .

Nedegenerovanost  $B$  znamená  $u = 0$ .

Kanonický tvar metrického tenzoru  $(g_{ij}) = (\eta_{ij}) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_s)$ .  
Je-li  $s > 0$  je  $g$  tzv. pseudometrický tenzor.

Je-li  $r = n$  je  $g$  skalární součin.

## Zvedání a snižování indexů

Bud'  $(g^{ij})$  matice inverzní k matici  $(g_{ij})$  pak platí

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \quad g^{ij} = g^{ji}, \quad \det(g^{ij}) \neq 0$$

a  $g^{-1} = g^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \in T_0^2(V)$  je nedegenerovaný symetrický tenzor typu  $\binom{2}{0}$ .

Pomocí  $g$  a  $g^{-1}$  definujeme (kanonické) izomorfizmy mezi  $V$  a  $V^*$

- snižování indexů  $b_g : V \rightarrow V^* \quad \mathbf{v} \mapsto b_g(\mathbf{v}) = g(\cdot, \mathbf{v})$   
 $v_i := (b_g(\mathbf{v}))_i = g_{ij} v^j$
- zvedání indexů  $\sharp_g : V^* \rightarrow V \quad \boldsymbol{\alpha} \mapsto \sharp_g(\boldsymbol{\alpha}) = g^{-1}(\cdot, \boldsymbol{\alpha})$   
 $\alpha^i := (\sharp_g(\boldsymbol{\alpha}))^i = g^{ij} \alpha_j$

$v_i$  se nazývají kovariantní a  $v^i$  kontravariantní složky vektoru  $\mathbf{v}$ .

Je-li diagonála  $g$  pozitivně definitní ( $r = n$ ) pak  $v^i = v_i$  (v O.N. bázi).

$$\text{Pro tenzory } T_j^i = g^{ik} T_{kj} = g_{jk} T^{ik}$$

$$\text{Pro tenzory vyšších řádů obdobně } T_{n,jl}^i = g^{ik} T_{nkjl}.$$

# Newtonovská mechanika

- euklidovský afinní prostor  $E(3) = (\mathbb{R}^3, g_{ij})$
- Metrický tenzor v O.N. bázi  $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (g^{ij})$
- čas je nezávislý všude stejně plynoucí parametr
- vektor  $\vec{x} = (x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x^i)$
- Einsteinova sumace dvakrát opakující se Latinské indexy od 1 do 3
- Skalární součin
 
$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{ij}x_iy_j = \vec{x}^T(g_{ij})\vec{y} \stackrel{\text{O.N.B.}}{=} \vec{x} \cdot \vec{y}$$
- Kvadrát velikosti (polára skalárního součinu)
 
$$(\Delta l)^2 = g_{ij}\Delta x_i\Delta x_j \stackrel{\text{O.N.B.}}{=} (\Delta x_i)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$
- Grupy symetrii prostoru  $E(3)$ 
  - ▶ Ortogonální grupa  $O(3)$  – zrcadlení a rotace zaměření  $\vec{E}(3)$
  - ▶ Euklidova grupa  $E_3 \cong \mathbb{R}^3 \rtimes O(3)$  – zrcadlení, rotace a translace
- Grupy symetrii prostoru rozšířeného o časovou osu  $\mathbb{R} \times E(3)$ 
  - ▶ Homogenní Galileiho grupa  $\mathbb{R}^3 \rtimes O(3)$  – homogenní Galileiho tr.
  - ▶ Galileiho grupa  $Gal(3) \cong \mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes O(3))$  – translace a hom. G. tr.

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T & t_0 \\ \vec{V} & S & \vec{x}_0 \\ 0 & \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + t_0 \\ \vec{V}t + S\vec{x} + \vec{x}_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Relativistická mechanika

- Minkowského prostoročas pseudo-euklidovský afinní  $E(1, 3) = (\mathbb{R}^4, g_{\mu\nu})$
- Metrický tenzor v O.N. bázi  $(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu})$
- čas je “jen jedna ze souřadnic”
- čtyřvektor
 
$$\begin{matrix} \text{kontravariantní} \\ (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{kovariantní} \\ (x_\mu) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \end{matrix}$$
- Einsteinova sumace pře shodný horní a dolní Řecký index od 0 do 3
- Pseudo–skalární součin
 
$$g(X, Y) = g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\nu y^\nu = g^{\mu\nu}x_\mu y_\nu = (x^\mu)^T(g_{\mu\nu})(y^\nu) \\ \stackrel{\text{O.N.B.}}{=} x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3$$
- Kvadrát intervalu
 
$$(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta x^\mu \Delta x_\mu \\ \stackrel{\text{O.N.B.}}{=} c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$
- Grupy symetrii prostoru  $E(1, 3)$ 
  - ▶ Lorentzova grupa  $O(1, 3)$ 
    - lineární izometrie zaměření Minkowského prostoročasu
    - zrcadlení, rotace a boosty
  - ▶ Poincarého grupa  $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(1, 3)$  (nehomogenní Lorentzova grupa)
    - afinní izometrie Minkowského prostoročasu
    - zrcadlení, rotace, boosty a translace