

Lagrangeův a Hamiltonův formalizmus pro relativistickou částici

Zkonstruujeme akci pro volnou bezsilovou hmotnou ($m_0 > 0$) částici, tak aby

- byla stejná pro pozorovatele ve všech inerciálních vztažných soustavách (tj. relativisticky invariantní)
- pro $v \ll c$ “přecházela” na nerelat. akci $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_0 v^2 dt$.

Invariantem je interval resp. vlastní čas

$$ds = c d\tau = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = c(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots) dt$$

Aby akce přecházela v nerelativistickou, definujeme ji jako vhodný násobek “délky” světočáry

$$-m_0 c ds = (-m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots) dt$$

Akce pro volnou bezsilovou částici

$$S_0 = \int_1^2 (-m_0 c) ds = \int_{\tau_1}^{\tau_2} -m_0 c^2 d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{L_0} dt$$

Lagrangeova funkce pro volnou bezsilovou částici

$$L_0(\vec{v}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Obecná hybnost (zde odpovídá relativistické hybnosti)

$$\vec{p} = \frac{\partial L_0}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p_i = \frac{\partial L_0}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v_j^2}{c^2}} \right) = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pro částici v poli s potenciálem $U(\vec{x}, t)$

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(\vec{x}, t) \quad \text{kde } \vec{v} = \dot{\vec{x}}$$

Lagrangeovy rovnice jsou relativistické pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{F}$$

Hamiltonova funkce

Obecná energie

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} - \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U \right) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U$$

Vyjádření rychlostí pomocí hybností

$$p_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad p^2 c^2 - p^2 v^2 = m_0^2 c^2 v^2 \quad v^2 = \frac{p^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}$$

$$v_i = \frac{p_i}{m_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{p_i}{m_0} \sqrt{1 - \frac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}} = \frac{p_i}{m_0} \sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}} = \frac{p_i c}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}}$$

Hamiltonova funkce

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} + U(\vec{x}, t)$$

Pro nabitou částici v elmag. poli s potenciály $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$ a $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$

Lagrangeova funkce

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

Obecná hybnost (různá do relativistické hybnosti)

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q \vec{A} \quad (\vec{p} - q \vec{A})^2 = \frac{m_0^2 v^2 c^2}{c^2 - v^2} \quad v^2 = \frac{(\vec{p} - q \vec{A})^2 c^2}{m_0^2 c^2 + (\vec{p} - q \vec{A})^2}$$

Obecná energie

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} + q \vec{A} \cdot \vec{v} - \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi$$

Hamiltonova funkce

$$H = c \sqrt{(\vec{p} - q \vec{A})^2 + m_0^2 c^2} + q\varphi$$

Lagrangeův formalismus v teorii pole

V STR nelze interakci mezi částicemi popsat pomocí potenciálů (z důvodu konečné rychlosti šíření interakce). Soustavu interagujících částic je potřeba doplnit o další fyzikální objekt (silové pole) s vlastními stupni volnosti, který tuto interakci zprostředkuje.

Pole resp. soustavu polí popíšeme sadou hladkých funkcí $q_a(x^\mu)$, $a = 1, \dots, n$ – obecných souřadnic polí na prostoročasu

Pohyb nerelativistické částice přímce - motivace

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) dt = \int_{\langle t_1, t_2 \rangle} \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - U(\psi) dt$$

Speciální případ pole na 1–dimenzionálním prostoročasu odpovídající historii částice.

Pro částice

t

$q_i(t)$

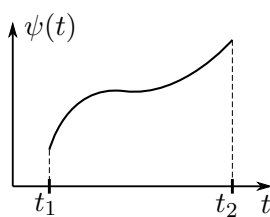
$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$

Pro pole

x^μ

$q_a(x^\mu)$

$S[q_a(x^\mu)] = \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu) dV^*$



Akce pro pole

$$S[q_a(x^\mu)] = \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu) dV^*$$

kde $q_{a,\nu} = \frac{\partial q_a}{\partial x^\nu} = \partial_\nu q_a$

je objemový integrál přes čtyřrozměrnou oblast V^* s objemovým elementem $dV^* = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dx dy dz = c dt dV$

z hustoty Lagrangeovy funkce – lagrangiánu $\mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)$.

Speciálně pro $V^* = \langle ct_1, ct_2 \rangle \times V$

$$S = \int_{V^*} \mathcal{L} dt dV = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \mathcal{L} dV \right) dt$$

Divergenční věta

$$\int_{\partial \Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

$$\Omega, M \dots k\text{-rozměrné variety v } \mathbb{R}^n, \bar{\Omega} \subset M \text{ kompaktní}$$
$$\partial \Omega \dots \text{hranice } \Omega \text{ v } M \text{ s orientací pomocí vnější normály}$$
$$\omega \in C^1(\bar{\Omega}) \dots (k-1)\text{-forma, } d\omega \text{ její vnější derivace } (k\text{-forma})$$

Hamiltonův princip pro pole

Skutečný časový vývoj soustavy polí se děje s takovou závislostí q_a na x^μ , pro kterou akce S nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím $\delta q_a(x^\mu)$ splňujícím podmínku pevných konců, která požaduje nulovost variací na hranici ∂V^* oblasti V^* tj. $\delta q_a(x^\mu)|_{\partial V^*} = 0$.

Rovnice pole

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int_{V^*} \delta \mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu) dV^* = \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} \delta q_{a,\nu} \right] dV^* \\ &= \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} \delta q_a \right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} \right) \delta q_a \right] dV^* \\ &= \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} \right) \delta q_a \right] dV^* + \frac{1}{c} \int_{V^*} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} \delta q_a \right) dV^* \\ &= \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} \right) \right] \delta q_a dV^* + \frac{1}{c} \int_{\partial V^*} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} \delta q_a \right) df_\nu \end{aligned}$$

Lagrangeovy rovnice pro soustavu polí v Minkowského prostoročase

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0 \quad \forall a \in \hat{n}$$

$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ je derivace složených funkcí podle řetězového pravidla

$$q_{a,0} = \frac{\partial q_a}{\partial x^0} = \frac{\partial q_a}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^0} = \frac{1}{c} q_{a,t} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,0}} = c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,t}} \quad \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,0}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,t}}$$

Homogenní struna

Jednorozměrné pole na $q_1 = \psi = \psi(t, z)$ na dvourozměrném prostoročasu.
 $\rho \dots$ lineární hustota struny
 $T \dots$ síla napínající strunu

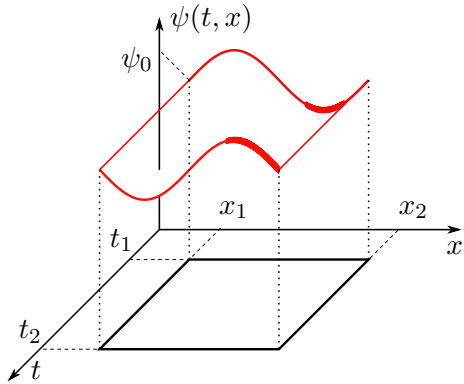
Hustota kinetické energie $\kappa = \frac{1}{2} \rho \psi_t^2$
Hustota potenciální energie $u = \frac{1}{2} T \psi_z^2$
 $\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \psi_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$

Hustota Lagrangeovy funkce
$$\mathcal{L}(\psi_t, \psi_z) = \kappa - u = \frac{1}{2} \rho \psi_t^2 - \frac{1}{2} T \psi_z^2$$

Pohybové rovnice pole

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_z} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \psi_t) + \frac{\partial}{\partial z} (T \psi_z) - 0 = \rho \psi_{tt} - T \psi_{zz} = 0 \implies \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$



Vlnová rovnice pro strunu

Nejednoznačnost lagrangiánu $\mathcal{L}$

Hustota Lagrangeovy funkce je pro dané pole určena až na divergenci libovolného čtyřvektoru $F^\mu(q_a, x^\nu)$. Lagrangiány $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial F^\mu(q_a, x^\nu)}{\partial x^\mu}$ vedou na stejné rovnice pole.

$$\delta \frac{1}{c} \int_{V^*} \frac{\partial F^\mu}{\partial x^\mu} dV^* = \frac{1}{c} \delta \int_{\partial V^*} F^\mu df_\mu = \frac{1}{c} \int_{\partial V^*} \frac{\partial F^\mu}{\partial q_a} \underbrace{\delta q_a}_{=0} df_\mu = 0$$

Hamiltonův princip spolu s Lagrangeovými rovnicemi lze použít v prostorech libovolné dimenze. Úloha nalézt lagrangián, který vede na rovnice popisující pohyb daného pole je obtížná a pro její řešení nejsou známa obecně platná pravidla. Využívají se principy symetrie a jednoduchosti. Například v STR jde o požadavek relativistické invariance lagrangiánu, který plyne z relativistické invariance akce a integrace vzhledem k $dV^{*'} = |J| dV^*$

$$J = \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \det(\alpha^\mu{}_\nu) = \det A = \pm 1$$

Transformace polí

- skalární pole $\psi'(x'^\kappa) = \psi(x^\kappa)$
- vektorové pole $A'^\mu(x'^\kappa) = \alpha^\mu{}_\nu A^\nu(x^\kappa)$
- tenzorové pole $F'^{\mu\nu}(x'^\kappa) = \alpha^\mu{}_\rho \alpha^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x^\kappa)$

$$x'^\kappa = \alpha^\kappa{}_\lambda x^\lambda \qquad A'^\mu(x'^\kappa) = \alpha^\mu{}_\nu A^\nu((\alpha^{-1})^\lambda{}_\kappa x'^\kappa)$$