

Rovnice elektrodynamiky v Minkowského prostoročase

Princip relativity (stejný tvar fyzikálních zákonů ve všech inerciálních vztažných soustavách) lze matematicky vyjádřit kovariantním tvarem rovnic (všechny členy rovnice se transformují stejně při Lorentzových tr.)

Př: $T'^{\mu} = K'^{\mu} \quad T'^{\mu} = \alpha^{\mu}_{\nu} T^{\nu} \quad \alpha^{\mu}_{\nu} T^{\nu} = \alpha^{\mu}_{\nu} K^{\nu} / (\alpha^{-1})^{\sigma}_{\mu} \quad T^{\sigma} = K^{\sigma}$

d'Alembretovy rovnice - nehomogení vlnové pro potenciály (ve vakuu)

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Lorenzova kalibrační podmínka

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

chceme tvar ve kterém bude na obou stranách rovnice vystupovat čtyřvektor

d'Alembertův operátor $\square$

skalární operátor, zapíšeme ho pomocí čtyřtenzorů a ukážeme jeho invarianci

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} = -g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = -g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$$
$$x'^{\mu} = \alpha^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad x^{\nu} = (\alpha^{-1})^{\nu}_{\sigma} x'^{\sigma} \quad g'^{\mu\nu} = \alpha^{\mu}_{\rho} \alpha^{\nu}_{\sigma} g^{\rho\sigma}$$
$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\alpha^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\alpha^{-1})^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu}$$
$$\square' = -g'^{\mu\nu} \partial'_{\mu} \partial'_{\nu} = -\alpha^{\mu}_{\rho} \alpha^{\nu}_{\sigma} g^{\rho\sigma} (\alpha^{-1})^{\kappa}_{\mu} (\alpha^{-1})^{\lambda}_{\nu} \partial_{\kappa} \partial_{\lambda} = -\delta^{\kappa}_{\rho} \delta^{\lambda}_{\sigma} g^{\rho\sigma} \partial_{\kappa} \partial_{\lambda} = -g^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \partial_{\sigma}$$
$$= \square$$

čtyřproud

Náboj je invariant $dQ' = dQ = \rho dV$ a díky kontrakci délek $dV = \frac{1}{\gamma} dV_0$

proto $\rho = \frac{dQ}{dV} = \gamma \frac{dQ}{dV_0} = \gamma \rho_0$, kde ρ_0 je klidová hustota náboje.

Inspirujeme se proudovou hustotu ($\vec{j} = \rho \vec{v}$) a definujeme *čtyřproud* jako součin invariantu ρ_0 a čtyřrychlosti u^{μ}

$$(j^{\mu}) = \rho_0(u^{\mu}) = \rho_0(\gamma c, \gamma \vec{v}) = (\rho_0 \gamma c, \rho_0 \gamma \vec{v}) = (\rho c, \rho \vec{v}) = (\rho c, \vec{j})$$

Rovnice kontinuity v kovariantním tvaru

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial c \rho}{\partial (ct)} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} j^{\mu}$$

čtyřdivergence

$$\square_{\mu} j^{\mu} = 0$$

čtyřpotenciál

Upravíme rovnice tak aby na pravé straně stál čtyřvektor

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\mu_0 c^2 \rho = -\mu_0 c j^0 \quad \square \frac{\varphi}{c} = -\mu_0 j^0 \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

čtyřpotenciál $(A^{\mu}) = (\frac{\varphi}{c}, \vec{A})$

kovariantní tvar Maxwellových–Lorentzových rovnice $\square A^{\mu} = -\mu_0 j^{\mu}$

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial (ct)} \frac{\varphi}{c} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial A^0}{\partial x^0} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} A^{\mu}$$

Lorenzova podmínka v kovariantním tvaru $\square_{\mu} A^{\mu} = 0$

Kalibrační transformace v kovariantním tvaru

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad \tilde{A}^0 = \frac{\tilde{\varphi}}{c} = \frac{\varphi}{c} - \frac{\partial \Lambda}{\partial (ct)} = A^0 - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} = A^0 - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_0}$$
$$\tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda \quad \tilde{A}^i = A^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = A^i - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}$$

$$\tilde{A}^{\mu} = A^{\mu} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\mu}} = A^{\mu} - \partial^{\mu} \Lambda \quad \text{nebo} \quad \tilde{A}_{\mu} = A_{\mu} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^{\mu}} = A_{\mu} - \partial_{\mu} \Lambda$$

(gradient $\partial^{\mu} \Lambda = g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \Lambda$ vs. složka jednoformy $d\Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} = \partial_{\nu} \Lambda dx^{\nu}$)

Maxwelovy–Lorentzovy rovnice (ve vakuu)

I. $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$

II. $\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Zapíšeme vektory $\vec{E}, \vec{B}$ pomocí čtyřpotenciálu. Nejprve připomeneme jak tomu bylo v $\mathbb{R}^3$ pomocí potenciálů: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$

$$B_i = (\operatorname{rot} A)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} B_k \quad B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \hat{B}_{23} \quad \hat{B}_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$$

$$B_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \hat{B}_{jk} \quad \hat{B}_{jk} = \varepsilon_{jki} B_i \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{B}_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$$

Obdobně jako u úhlové rychlosti $\tilde{\Omega}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \tilde{\omega}_{jk}$ i zde jsou složky $\vec{B}$ ztotožněny (přes Hodgeův duální operátor) se složkami složky antisymetrického tenzoru 2. řádu $\hat{B}$. Proto je $\vec{B}$ pseudovektor.

Hodgeův operátor $: \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V^*)$ nad n -dim. vek. pr. (V, g, o)

$$(*\alpha)_{j_1, \dots, j_{n-k}} = \frac{1}{k!} \alpha^{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}}, \quad \text{kde} \quad \omega_{i_1, \dots, i_n} = o(\text{baze}) \sqrt{|g|} \epsilon_{i_1, \dots, i_n}$$

Tenzor elektromagnetického pole

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = c \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi}{c} \right) - \frac{\partial A_x}{\partial(ct)} \right] = c \left[-\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right]$$

$$\stackrel{(A^1 = -A_1)}{=} c \left[\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} \right] = cF_{01}$$

$$B_x = [\text{rot } \vec{A}]_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2} = F_{32}$$

Tenzor elektromagnetického pole

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{zvednutím indexů } F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\text{je antisymetricky } F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

$$\text{transformace } F'^{\mu\nu}(x') = \alpha^\mu_\rho \alpha^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}(x)$$

$$\text{kalibrační invariance } \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu = \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \Lambda) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \Lambda) = \\ = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \Lambda + \partial^\nu \partial^\mu \Lambda = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

Duální tenzor

Čtyřrotace čtyřvektoru je tedy antisymetrický čtyřtenzor druhého řádu, Hodgeův duál z něj udělá zase čtyřtenzor druhého řádu.

$$\text{Duální tenzor} \quad \boxed{F^*_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu}} \quad F^{*\kappa\lambda} = -\frac{1}{2!} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Levi-civitaův symbol $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ je úplně antisymetrický a $\epsilon_{0123} = 1 = \epsilon^{0123}$.

$$F^*_{01} = \frac{1}{2} \epsilon_{01\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\epsilon_{0123} F^{23} + \epsilon_{0132} F^{32}) = \frac{1}{2} (F^{23} - (-F^{23})) = F^{23} = -B_x$$

$$F^*_{12} = \frac{1}{2} \epsilon_{12\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\epsilon_{1203} F^{03} + \epsilon_{1230} F^{30}) = \frac{1}{2} (F^{03} - (-F^{03})) = F^{03} = -\frac{E_z}{c}$$

$$F^*_{13} = \frac{1}{2} \epsilon_{13\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\epsilon_{1302} F^{02} + \epsilon_{1320} F^{20}) = \frac{1}{2} (-F^{02} + F^{20}) = F^{20} = \frac{E_y}{c}$$

$$(F^{*\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

Přechod od $F^{\mu\nu}$ k $F^{*\mu\nu}$ odpovídá záměně $\frac{\vec{E}}{c} \rightarrow -\vec{B}$ a $\vec{B} \rightarrow \frac{\vec{E}}{c}$.

Maxwellovy–Lorentzovy rovnice v kovariantním tvaru

$$\text{I. série} \quad \boxed{\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu} \quad \text{II. série} \quad \boxed{\frac{\partial F^{*\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \partial_\nu F^{*\mu\nu} = 0}$$

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = 0 + \frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(-\frac{E_i}{c} \right) = -\frac{1}{c} \text{div } \vec{E} = -\mu_0 j^0 = -\mu_0 c \rho$$

$$\text{div } \vec{E} = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + 0 + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial(ct)} \left(\frac{E_x}{c} \right) + \frac{\partial(-B_z)}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - (\text{rot } \vec{B})_x = -\mu_0 j_x \quad (\text{rot } \vec{B})_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x$$

$$\frac{\partial F^{*0\nu}}{\partial x^\nu} = 0 + \frac{\partial F^{*0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial B_i}{\partial x^i} = \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial F^{*1\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F^{*10}}{\partial x^0} + 0 + \frac{\partial F^{*12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{*13}}{\partial x^3} = \frac{\partial(-B_x)}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{E_z}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E_y}{c} \right)$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{1}{c} (\text{rot } \vec{E})_x = 0 \quad \left(\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_x = 0$$

Lorentzova čtyřsila

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u^\mu) = K^\mu \quad (u^\mu) = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (K^\mu) = (\gamma \vec{v} \cdot \vec{F}, \gamma \vec{F})$$

$$\text{Lorentzova síla } \vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$K^1 = \gamma F_x = \gamma e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_x = e(\gamma \frac{E_x}{c} + \gamma v_y B_z - \gamma v_z B_y) =$$

$$= e(u_0 F^{10} + (-u_2)(-F^{12}) + u_3 F^{13}) = eF^{1\nu} u_\nu$$

$$K^0 = \gamma \vec{v} \cdot \vec{F} = e \gamma \vec{v} \cdot \vec{E} = e(-\frac{E_i}{c})(-\gamma v_i) = eF^{0\nu} u_\nu$$

$$\text{Lorentzova čtyřsila} \quad \boxed{K^\mu = eF^{\mu\nu} u_\nu}$$

Relativistické invarianty elektromagnetického pole

$$I_0 = F^\mu_\mu = g_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{Hadamardův součin } (A \circ B)_{ij} = A_{ij} \cdot B_{ij}, \neq)$$

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}) \quad \text{Další invarianty jsou již buď závislé nebo}$$

$$I_2 = F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} = 4 \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c} \quad \text{triviální. } I_1 = -F^*_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}$$

Podle znamének těchto invariantů lze provést relativisticky invariantní klasifikaci EM-polí do devíti tříd. Příklad $I_1 = 0 = I_2$ tj. $\vec{E} \perp \vec{B}$, $E = cB$ odpovídá rovinné elektromagnetické vlně ve vakuu.

Akce pro soustavu nabitých částic a elektromagnetického pole

Akci pro soustavu interagujících nabitých částic v EM poli sestavíme ze dvou mezních případů

- soustava vzájemně neinteragujících nabitých částic ve vnějším poli
- EM pole buzené zadaným rozložením nabitých částic a jejich rychlostí

Soustava neinteragujících částic ve vnějším poli

Zanedbává se vzájemná interakce částic stejně jako jejich vliv na EM pole. Lagrangeova funkce

- pro nabitou částici s klidovou hmotností m_0 a nábojem e v EM poli

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t))$$

- pro soustavu částic s klidovými hmotnostmi m_α a náboji e_α

$$L = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N -m_\alpha c^2 \sqrt{1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}}}_{L_m} - \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N e_\alpha [\varphi(\vec{r}_\alpha, t) - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}(\vec{r}_\alpha, t)]}_{L_{mf}}$$

Dirackova delta funkce δ

Je “funkce” na $\mathbb{R}$ s vlastnostmi $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$ a $\delta(x) = 0, \forall x \neq 0$.

Platí pro ni $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx = f(0)$ $\int_{\mathbb{R}} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$

$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_a) = \delta(x - x_a) \delta(y - y_a) \delta(z - z_a)$ $\int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_a) f(\vec{r}) dV = f(\vec{r}_a)$

Pro bodové náboje je nábojová a proudová hustota dána vztahy

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)) \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \vec{v}_\alpha(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t))$$

Interakční lagrangián

$$\begin{aligned} L_{mf} &= - \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \varphi(\vec{r}_\alpha, t) + \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}(\vec{r}_\alpha, t) = \\ &= - \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \varphi(\vec{r}, t) dV + \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \vec{A}(\vec{r}, t) dV = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)}_{\rho(\vec{r}, t)} \varphi(\vec{r}, t) dV + \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \vec{v}_\alpha \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)}_{\vec{j}(\vec{r}, t)} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) dV = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} c \rho(\vec{r}, t) \frac{\varphi(\vec{r}, t)}{c} - \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) dV = \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{-j^\mu A_\mu}_{\mathcal{L}_{mf}} dV \end{aligned}$$

Hustota Lagrangeovy funkce pro EM pole

Akce pro pole $S_f = \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L}_f dV^*$ má být stejná ve všech inerciálních vztažných soustavách a neměla by záviset na zvolené kalibraci pole.

Hustotu Lagrangeovy funkce $\mathcal{L}_f$ pro EM pole hledáme tak, aby byla:

- nejvýše kvadratická v polních proměnných (Maxwellovy rce. jsou lineární)
- relativistiky invariantní (kvůli kovarianci polní rovnice)
- kalibračně invariantní (nezávislá na parametrizaci pole)

Kvadratickými v polních proměnných $\vec{E}, \vec{B}, A_\mu$, $\boxed{\partial_\nu A_\mu = A_{\mu,\nu}}$ jsou invarianty $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ (skalár) $F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}$ (pseudoskalár) (další $A_\mu A^\mu, A_{\mu,\nu} A^{\mu,\nu}$ nejsou kalib. inv.)

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\mu_0} 2(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{E}^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2$$

$$\mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\nu}, x^\nu) = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu = -\frac{1}{4\mu_0} (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})(A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}) - j^\mu A_\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = -j^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\kappa} = -j^\mu \delta_\mu^\kappa = -j^\kappa$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} &= -\frac{1}{4\mu_0} \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} \right) = -\frac{1}{4\mu_0} \left(\frac{\partial (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})}{\partial A_{\kappa,\lambda}} F^{\mu\nu} + \right. \\ &\quad \left. + F_{\mu\nu} \frac{\partial (A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu})}{\partial A_{\kappa,\lambda}} \right) = -\frac{1}{4\mu_0} \left((\delta_\nu^\kappa \delta_\mu^\lambda - \delta_\mu^\kappa \delta_\nu^\lambda) F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \left(F^{\lambda\kappa} - F^{\kappa\lambda} + F^{\rho\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} \right) = -\frac{1}{4\mu_0} (2F^{\lambda\kappa} + 2F^{\kappa\lambda}) = \frac{1}{\mu_0} F^{\kappa\lambda} \\ \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{1}{\mu_0} F^{\kappa\lambda} \right) - (-j^\kappa) = 0 \implies \partial_\lambda F^{\kappa\lambda} = -\mu_0 j^\kappa \end{aligned}$$

I. série Maxwellových–Lorentzových rovnic (II. série je splněna potenciály)

Akce pro soustavu nabitých částic a EM pole je $S = S_m + S_{mf} + S_f$, kde

- hmota (matter) $S_m = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N (-m_\alpha c^2) \sqrt{1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}} dt$
- pole (field) $S_f = \frac{1}{c} \int_{V^*} (-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) dV^*$
- inetarkce $S_{mf} = \frac{1}{c} \int_{V^*} (-j^\mu A_\mu) dV^* = \int_{t_1}^{t_2} (-\sum_{\alpha=1}^N e_\alpha [\varphi(\vec{r}_\alpha, t) - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}(\vec{r}_\alpha, t)]) dt$

Odtud se variací podle proměnných x_α^μ (při neměnných A_μ) získají relativistické pohybové rovnice pro částice v EM poli a variací podle polních proměnných A_μ (při neměnných x_α^μ) Maxwellovy–Lorentzovy rovnice.