Speciální teorie relativity (A. Einstein 1905)

- formulována pro jednu částici v elektromagnetickém poli (případně pro systém neinteragujících částic)
- není kompatibilní s gravitací (proto vznikla obecná teorie relativity)

Principy speciální teorie relativity

1. Newtonův zákon
Existuje *inerciální vztažná soustava* (IS), vůči které se každý volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Volný hm. bod = hm. bod na který nepůsobí žádné skutečné (pravé) síly (gravitace se neuvažuje)

vztažná soustava = tuhé těleso, soustava synchronizovaných hodin, kartézský souřadný systém

Einsteinův princip relativity:

Všechny fyzikální děje probíhají ve všech inerciálních vztažných soustavách podle stejných zákonů.

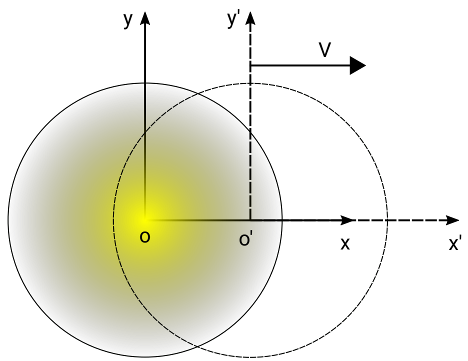
Experimentálním zkoumáním fyzikálních dějů principiálně nelze inerciální vztažné soustavy navzájem odlišit.
Fyzikální zákony lze zapsat v tzv. *kovariantní formě* tj. ve tvaru který je stejný ve všech inerciálních vztažných soustavách.

Princip stálosti rychlosti světla:

Ve vakuu se světlo šíří vůči všem inerciálním vztažným soustavám rovnoměrně přímočaře konstantní rychlostí $c = 299\,792\,458\,ms^{-1}$.

Rychlost světla je absolutní.

Speciální Lorentzova transformace mezi inerciálními soustavami S a S'



Vlnoplochy světelného záblesku vyslaného v čase $t = 0 = t'$, kdy počátky obou soustav splývají ($o = o'$) musí být v obou soustavách sféry popsané rovnicemi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Dále budeme předpokládat, že

- transformace je lineární, což zajistí splnění 1.N.Z. v obou soustavách současně
- $y' = y$ a $z' = z$ což plyne z homogenity a izotropie prostoru a požadavku na stejný tvar inverzní transformace (pouze se záměnou $\vec{V} \leftrightarrow \vec{V}' = -\vec{V}$)
- $x' = \gamma x + \delta t$ a $t' = \alpha t + \beta x$

Pro počátek o' platí $0 = x'(o') = \gamma x(o') + \delta t = \gamma V t + \delta t$ odtud $\delta = -\gamma V$ a tedy $x' = \gamma(x - Vt)$. Dosazením do rovnice sféry:

$$\gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(\alpha t + \beta x)^2$$

$$\underbrace{(\gamma^2 - \beta^2 c^2)}_{=1} x^2 - 2\underbrace{(\gamma^2 V + \alpha\beta c^2)}_{=0} xt + y^2 + z^2 = \underbrace{(\alpha^2 - \gamma^2 \frac{V^2}{c^2})}_{=1} c^2 t^2$$

to řeší např. volba: $\alpha = +\gamma$, $\beta = -\gamma\frac{V}{c^2}$ a *Lorentzův faktor* $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \geq 1}$

Speciální Lorentzova transformace

$$\boxed{x' = \gamma(x - Vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma(t - \tfrac{V}{c^2}x)}$$

Inverzní transformace musí mít díky principu relativity stejný tvar:
$x = \gamma'(x' - V't') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma'(t' - \frac{V'}{c^2}x')$
dosazením $V' = -V$ a $\gamma' = \gamma$ máme

$x = \gamma(x' + Vt') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma(t' + \frac{V}{c^2}x')$

Relativistické skládání rychlostí $x' = x'(x(t), t)$, $t = t(x'(t'), t')$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\gamma(\frac{dx}{dt} - V\frac{dt}{dt})}{\gamma(\frac{dt}{dt} - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt})} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(\frac{dt}{dt} - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt})} = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$$

Uvažujme nyní dvě události odehrávající se na ose x v místech x_1,x_2 a časech t_1,t_2 a označme jejich vzdálenost $\Delta x = x_2 - x_1$ ($\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$) a jejich časovou odlehlost $\Delta t = t_2 - t_1$.
Díky linearitě Lorentzovy transformace máme

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t) \qquad \Delta y' = \Delta y \qquad \Delta z' = \Delta z \qquad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \tfrac{V}{c^2}\Delta x)$$

Současnost ($\Delta t = 0$) a soumístnost ($\Delta x = 0$) jsou tedy relativní - závisí na volbě vztažné soustavy.

<u>Dilatace času</u>
Pro částici umístěnou v počátku soustavy S' zvolme jako události její vyslání a zachycení, které jsou v S' soumístné $\Delta x' = 0$, a určeme dobu po kterou cestovala $\Delta x = V\Delta t$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \tfrac{V}{c^2}V\Delta t) = \gamma(1 - \tfrac{V^2}{c^2})\Delta t = \sqrt{1 - \tfrac{V^2}{c^2}}\Delta t = \tfrac{\Delta t}{\gamma}$$

Vlastní čas τ (čas v klidové soustavě objektu, zde t') $\boxed{\tau = \sqrt{1 - \tfrac{V^2}{c^2}}\, t = \tfrac{t}{\gamma}}$

<u>Kontrakce délek</u>
Pro tyč ležící v klidu v soustavě S' podél osy x' zvolme jako události zaznamenání polohy jejích konců a určeme její délku. V soustavě S, vůči které se tyč pohybuje, musí být tyto události současné $\Delta t = 0$ proto

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t) = \gamma\Delta x \quad \Rightarrow \quad l' = \gamma l$$

Vlastní (klidová) délka l_0 (zde l') $\boxed{l = l_0\sqrt{1 - \tfrac{V^2}{c^2}} = \tfrac{l_0}{\gamma}}$

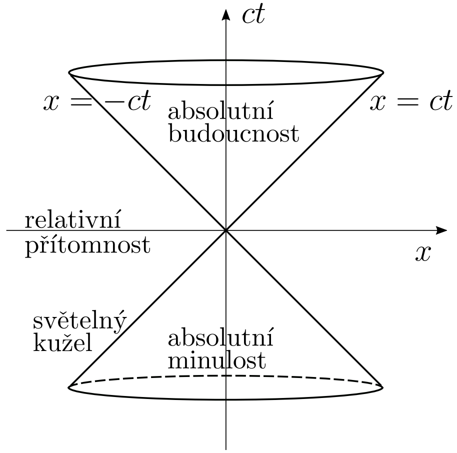
Současnost, soumístnost, vzdálenost, rychlost plynutí času jsou relativní. Co je absolutní? Která veličina nezávisí na volbě inerciální vztažné soustavy? Rychlost světla a interval $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2$.

Minkowského prostoročas (pseudoeuklidovský prostor $\mathbb{R}^4$)
Body prostoročasu, nazývané světobody, reprezentují události charakterizované místem a časem, Jsou popsány čtyřmi souřadnicemi $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ tzv. *čtyřvektoru polohy* x^μ, kde $\mu = 0, 1, 2, 3$.
Místo vzdálenosti je zde definován *prostoročasový interval* (přesněji kvadrát intervalu)

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

což je kvadratická forma signatury (1,3).

Prostoročasový diagram



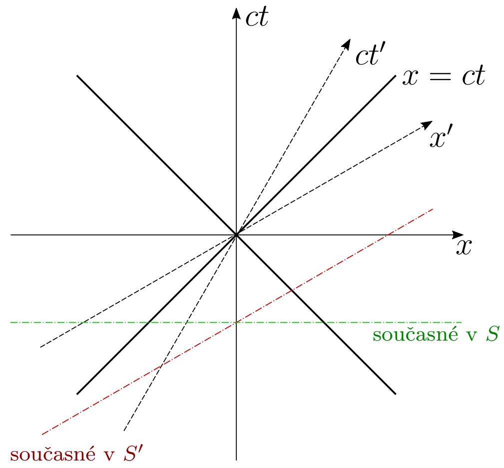
Interval se nazývá

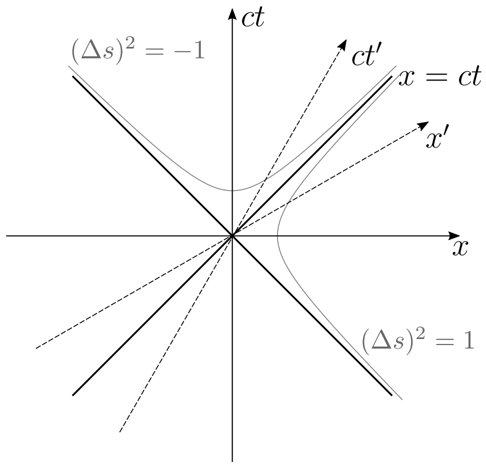
- časupodobný $(\Delta s)^2 > 0$ – spojuje kauzálně související události, lze najít IS ve kterém jsou tyto události soumístné
- světelný $(\Delta s)^2 = 0$ – spojuje události spočívající ve vyslání a přijetí světelného paprsku
- prostorupodobný $(\Delta s)^2 < 0$ – spojuje události, které nemohou být kauzálně spojeny protože pro ně existuje IS ve které jsou současné

Lorentzova transformace prostoročasového diagramu

Osa $x'^0 = ct'$ je určena rovnicí
$0 = x' = \gamma(x - Vt) = \gamma(x - \frac{V}{c}ct)$
tedy $ct = \frac{c}{V}x$.

Osa $x'^1 = x'$ je určena rovnicí
$0 = ct' = \gamma(ct - \frac{V}{c}x)$ tedy
$ct = \frac{V}{c}x$.





Transformace jednotek
Jednotky jsou určeny průsečíky křivek $(\Delta s)^2 = c^2t^2 - x^2 = \pm 1$ s osami souřadnic. Tyto křivky představují tzv. invariantní hyperboly - jejich rovnice jsou (díky invarianci intervalu $(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2$) v obou soustavách stejné.
$c^2t^2 - x^2 = (\Delta s)^2 = c^2t'^2 - x'^2$

Tenzorový počet

Tenzory umožňují zapsat zákony fyziky v tzv. kovariantním tvaru ve kterém se všechny členy rovnice transformují stejným způsobem. Rovnice, kde na obou stranách stojí tenzor stejného typu, bude mít stejný tvar ve všech inerciálních kartézských vztažných soustavách. Newtonovská mechanika $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$. Relativistická mechanika používá zápis pomocí čtyřvektorů.

Buď V vektorový prostor konečné dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$ s bázemi B a $\widetilde{B}$

$$B = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) \qquad \boxed{\widetilde{\boldsymbol{e}}_j = \boldsymbol{e}_i S^i_j} \qquad \boldsymbol{e}_k = \widetilde{\boldsymbol{e}}_j (S^{-1})^j_k \qquad \widetilde{B} = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \widetilde{\boldsymbol{e}}_n)$$

$S = (S^i_j)$ ... matice přechodu od B k $\widetilde{B}$

$V^* = \{\boldsymbol{\alpha} : V \to \mathbb{R} \,|\, \boldsymbol{\alpha} \text{ je lineární}\}$ ... duální vektorový prostor k V

$B^* = (\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n)$ ... duální báze k B ve V^* tj. $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j, \ \forall i, j \in \widehat{n}$

$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}_k) = \alpha_i \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_k) = \alpha_i \delta^i_k = \alpha_k$ ... složky funkcionálu v duální bázi

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}^i = \widetilde{\boldsymbol{e}}^i(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}^k = \widetilde{\boldsymbol{e}}^i(\widetilde{\boldsymbol{e}}_j (S^{-1})^j_k)\boldsymbol{e}^k = (S^{-1})^j_k \widetilde{\boldsymbol{e}}^i(\widetilde{\boldsymbol{e}}_j)\boldsymbol{e}^k = (S^{-1})^j_k \delta^i_j \boldsymbol{e}^k = (S^{-1})^i_k \boldsymbol{e}^k$$

Vektor

$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = \widetilde{v}^j \widetilde{\boldsymbol{e}}_j = \widetilde{v}^j \boldsymbol{e}_i S^i_j$

$v^i = S^i_j \widetilde{v}^j$

$\boxed{\widetilde{v}^k = (S^{-1})^k_i v^i}$ **kontravariantní**

Kovektor (funkcionál, 1-forma)

$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i \boldsymbol{e}^i = \widetilde{\alpha}_j \widetilde{\boldsymbol{e}}^j$

$\widetilde{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_j) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}_i S^i_j) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}_i) S^i_j = \alpha_i S^i_j$

$\boxed{\widetilde{\alpha}_j = \alpha_i S^i_j}$ **kovariantní**

<u>Př.</u> $\quad \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}) = \alpha_i \boldsymbol{e}^i(v^j \boldsymbol{e}_j) = \alpha_i v^j \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \alpha_i v^j \delta^i_j = \alpha_i v^i =: \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{v} \rangle$

<u>Pozn</u>. Vektorové prostory V a V^* mají stejnou konečnou dimenzi a jsou tedy izomorfní. Žádný z jejich izomorfizmů však není nijak význačný (kanonický) - "nezávislý na volbě báze" a proto je nelze bez dodatečné struktury definované na V jednoznačně (kanonicky) ztotožnit. Prostory V a $(V^*)^*$ již ztotožnit lze, neboť mezi nimi existuje *kanonický izomorfizmus*:

$f : V \to (V^*)^*$ definovaný vztahem $f(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v})$.

Ztotožníme $\boldsymbol{v} \equiv f(\boldsymbol{v})$, pak $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$

Obdobně lze ztotožňovat i duály vyšších řádů $V^* \cong V^{***}$, $V^{**} \cong V^{****}$.

Celkem tedy máme k dispozici následující objekty:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha} \in V^*, \ \boldsymbol{\alpha} : V \to \mathbb{R}, \ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{v} \rangle \\ \boldsymbol{v} \in V, \ \ \boldsymbol{v} : V^* \to \mathbb{R}, \ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \\ a \in \mathbb{R}, \ a : \emptyset \mapsto a \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{Všechno jsou to lineární zobrazení.}$$

Tenzor

Tenzorem typu $\binom{p}{q}$ nad V (kontravariantním řádu p a kovariantním řádu q) nazýváme každé multilineární (lineární v každé složce) zobrazení

$$T : V^p_q = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{\text{q–krát}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{\text{p–krát}} \to \mathbb{R}.$$

Řádem tenzoru nazýváme číslo $p + q$.

Složky tenzoru

Tenzor je lineární zobrazení a proto je jednoznačně určen svými hodnotami na bázi V^p_q, které nazýváme složky tenzoru T vzhledem k bázi B

$$T^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} := T(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_q}; \boldsymbol{e}^{j_1}, \dots, \boldsymbol{e}^{j_p}).$$

Transformace složek

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} &= T(\widetilde{\boldsymbol{e}}_{i_1}, \dots, \widetilde{\boldsymbol{e}}_{i_q}; \widetilde{\boldsymbol{e}}^{j_1}, \dots, \widetilde{\boldsymbol{e}}^{j_p}) = \\ &= T(\boldsymbol{e}_{k_1} S^{k_1}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{k_q} S^{k_q}_{i_q}; (S^{-1})^{j_1}_{l_1} \boldsymbol{e}^{l_1}, \dots, (S^{-1})^{j_p}_{l_p} \boldsymbol{e}^{l_p}) = \\ &= (S^{-1})^{j_1}_{l_1} \ldots (S^{-1})^{j_p}_{l_p} T(\boldsymbol{e}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{k_q}; \boldsymbol{e}^{l_1}, \dots, \boldsymbol{e}^{l_p}) S^{k_1}_{i_1} \ldots S^{k_q}_{i_q} = \\ &= (S^{-1})^{j_1}_{l_1} \ldots (S^{-1})^{j_p}_{l_p} T^{l_1 \ldots l_p}_{k_1 \ldots k_q} S^{k_1}_{i_1} \ldots S^{k_q}_{i_q} \end{aligned}$$

Sčítání tenzorů a násobení číslem

$$(T + aR)(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, ..., \boldsymbol{\alpha}^p) = T(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, ..., \boldsymbol{\alpha}^p) + aR(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, ..., \boldsymbol{\alpha}^p)$$

Ve složkách $\qquad (T + aR)^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} = T^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} + aR^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} \qquad a \in \mathbb{R}$

Množina všech tenzorů typu $\binom{p}{q}$ tvoří vektorový pr. $T^p_q(V)$ dimenze n^{p+q}.

$T^0_0(V) = \mathbb{R} \qquad T^1_0(V) = V^{**} \equiv V \qquad T^0_1(V) = V^*$

$T^1_1(V) \cong Hom(V, V) \qquad T^0_2(V)$... bilineární formy na V

Tenzorový součin*

je zobrazení $\otimes : T^p_q(V) \times T^r_s(V) \to T^{p+r}_{q+s}(V)$ definované předpisem

$$(T \otimes R)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{q+s}; \boldsymbol{\alpha}^1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{p+r}) := T(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^p) \cdot R(\boldsymbol{v}_{q+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{q+s}; \boldsymbol{\alpha}^{p+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{p+r}).$$

Ve složkách $\quad (T \otimes R)^{j_1 \ldots j_{p+r}}_{i_1 \ldots i_{q+s}} = T^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} \cdot R^{j_{p+1} \ldots j_{p+s}}_{i_{q+1} \ldots i_{q+s}}$

Tenzorový součin je bilineární, asociativní a nekomutativní.

$\{\boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}^{i_q} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{j_p} | i_k, j_l \in \widehat{n}, \forall k \in \widehat{q}, \forall l \in \widehat{p}\}$ je báze pr. $T^p_q(V)$.

Pozn.* Vektorový prostor $T(V) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T^r_s(V)$ tvoří spolu s tenzorovým součinem $\otimes : T(V) \times T(V) \to T(V)$ (dodefinovaným pomocí bilinearity) asociativní algebru nazývanou tenzorová algebra vektorového prostoru V.
Př. Vnější součin pro 1–formy: $\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}^j = \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j - \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^i$.

Kontrakce tenzorů*

Je zobrazení $C^b_a : T^p_q(V) \to T^{p-1}_{q-1}(V)$ určené výběrem $a \in \widehat{q}, b \in \widehat{p}$ a definované předpisem $T \mapsto C^b_a T := \sum T(\ldots, \underbrace{\boldsymbol{e}_k}_{a}, \ldots; \ldots, \underbrace{\boldsymbol{e}^k}_{b}, \ldots)$.

Ve složkách je výsledek $\delta^{i_a}_{j_b} T^{j_1 \ldots j_b \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_a \ldots i_p} = T^{j_1 \ldots i_a \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_a \ldots i_p}$

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\alpha}) &= T(v^k \boldsymbol{e}_k; \alpha_l \boldsymbol{e}^l) = v^k \alpha_l T(\boldsymbol{e}_k; \boldsymbol{e}^l) = T^j_i \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j (v^k \boldsymbol{e}_k; \alpha_l \boldsymbol{e}^l) = \\ &= T^j_i v^k \alpha_l \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j (\boldsymbol{e}_k; \boldsymbol{e}^l) = T^j_i v^k \alpha_l \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{e}^l) = T^j_i v^k \alpha_l \delta^i_k \delta^l_j = \\ &= T^l_k v^k \alpha_l = T \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l; \boldsymbol{e}^l, \boldsymbol{e}^k) = C^1_1 C^2_1 (T \otimes \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}$$

Invariantní tenzory

Buď $G \subset GL(n)$ podgrupa. Tenzor T se nazývá G–invariantní, pokud se jeho složky nemění při změně báze $\widetilde{\boldsymbol{e}}_j = \boldsymbol{e}_i S^i_j$, $\forall S \in G$.

- tenzory nultého řádu (skaláry) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}) = \alpha_i v^i$, $\quad T^i_i = \delta^i_j T^j_i$
  (vyčíslení tenzoru na vektorech a kovektorech je nezávislé na bázi)
- jednotkový tenzor $\hat{1} \in T^1_1(V)$ definovaný předpisem $\hat{1}(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v})$
  $\hat{1} = \delta^i_j \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}_i = \sum \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_i$, $\qquad C\hat{1} = n = \dim V$
  –jediný (až na násobky) invariantní tenzor druhého řádu,
- mocniny jednotkového tenzoru $\hat{1} \otimes \hat{1}$

Místo G–invariantní se říká invariantní, je–li zřejmé o jakou grupu G jde (zde $G = GL(n)$).

Pokud je na V definovaná vhodná dodatečná struktura (nedegenerovaná bilineární forma například skalární součin nebo symplektická forma) lze ji využít k definici izomorfizmu $V \to V^*$ a tyto prostory ztotožnit.

(Pseudo)metrický tenzor

Metrický tenzor na V je každý symetrický nedegenerovaný tenzor typu $\binom{0}{2}$.

$g \in T^0_2(V) \quad g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = g(v^i \boldsymbol{e}_i, w^j \boldsymbol{e}_j) = v^i w^j g(e_i, e_j) = v^i g_{ij} w^j = \vec{v}^T (g_{ij}) \vec{w}$

- symetrický $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \qquad g_{ij} = g_{ji}$
- nedegenerovaný $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in V \ \Rightarrow \boldsymbol{v} = 0 \qquad \det(g_{ij}) \neq 0$

Pro každou symetrickou formu $B \in T^0_2(V)$ existuje báze (polární báze, ortonormální báze) ve které má její matice tvar
$(B_{ij}) = (B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{u})$.

Nedegenerovanost B znamená $u = 0$.
Kanonický tvar metrického tenzoru $(g_{ij}) = (\eta_{ij}) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{s})$.
Je–li $s > 0$ je g tzv. pseudometrický tenzor.
Je–li $r = n$ je g skalární součin.

Zvedání a snižování indexů

Buď (g^{ij}) matice inverzní k matici (g_{ij}) pak platí

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k, \qquad g^{ij} = g^{ji}, \qquad \det(g^{ij}) \neq 0$$

a $g^{-1} = g^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \in T^2_0(V)$ je nedegenerovaný symetrický tenzor typu $\binom{2}{0}$.

Pomocí g a g^{-1} definujeme (kanonické) izomorfizmy mezi V a V^*

- snižování indexů $\flat_g : V \to V^* \qquad \boldsymbol{v} \mapsto \flat_g(\boldsymbol{v}) = g(\,.\,, \boldsymbol{v})$
  $$v_i := (\flat_g(\boldsymbol{v}))_i = g_{ij} v^j$$
- zvedání indexů $\sharp_g : V^* \to V \qquad \boldsymbol{\alpha} \mapsto \sharp_g(\boldsymbol{\alpha}) = g^{-1}(\,.\,, \boldsymbol{\alpha})$
  $$\alpha^i := (\sharp_g(\boldsymbol{\alpha}))^i = g^{ij} \alpha_j$$

v_i se nazývají kovariantní a v^i kontravariantní složky vektoru $\boldsymbol{v}$.
Je-li diagonála g pozitivně definitní $(r = n)$ pak $v^i = v_i$ (v O.N. bázi).

Pro tenzory $T^i_j = g^{ik} T_{kj} = g_{jk} T^{ik}$

Pro tenzory vyšších řádů obdobně $T_{n.jl}^{\ .i} = g^{ik} T_{nkjl}$.

Newtonovská mechanika

- euklidovský afinní prostor $E(3) = (\mathbb{R}^3, g_{ij})$
- Metrický tenzor v O.N. bázi $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (g^{ij})$
- čas je nezávislý všude stejně plynoucí parametr
- vektor $\vec{x} = (x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x^i)$
- Einsteinova sumace dvakrát opakující se Latinské indexy od 1 do 3
- Skalární součin

  $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g_{ij} x_i y_j = \vec{x}^T (g_{ij}) \vec{y} \overset{\text{O.N.B.}}{=} \vec{x} \cdot \vec{y}$
- Kvadrát velikosti (polára skalárního součinu)
  $(\Delta l)^2 = g_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \overset{\text{O.N.B.}}{=} (\Delta x_i)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$
- Grupy symetrii prostoru $E(3)$
  - Ortogonální grupa $O(3)$ – zrcadlení a rotace zaměření $\vec{E}(3)$
  - Euklidova grupa $E_3 \cong \mathbb{R}^3 \rtimes O(3)$ – zrcadlení, rotace a translace
- Grupy symetrii prostoru rozšířeného o časovou osu $\mathbb{R} \times E(3)$
  - Homogenní Galileiho grupa $\mathbb{R}^3 \rtimes O(3)$ – homogenní Galileiho tr.
  - Galileiho grupa $Gal(3) \cong \mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes O(3))$ – translace a hom. G. tr.

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T & t_0 \\ \vec{V} & S & \vec{x}_0 \\ 0 & \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + t_0 \\ \vec{V} t + S\vec{x} + \vec{x}_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Relativistická mechanika

- Minkowského prostoročas pseudo-euklidovský afinní $E(1,3) = (\mathbb{R}^4, g_{\mu\nu})$
- Metrický tenzor v O.N. bázi $(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu})$
- čas je “jen jedna ze součadnic”
- čtyřvektor $\underset{\text{kontravariantní}}{(x^\mu)} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\underset{\text{kovariantní}}{(x_\mu)} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$
- Einsteinova sumace pře shodný horní a dolní Řecký index od 0 do 3
- Pseudo–skalární součin
  $g(X, Y) = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\nu y^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = (x^\mu)^T (g_{\mu\nu})(y^\nu)$
  $\overset{\text{O.N.B.}}{=} x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$
- Kvadrát intervalu
  $(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta x^\mu \Delta x_\nu$
  $\overset{\text{O.N.B.}}{=} c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$
- Grupy symetrii prostoru $E(1,3)$
  - Lorentzova grupa $O(1,3)$
    – lineární izometrie zaměření Minkowského prostoročasu
    – zrcadlení, rotace a boosty
  - Poincarého grupa $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(1,3)$ (nehomogenní Lorentzova grupa)
    – afinní izometrie Minkowského prostoročasu
    – zrcadlení, rotace, boosty a translace

Lorentzova Grupa $O(1,3)$

Lorentzovy transformace jsou symetrie zaměření Minkowského prostoročasu $E(1,3)$, tedy regulární lineární zobrazení zachovávající metrický tenzor $g_{\mu\nu}$.

Transformace

$x'^{\mu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ $\qquad A = (\alpha^{\mu}{}_{\nu}) = S^{-1}$ $\qquad G = (g_{\mu\nu}) \overset{\text{ON.B.}}{=} \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

Invariance $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} \overset{\downarrow}{=} g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} S^{\rho}_{\mu} S^{\sigma}_{\nu} \qquad \forall \mu,\nu = 0,1,2,3 \quad /\alpha^{\mu}{}_{\kappa}\alpha^{\nu}{}_{\eta} \qquad \boxed{g_{\kappa\eta} = g_{\mu\nu}\alpha^{\mu}{}_{\kappa}\alpha^{\nu}{}_{\eta}}$$

Aktivně (zachovávají interval) $\forall X \in \vec{E}(1,3)$ Relace ortogonality

$$X^T G X = s^2 \overset{\downarrow}{=} s'^2 = X'^T G X' = (AX)^T G (AX) = X^T A^T G A X \qquad \boxed{G = A^T G A}$$

Pseudo-ortogonální grupa $O(1,3) = \{A \in \mathbb{R}^{4,4} \mid A^T G A = G\}$

Je podgrupa $GL(4)$ s operací součin matic a jednotkou $\mathbb{1}_4 = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$.

$A, B \in O(1,3) \Rightarrow (AB)^T G (AB) = B^T (A^T G A) B = B^T G B = G$

inverzní prvek $A^{-1} = G^{-1} A^T G = G A^T G$ $\qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Struktura $O(1,3)$

$O(1,3)$ má čtyři komponenty souvislosti (maximální souvislé podmnožiny)

$\det G = \det A^T \det G \det A = \det G (\det A)^2 \Rightarrow (\det A)^2 = 1$

- $\det A = 1$ vlastní Lorentzovy transformace – podgrupa $SO(1,3)$
- $\det A = -1$ nevlastní L.T.

$g_{00} = g_{\mu\nu}\alpha^{\mu}{}_{0}\alpha^{\nu}{}_{0} = (\alpha^{0}{}_{0})^2 - (\alpha^{1}{}_{0})^2 - (\alpha^{2}{}_{0})^2 - (\alpha^{3}{}_{0})^2$

$(\alpha^{0}{}_{0})^2 = 1 + (\alpha^{1}{}_{0})^2 + (\alpha^{2}{}_{0})^2 + (\alpha^{3}{}_{0})^2 \geq 1$

- $\alpha^{0}{}_{0} \geq 1$ ortochronní L.T. (nemění směr času) – podgrupa $O^+(1,3)$
- $\alpha^{0}{}_{0} \leq 1$ neortochronní L.T.

Vlastní ortochronní Lorentzova grupa $SO^+(1,3)$

je komponenta souvislosti $O(1,3)$ obsahující jednotku ($\det A = 1, \alpha^{0}{}_{0} \geq 1$)

je normální podgrupa v $O(1,3)$ $\qquad O(1,3)/SO^+(1,3) = \{\mathbb{1}, P, T, PT\}$

$P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ $\qquad T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ $\qquad PT = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1)$

$Q(1,3) = SO^+(1,3) \cup PSO^+(1,3) \cup TSO^+(1,3) \cup PTSO^+(1,3)$

Podgrupy $SO^+(1,3)$

Relace ortogonality $g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma}\alpha^{\rho}{}_{\mu}\alpha^{\sigma}{}_{\nu}$, $\forall \mu,\nu = 0,1,2,3$ jsou symetrické vzhledem k $\mu \leftrightarrow \nu$ a představují proto pouze 10 nezávislých rovnic pro 16 neznámých $\alpha^{\rho}{}_{\sigma}$ (relace ortogonality pro čtyři sloupce matice A tj. 4+3+2+1=10 rovnic). Jejich řešení závisí na $16 - 10 = 6$ parametrech. $O(1,3)$ resp. $SO^+(1,3)$ je tedy šestidimenzionální podvarieta v $\mathbb{R}^{16}$.

- tři parametry odpovídají grupě prostorových rotací

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathrm{M} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \text{kde } M \in SO(3)$$

- tři parametry odpovídají speciálním L.T. (boostům) ve směru os – tři 1-parametrické podgrupy např.

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\mu & -\sinh\mu & 0 & 0 \\ -\sinh\mu & \cosh\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(\mu)$$

$A(\mu_1)A(\mu_2) = A(\mu_1 + \mu_2)$.

Matice odpovídající boostům jsou vždy symetrické (naopak to neplatí). Složení dvou boostů v různých směrech není boost, ale boost a prostorová rotace (Thomasova precese). Proto boosty obecně grupu netvoří.

Rapidita μ

V částicové fyzice se používá pro popis pohybu (aktivní transformace).

$$\boxed{\mathrm{tgh}\,\mu = \beta = \tfrac{V}{c}} \qquad \beta \to 1 \Leftrightarrow \mu \to +\infty$$

$$\cosh^2\mu - \sinh^2\mu = 1 \qquad \cosh\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tgh}^2\mu}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

$$1 - \mathrm{tgh}^2\mu = \frac{1}{\cosh^2\mu} \qquad \sinh\mu = \cosh\mu\,\mathrm{tgh}\,\mu = \beta\gamma$$

Poincarého grupa $\mathbb{R}^4 \rtimes O(1,3)$

afinní transformace $x'^{\mu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + b^{\mu}$ (nehomogenní Lorentzovy transformace)

$(b_1, A_1)\cdot(b_2, A_2) = (b_1 + A_1 b_2, A_1 A_2)$ polopřímý součin grup $\mathbb{R}^4 \times O(1,3)$

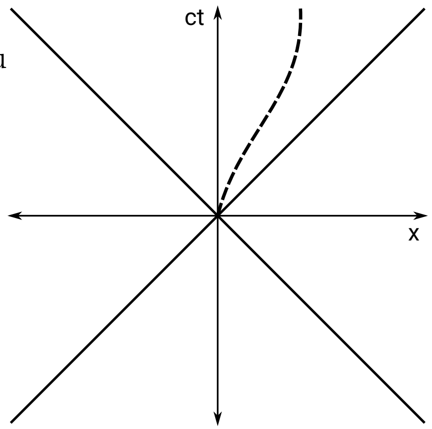
10–parametrická grupa

Relativistické zobecnění Newtonových pohybových rovnic

Cílem je najít rovnice popisující pohyb relativistické částice v Minkowského prostoročase, tak aby byly kovariantní (invariantní co do tvaru vzhledem k L.T.) a pro $v << c$ přecházely na rovnice Newtonovy.

Světočára

Je křivka v Minkowského prostoročase jejíž body jsou události odpovídající pohybovým stavům částice (obdoba trajektorie částice). Parametrizována bude invariantním vlastním časem částice. Uvažujeme pouze hmotné částice, které se pohybují po časupodobných světočárách. Každé dva body světočáry budou spojeny časupodobným intervalem $(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2 > 0$. V každém infinitesimálním časovém úseku lze považovat rychlost částice za konstantní, spojit s částicí tzv. okamžitou klidovou inerciální soustavu a postulovat $dt = \gamma d\tau$



$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} \qquad \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

Čtyřvektory

Jsou prvky ze zaměření Minkowského prostoročasu. Při Lorentzových transformacích se transformují stejně jako čtyřvektor polohy:

$$\boxed{x'^{\mu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}} \qquad A = (\alpha^{\mu}{}_{\nu}) \in O(1,3) \qquad x^{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Ke každému čtyřvektoru přísluší invariant (obdoba velikosti). Pro čtyřvektor polohy je to interval:

$$s^2 = g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = x^{\mu}x_{\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = c^2t^2 - \vec{x}^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Další čtyřvektory získáme

- derivací čtyřvektoru podle skaláru (invariantu)
- násobením čtyřvektoru skalárem

Čtyřrychlost

Z vzorců pro relativistické skládání rychlostí plyne, že složky vektoru rychlosti nemohou být složkami čtyřrychlosti, netransformovaly by se správně. Čtyřrychlost tedy nemůže být derivací čtyřpolohy podle souřadnicového času t. Bude to derivace podle invariantního vlastního času τ.

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \qquad u'^{\mu} = \frac{\mathrm{d}\,x'^{\mu}}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{\mathrm{d}(\alpha^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu})}{\mathrm{d}\,\tau} = \alpha^{\mu}{}_{\nu}\frac{\mathrm{d}\,x^{\nu}}{\mathrm{d}\,\tau} = \alpha^{\mu}{}_{\nu}u^{\nu}$$

Invariant

$u^{\mu}u_{\mu} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \gamma\begin{pmatrix} c \\ -\vec{v} \end{pmatrix} = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = c^2 > 0$ časupodobný čtyřvektor

Čtyřhybnost

definujeme jako součin invariantu m_0 (klidové hmotnosti) s čtyřrychlostí:

$p^{\mu} = m_0u^{\mu} = \gamma\begin{pmatrix} m_0c \\ m_0\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

Relativistická hmotnost (charakterizuje setrvačný odpor vůči urychlování)

$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Relativistická hybnost $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Invariant

$p^{\mu}p_{\mu} = m_0^2c^2 > 0$ časupodobný čtyřvektor

Čtyřzrychlení

$$w^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \frac{du^{\mu}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{du^{\mu}}{dt} = \begin{pmatrix} \gamma^4c^{-1}\vec{v}\cdot\vec{a} \\ \gamma^2\vec{a} + \gamma^4c^{-2}(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v} \end{pmatrix}$$

Invariant

$w^{\mu}w_{\mu} = -\gamma^4\vec{a}^2 - \gamma^6c^{-2}(\vec{v}\cdot\vec{a})^2 < 0$ prostorupodobný čtyřvektor

Derivací invariantu čtyřrychlosti dostaneme

$$0 = \frac{dc^2}{d\tau} = \frac{du^{\mu}u_{\mu}}{d\tau} = \frac{du^{\mu}}{d\tau}u_{\mu} + u^{\mu}\frac{du_{\mu}}{d\tau} = w^{\mu}u_{\mu} + u^{\mu}w_{\mu} = 2w^{\mu}u_{\mu}$$

čtyřzrychlení je “4-kolmé” na čtyřrychlost

Relativistické pohybové rovnice

Rovnice napíšeme tak, aby byly kovariantní vůči Lorentzovým transformacím $A = (\alpha^\mu{}_\nu) \in O(1,3)$.

čtyřsíla

$$\frac{\mathrm{d}\,p'^\mu}{\mathrm{d}\,\tau} = K'^\mu \qquad \frac{\mathrm{d}\,\alpha^\mu{}_\nu p^\nu}{\mathrm{d}\,\tau} = \alpha^\mu{}_\nu K^\nu \ /(\alpha^{-1})^\sigma{}_\mu \qquad \frac{\mathrm{d}\,p^\mu}{\mathrm{d}\,\tau} = K^\mu \qquad K^\mu = \begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

Prostorové složky čtyřsíly získáme z principu korespondence ($\frac{v}{c} \to \infty$):

$$\frac{\mathrm{d}\,p^\mu}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{\mathrm{d}\,p^\mu}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau} = \gamma\frac{dp^\mu}{dt} \qquad \gamma\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = \gamma\vec{F} = \vec{K}$$

Nultou složku čtyřsíly získáme pomocí čtyřvýkonu:

$$\left.\begin{aligned} K^\mu u_\mu &= K^0\gamma c - \gamma^2\vec{F}\cdot\vec{v} \\ K^\mu u_\mu &= \tfrac{d(m_0 u^\mu)}{d\tau}u_\mu = \tfrac{\mathrm{d}\,m_0}{\mathrm{d}\,\tau}u^\mu u_\mu + m_0 w^\mu u_\mu = c^2\tfrac{\mathrm{d}\,m_0}{\mathrm{d}\,\tau} = 0 \end{aligned}\right\} \quad K^0 = \tfrac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\gamma}{c}\tfrac{\mathrm{d}\,E}{\mathrm{d}\,t} &= \gamma\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\tfrac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \tfrac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} \\ \gamma\tfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} &= \gamma\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\tfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \gamma\vec{F} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\mathrm{d}\,p^\mu}{\mathrm{d}\,\tau} = K^\mu \qquad K^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} \\ \gamma\vec{F} \end{pmatrix}$$

Energie

Z rovnice pro nultou složky čtyřsíly:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\,E}{\mathrm{d}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \text{konst.}$$

konst. = 0...Einstein 1905 (později potvrzeno experimenty)

$$\boxed{E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Kinetická energie

$$\begin{aligned} E_{Kin} &= E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 \stackrel{Taylor}{=} m_0c^2\left(1 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{v}{c})^2 + \tfrac{3}{8}(\tfrac{v}{c})^4 + \dots\right) - m_0c^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m_0v^2 + \tfrac{3}{8}v^2(\tfrac{v}{c})^2 + \dots \qquad \text{Taylorův rozvoj ve } (\tfrac{v}{c}) \end{aligned}$$

Vztah energie a hybnosti

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad m_0^2c^2 = p^\mu p_\mu = \left(\tfrac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}\cdot\vec{p} \qquad \boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

Pro foton s frekvencí ν

$$E = h\nu \qquad p_f = \tfrac{E}{c} = \tfrac{h\nu}{c} \qquad p_f^\mu = \tfrac{h\nu}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{s} \end{pmatrix} \qquad |\vec{s}| = 1$$

Srážky a rozpady částic

- Zkoumáme pouze asymptotické stavy, srážku považujeme za bodovou a částice v dostatečné vzdálenosti od místa srážky za neinteragující.
- Splňují zákon zachování čtyřhybnosti (důsledek kvantové teorie pole, částice jsou excitace pole a to je invariantní vůči translaci).
- Při počítání využíváme zákon zachování celkové čtyřhybnosti (energie a hybnosti) soustavy a invariantu čtyřhybnosti

$$P^\mu_{\text{před}} = \text{konst.} = P^\mu_{\text{po}} \qquad p^\mu p_\mu = m_0^2c^2.$$

Hmotnostní defekt

je rozdíl mezi součtem klidových hmotností jednotlivých částí soustavy (nukleonů) a klidové hmotnosti vázané soustavy (atomového jádra).
Celková energie izolované soustavy je konstantní, ale může se měnit její forma (např. nepružná srážka částic).
Klidová energie vázané soustavy:

- klidová energie jednotlivých částí
- kinetická energie jednotlivých částí
- energie vzájemné interakce částí

Vazebná energie soustavy $B = \sum_{i=1}^n E_{0i} - E_0^{celk}$
$B > 0$ energie se uvolňuje při syntéze (fúze lehkých jader)
$B < 0$ energie se uvolňuje při štěpení (štěpení těžkých jader)
Deuteron (těžký vodík) ${}^2_1$H – vodík s jedním protonem a jedním neutronem
$m_d = m_p + m_n - \frac{B}{c^2} < m_p + m_n$

Lagrangeův a Hamiltonův formalizmus pro relativistickou částici

Zkonstruujeme akci pro volnou bezsilovou hmotnou ($m_0 > 0$) částici, tak aby

- byla stejná pro pozorovatele ve všech inerciálních vztažných soustavách (tj. relativisticky invariantní)
- pro $v << c$ "přecházela" na nerelat. akci $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_0 v^2\,\mathrm{d}t$.

Invariantem je interval resp. vlastní čas

$$\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau = c\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{t} \doteq c(1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{v^2}{c^2} + \ldots)\,\mathrm{d}t$$

Aby akce přecházela v nerelativistickou, definujeme ji jako vhodný násobek "délky" světočáry

$$-m_0 c\,\mathrm{d}s = (-m_0c^2 + \tfrac{1}{2}m_0v^2 + \ldots)\,\mathrm{d}t$$

Akce pro volnou bezsilovou částici

$$S_0 = \int_1^2 (-m_0c)\,\mathrm{d}s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} -m_0c^2\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{L_0}\,\mathrm{d}t$$

Lagrangeova funkce pro volnou bezsilovou částici

$$\boxed{L_0(\vec{v}) = -m_0c^2\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}}$$

Obecná hybnost (zde odpovídá relativistické hybnosti)

$$\vec{p} = \frac{\partial L_0}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad p_i = \frac{\partial L_0}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v_j^2}{c^2}}\right) = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v_j^2}{c^2}}}$$

Pro částici v poli s potenciálem $U(\vec{x},t)$

$$L(\vec{x},\vec{v},t) = -m_0c^2\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} - U(\vec{x},t) \qquad \text{kde} \quad \vec{v} = \dot{\vec{x}}$$

Lagrangeovy rovnice jsou relativistické pohybové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{F}$$

Hamiltonova funkce

Obecná energie

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\cdot\vec{v} - L = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\vec{v} - \left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - U\right) = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + U$$

Vyjádření rychlostí pomocí hybností

$$p_i = \frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad p^2 = \frac{m_0^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad p^2c^2 - p^2v^2 = m_0^2c^2v^2 \qquad v^2 = \frac{p^2c^2}{p^2+m_0^2c^2}$$

$$v_i = \frac{p_i}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{p_i}{m_0}\sqrt{1-\frac{p^2}{p^2+m_0^2c^2}} = \frac{p_i}{m_0}\sqrt{\frac{m_0^2c^2}{p^2+m_0^2c^2}} = \frac{p_ic}{\sqrt{p^2+m_0^2c^2}}$$

Hamiltonova funkce

$$\boxed{H(\vec{x},\vec{p},t) = c\sqrt{p^2+m_0^2c^2} + U(\vec{x},t)}$$

Pro nabitou částici v elmag. poli s potenciály $\varphi = \varphi(\vec{x},t)$ a $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x},t)$

Lagrangeova funkce

$$\boxed{L = -m_0c^2\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} - q(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A})}$$

Obecná hybnost (různá do relativistické hybnosti)

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\vec{A} \qquad (\vec{p}-q\vec{A})^2 = \frac{m_0^2v^2c^2}{c^2-v^2} \qquad v^2 = \frac{(\vec{p}-q\vec{A})^2c^2}{m_0^2c^2+(\vec{p}-q\vec{A})^2}$$

Obecná energie

$$\mathcal{E} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\vec{v} + q\vec{A}\cdot\vec{v} - \left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q(\varphi-\vec{v}\cdot\vec{A})\right) = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi$$

Hamiltonova funkce

$$\boxed{H = c\sqrt{(\vec{p}-q\vec{A})^2 + m_0^2c^2} + q\varphi}$$

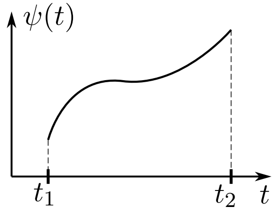
Lagrangeův formalizmus v teorii pole

V STR nelze interakci mezi částicemi popsat pomocí potenciálů (z důvodu konečné rychlosti šíření interakce). Soustavu interagujících částic je potřeba doplnit o další fyzikální objekt (silové pole) s vlastními stupni volnosti, který tuto interakci zprostředkuje.
Pole resp. soustavu polí popíšeme sadou hladkých funkcí $q_a(x^\mu)$, $a = 1, \ldots, n$ – obecných souřadnic polí na prostoročasu

Pohyb nerelativistické částice přímce - motivace

$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - U(x)\,\mathrm{d}t = \int_{\langle t_1, t_2\rangle} \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - U(\psi)\,\mathrm{d}t$

Speciální případ pole na 1–dimenzionálním prostoročasu odpovídající historii částice.



Pro částice	Pro pole
t	x^μ
$q_i(t)$	$q_a(x^\mu)$
$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,\mathrm{d}t$	$S[q_a(x^\mu)] = \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)\,\mathrm{d}V^*$

Akce pro pole

$$\boxed{S[q_a(x^\mu)] = \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)\,\mathrm{d}V^*} \qquad \text{kde } q_{a,\nu} = \frac{\partial q_a}{\partial x^\nu} = \partial_\nu q_a$$

je objemový integrál přes čtyřrozměrnou oblast V^* s objemovým elementem

$$\mathrm{d}V^* = \mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 = c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V$$

z hustoty Lagrangeovy funkce – lagrangiánu $\mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)$.

Speciálně pro $V^* = \langle ct_1, ct_2\rangle \times V$ $\qquad S = \int_{V^*} \mathcal{L}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \mathcal{L}\,\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t$

Divergenční věta

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega \mathrm{d}\omega$$

Ω, $M \ldots$ k-rozměrné variety v $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega} \subset M$ kompaktní
$\partial\Omega \ldots$ hranice Ω v M s orientací pomocí vnější normály
$\omega \in C^1(\overline{\Omega}) \ldots$ (k-1)-forma, $\mathrm{d}\omega$ její vnější derivace (k-forma)

Hamiltonův princip pro pole

Skutečný časový vývoj soustavy polí se děje s takovou závislostí q_a na x^μ, pro kterou akce S nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím $\delta q_a(x^\mu)$ splňujícím podmínku pevných konců, která požaduje nulovost variací na hranici ∂V^* oblasti V^* tj. $\delta q_a(x^\mu)|_{\partial V^*} = 0$.

Rovnice pole

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{c} \int_{V^*} \delta\mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)\,\mathrm{d}V^* = \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_{a,\nu}\right]\mathrm{d}V^* \\
&= \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_a\right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)\delta q_a\right]\mathrm{d}V^* \\
&= \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)\delta q_a\right]\mathrm{d}V^* + \frac{1}{c} \int_{V^*} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_a\right)\mathrm{d}V^* \\
&= \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)\right]\delta q_a\,\mathrm{d}V^* + \frac{1}{c} \int_{\partial V^*} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_a\right)\mathrm{d}f_\nu
\end{aligned}$$

Lagrangeovy rovnice pro soustavu polí v Minkowského prostoročase

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0 \qquad \forall a \in \widehat{n}$$

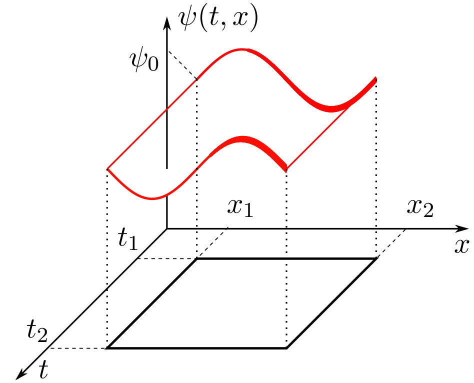
$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ je derivace složených funkcí podle řetězového pravidla

$$q_{a,0} = \frac{\partial q_a}{\partial x^0} = \frac{\partial q_a}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x^0} = \frac{1}{c} q_{a,t} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,0}} = c\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,t}} \qquad \frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,0}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,t}}$$

Homogenní struna

Jednorozměrné pole na $q_1 = \psi = \psi(t, z)$ na dvourozměrném prostoročasu.

$\rho \ldots$ lineární hustota struny
$T \ldots$ síla napínající strunu
Hustota kinetické energie $\kappa = \frac{1}{2}\rho\psi_t^2$
Hustota potenciální energie $u = \frac{1}{2}T\psi_z^2$
$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad \psi_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$
Hustota Lagrangeovy funkce
$\mathcal{L}(\psi_t, \psi_z) = \kappa - u = \frac{1}{2}\rho\psi_t^2 - \frac{1}{2}T\psi_z^2$



Pohybové rovnice pole

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_z}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$$

Vlnová rovnice pro strunu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi_t) + \frac{\partial}{\partial z}(T\psi_z) - 0 = \rho\psi_{tt} - T\psi_{zz} = 0 \implies \rho\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Nejednoznačnost lagrangiánu $\mathcal{L}$

Hustota Lagrangeovy funkce je pro dané pole určena až na divergenci libovolného čtyřvektoru $F^\mu(q_a, x^\nu)$. Lagrangiány $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial F^\mu(q_a, x^\nu)}{\partial x^\mu}$ vedou na stejné rovnice pole.

$$\delta \frac{1}{c} \int_{V^*} \frac{\partial F^\mu}{\partial x^\mu} \, \mathrm{d}V^* = \frac{1}{c} \delta \int_{\partial V^*} F^\mu \, \mathrm{d}f_\mu = \frac{1}{c} \int_{\partial V^*} \frac{\partial F^\mu}{\partial q_a} \underbrace{\delta q_a}_{=0} \mathrm{d}f_\mu = 0$$

Hamiltonův princip spolu s Lagrangeovými rovnicemi lze použít v prostorech libovolné dimenze. Úloha nalézt lagrangián, který vede na rovnice popisující pohyb daného pole je obtížná a pro její řešení nejsou známa obecně platná pravidla. Využívají se principy symetrie a jednoduchosti. Například v STR jde o požadavek relativistické invariance lagrangiánu, který plyne z relativistické invariance akce a integrace vzhledem k $\mathrm{d}V^{*\prime} = |J| \, \mathrm{d}V^*$

$$J = \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \det(\alpha^\mu{}_\nu) = \det A = \pm 1$$

Transformace polí

- skalární pole $\psi'(x'^\kappa) = \psi(x^\kappa)$
- vektorové pole $A'^\mu(x'^\kappa) = \alpha^\mu{}_\nu A^\nu(x^\kappa)$
- tenzorové pole $F'^{\mu\nu}(x'^\kappa) = \alpha^\mu{}_\rho \alpha^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x^\kappa)$

$$x'^\kappa = \alpha^\kappa{}_\lambda x^\lambda \qquad\qquad A'^\mu(x'^\kappa) = \alpha^\mu{}_\nu A^\nu((\alpha^{-1})^\lambda{}_\kappa x'^\kappa)$$

Maxwellovy rce. ve vakuu (Maxwellovy–Lorentzovy rce.) (H.A.Lorentz 1892)

I. série

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}}$$

II. série

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$$

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0}$$

Elektrická intenzita $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\vec{F}}{q}$ $[\vec{E}] = Vm^{-1}$

Magnetická indukce $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$ $[\vec{B}] = T$

Hustota náboje $\rho = \rho(\vec{r},t)$ $[\rho] = Cm^{-3}$

Proudová hustota $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t) = \rho\vec{v}$ $[\vec{j}] = Am^{-2}$

Permitivita vakua $\varepsilon_0 \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} Fm^{-1}$

Permeabilita vakua $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} Hm^{-1}$

Popisují elektromagnetické pole (na mikroskopické - atomární úrovni) buzené daným rozložením zřídel ρ a $\vec{j}$. Současně pole působí na náboje tvořící zřídla *Lorentzovou silou* $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$. Rovnice je tak potřeba doplnit o relativistické rovnice pro pohyb nábojů $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

Gaussův zákon

Tok elektrické intenzity uzavřenou plochou je úměrný celkovému náboji obklopenému touto plochou.

$$\Psi_E = \oint_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Maxwellovo zobecnění Faradayova zákona

Časově proměnné magnetické pole budí pole elektrické (nezávisle na existenci vodivé smyčky).

$$\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

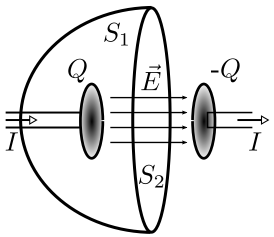
Neexistence magnetického monopólu

Magnetické pole je solenoidální (bez zdrojů). Siločáry jsou buď uzavřené křivky, nebo začínají a končí v nekonečnu. $\oint_{\partial V}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$

Ampérův zákon doplněný o Maxwellův posuvný proud

Elektrický proud a časově proměnné elektrické pole budí pole magnetické.

$$\oint_{\partial S}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S\operatorname{rot}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_S\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_S\mu_0\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Psi_E}{\mathrm{d}t} + \mu_0 I$$



Maxwellův posuvný proud (kvůli splnění rovnice kontinuity) $\vec{j}_{Max} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

integruje se přes nehybné křivky a plochy, ∂S a ∂V nezávisí na čase

Rovnice kontinuity - zákon zachování náboje

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0} \qquad -\frac{\mathrm{d}Q_V}{\mathrm{d}t} = -\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V = \int_V\operatorname{div}\vec{j}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = I_{\partial V}$$

$$0 = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B} - \mu_0(\varepsilon_0\operatorname{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}) = -\mu_0(\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E} + \operatorname{div}\vec{j}) = -\mu_0(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j})$$

Rovnice elektromagnetické vlny

rot na druhé rovnice obou sad a dosazením z rovnic prvních dává

$$0 = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{B}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$

$$0 = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{E}) - \mu_0\operatorname{rot}\vec{j} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{B} - \Delta\vec{B} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \mu_0\operatorname{rot}\vec{j}$$

nehomogenní vlnové rovnice pro elektromagnetickou vlnu

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{grad}\rho + \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\operatorname{rot}\vec{j}$$

Pro $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ homogenní vlnové rovnice pro e.m. vlnu ve vakuu.

Weberův vztah $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ $c = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 299\ 792\ 458 ms^{-1}$ $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} Hm^{-1}$

Maxwellovy rovnice v látkovém prostředí (J.C.Maxwell 1865)

$\boxed{\text{I.}}$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{D} = \rho}$ $\boxed{\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j}}$ $\boxed{\text{II.}}$ $\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0}$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$

Popisují makroskopické e.m. pole v látkovém prostředí – střední hodnoty okamžitých mikroskopických polí (z M.–L. rovnic) přes "dostatečně velké" objemy a "dostatečně dlouhé" časy, které jsou měřeny přístroji. Nábojové a proudové hustoty jsou při středování rozděleny na volné (ρ a $\vec{j}$ vystupující v získaných rovnicích) a vázané, které jsou zahrnuty v následujících vztazích:

Elektrická indukce $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$ $[\vec{D}] = Cm^{-2}$

Vektor polarizace $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r},t)$ – průměrný elektrický dipólový moment v jednotce objemu, makroskopický dipólový moment $\vec{p} = \int_V\vec{P}\,\mathrm{d}V$

celková hustota náboje $\rho_c = \rho + \rho_b$ hustota vázaných nábojů $\rho_b = -\operatorname{div}\vec{P}$

Intenzita magnetického pole $\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}}$ $[\vec{H}] = Am^{-1}$

Vektor magnetizace $\vec{M} = \vec{M}(\vec{r},t)$ – hustota mag. dipol. momentu, makroskopický mag. dipol. moment $\vec{m} = \int_V\vec{M}\,\mathrm{d}V$

celková proudová hustota $\vec{j}_c = \vec{j} + \vec{j}_p + \vec{j}_m$ polarizační proud $\vec{j}_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$

magnetizační proud $\vec{j}_m = \operatorname{rot}\vec{M}$

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho \qquad \operatorname{div}\varepsilon_0\vec{E} = \rho - \operatorname{div}\vec{P} = \rho_c$$

$$\operatorname{rot}(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) - \frac{\partial(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})}{\partial t} = \vec{j} \qquad \operatorname{rot}\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{M} = \vec{j}_c$$

Materiálové vztahy

Vektory polarizace a magnetizace závisí na vnitřní stavbě látky i na e.m. poli. Pro konkrétní látky se tato závislost určuje experimentálně.

V lineární prostředí (ideálně měkká dielektrika), které je homogenní a izotropní platí v případě slabých (vzhledem k lokálním polím) středních polí $\vec{E}$, $\vec{B}$ vztahy: $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$ $\quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$ $\quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

permitivita $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0(1+\chi_e)$ permeabilita $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1+\chi_m)$

Rychlost e.m. vlny v prostředí $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ Index lomu $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

V anizotropních prostředích jsou veličiny elektrická a magnetická susceptibilita χ_e, χ_m (a tedy i ε, μ) symetrické tenzory, v nehomogenních prostředích závisí na poloze, v nelineárních prostředích na polích $\vec{E}$, $\vec{B}$ dále mohou záviset na teplotě a nebo na frekvenci se kterou se mění e.m. pole.

Dále budeme uvažovat pouze prostředí podmínky za kterých jsou ε, μ reálné konstanty. V takových prostředích mají Mawellovy rovnice tvar

I. série $\quad \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}} \quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{j}}$

II. série $\quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$

V případě stacionárních (časově nezávislých) polí $\vec{E}$ a $\vec{B}$ se rovnice rozpadají na dvě nezávislé soustavy rovnic – jednu pro $\vec{E}$ a druhou pro $\vec{B}$.

Helmholtzův teorém

Buď $\vec{F}$ vektorové pole třídy C^2 na omezené oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ pak

$$\vec{F} = -\nabla\Phi + \operatorname{rot} \vec{A} \quad \text{kde} \quad \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \mathrm{d}\vec{S}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \times \mathrm{d}\vec{S}'$$

Řešení Maxwellových rovnic pomocí potenciálů (II. série)

$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ solenoidální pole $\vec{B} \quad \Leftrightarrow$

$\exists \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ Vektorový potenciál $\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}}$ $\quad (\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0)$

$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ potenciální pole $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow$

$\exists \varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ Skalární potenciál $\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ $\quad (\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0)$

Kalibrační transformace

Přiřazení dvojice potenciálů $(\vec{A}, \varphi)$ k e.m. poli $(\vec{E}, \vec{B})$ není jednoznačné. Konkrétní výběr dvojice $(\vec{A}, \varphi)$ k popisu e.m. pole se nazývá *kalibrací* a přechod mezi různými kalibracemi *kalibrační transformací*. Říkáme, že $(\vec{A}, \varphi)$ a $(\vec{A}', \varphi')$ jsou *kalibračně ekvivalentní* popisují–li totéž pole $(\vec{E}, \vec{B})$.

$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}'$ $\qquad -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$

$\operatorname{rot}(\vec{A}' - \vec{A}) = 0 \Rightarrow \exists \Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$ $\qquad 0 = \nabla(\varphi' - \varphi) + \frac{\partial(\vec{A}' - \vec{A})}{\partial t} = \nabla(\varphi' - \varphi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t})$

$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda(\vec{r}, t)}$ $\qquad \boxed{\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}}$

Kalibrační transformace tedy nemění měřitelné veličiny $\vec{E}$ a $\vec{B}$ (jsou tzv. kalibračně invariantní) ale pouze parametrizaci polí.

Řešení Maxwellových rovnic pomocí potenciálů (I. série)

$$\mu\vec{j} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{A} - \Delta\vec{A} + \varepsilon\mu \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon} = \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\Delta\varphi - \operatorname{div}(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu\vec{j} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \\ \Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \end{aligned}\right\} @ \quad \text{jsou kalibračně invariantní}$$

Lorenzova kalibrační podmínka (L.V.Lorenz) $\boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0}$

Oprávněnost Lorenzovy kalibrace

Pokud $\vec{A}$, φ řeší rce. @ a nesplňují Lorenzovu kalibrační podmínku, pak mezi řešeními @ existují kalibračně ekvivalentní $\vec{A}'$,φ' které ji splňují.

$$0 = \operatorname{div} \vec{A}' + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div}\operatorname{grad} \Lambda + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

$\Delta\Lambda - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t})$ nehomogenní vlnová rovnice pro Λ - má nekonečně mnoho řešení

Nehomogenní vlnové (d'Alembertovy) rovnice pro potenciály

V prostředí (kde $\varepsilon_r, \mu_r \in \mathbb{R}$ kons.)	Speciálně ve vakuu ($\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$)
$\Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$	$\Box \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}$	$\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$
$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

d'Alembertův operátor (dalambertián) $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Nehomogenní vlnové (d'Alembertovy) rovnice pro potenciály

V prostředí (kde $\varepsilon_r, \mu_r \in \mathbb{R}$ kons.)

$\Delta\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}$

$\mathrm{div}\,\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

Speciálně ve vakuu ($\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$)

$\Box\,\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\Box\,\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$

$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

d'Alembertův operátor (dalambertián) $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Tyto rovnice jsou invariantní vůči kalibračním transformacím splňujícím podmínku $\Delta\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = 0$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\,\Lambda$$

$-\frac{\rho}{\varepsilon} = \Delta\varphi' - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} = \Delta\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}\right)$

$-\mu\vec{j} = \Delta\vec{A}' - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}'}{\partial t^2} = \Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mathrm{grad}\left(\Delta\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}\right)$

$0 = \mathrm{div}\,\vec{A}' + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = \mathrm{div}\,\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\Delta\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}\right)$

Řešení tedy není jednoznačné.

Například v případě $\rho = 0$ lze požadovat $\varphi' = 0$

$\Delta\vec{A}' - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}'}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}$

$\varphi' = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{A}' = 0$ ... Coulombova kalibrace

Rovnice elektrodynamiky v Minkowského prostoročase

Princip relativity (stejný tvar fyzikálních zákonů ve všech inerciálních vztažných soustavách) lze matematicky vyjádřit kovariantním tvarem rovnic (všechny členy rovnice se transformují stejně při Lorentzových tr.)

Př: $T'^{\mu} = K'^{\mu} \qquad T'^{\mu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu} T^{\nu} \qquad \alpha^{\mu}{}_{\nu} T^{\nu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu} K^{\nu} / (\alpha^{-1})^{\sigma}{}_{\mu} \qquad T^{\sigma} = K^{\sigma}$

d'Alembretovy rovnice - nehomogení vlnové pro potenciály (ve vakuu)

$\Box\,\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ — Lorenzova kalibrační podmínka

$\Box\,\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ — $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

chceme tvar ve kterém bude na obou stranách rovnice vystupovat čtyřvektor

d'Alembertův operátor $\Box$

skalární operátor, zapíšeme ho pomocí čtyřtenzorů a ukážeme jeho invarianci

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} = -g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = -g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}$$

$x'^{\mu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad x^{\nu} = (\alpha^{-1})^{\nu}{}_{\sigma} x'^{\sigma} \qquad g'^{\mu\nu} = \alpha^{\mu}{}_{\rho}\alpha^{\nu}{}_{\sigma} g^{\rho\sigma}$

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\alpha^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\alpha^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu}$$

$$\Box' = -g'^{\mu\nu}\partial'_{\mu}\partial'_{\nu} = -\alpha^{\mu}{}_{\rho}\alpha^{\nu}{}_{\sigma} g^{\rho\sigma}(\alpha^{-1})^{\kappa}{}_{\mu}(\alpha^{-1})^{\lambda}{}_{\nu}\partial_{\kappa}\partial_{\lambda} = -\delta^{\kappa}_{\rho}\delta^{\lambda}_{\sigma} g^{\rho\sigma}\partial_{\kappa}\partial_{\lambda} = -g^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\partial_{\sigma} = \Box$$

čtyřproud

Náboj je invariant $\mathrm{d}Q' = \mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}V$ a díky kontrakci délek $\mathrm{d}V = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}V_0$ proto $\rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} = \gamma\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0} = \gamma\rho_0$, kde ρ_0 je klidová hustota náboje.
Inspirujeme se proudovou hustotu ($\vec{j} = \rho\vec{v}$) a definujeme *čtyřproud* jako součin invariantu ρ_0 a čtyřrychlosti u^{μ}

$$(j^{\mu}) = \rho_0(u^{\mu}) = \rho_0(\gamma c, \gamma\vec{v}) = (\rho_0\gamma c, \rho_0\gamma\vec{v}) = (\rho c, \rho\vec{v}) = (\rho c, \vec{j})$$

Rovnice kontinuity v kovariantním tvaru

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = \frac{\partial c\rho}{\partial (ct)} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} j^{\mu}$$

čtyřdivergence $\boxed{\partial_{\mu} j^{\mu} = 0}$

čtyřpotenciál

Upravíme rovnice tak aby na pravé straně stál čtyřvektor

$$\Box\,\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\mu_0 c^2\rho = -\mu_0 c j^0 \qquad \Box\,\frac{\varphi}{c} = -\mu_0 j^0 \qquad \Box\,\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

čtyřpotenciál $(A^{\mu}) = (\frac{\varphi}{c}, \vec{A})$

kovariantní tvar Maxwellových–Lorentzových rovnice $\boxed{\Box\,A^{\mu} = -\mu_0 j^{\mu}}$

$$0 = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial (ct)}\frac{\varphi}{c} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial A^0}{\partial x^0} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} A^{\mu}$$

Lorenzova podmínka v kovariantním tvaru $\boxed{\partial_{\mu} A^{\mu} = 0}$

Kalibrační transformace v kovariantním tvaru

$$\widetilde{\varphi} = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \qquad \widetilde{A}^0 = \frac{\widetilde{\varphi}}{c} = \frac{\varphi}{c} - \frac{\partial\Lambda}{\partial (ct)} = A^0 - \frac{\partial\Lambda}{\partial x^0} = A^0 - \frac{\partial\Lambda}{\partial x_0}$$

$$\widetilde{\vec{A}} = \vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda \qquad \widetilde{A}^i = A^i + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^i} = A^i - \frac{\partial\Lambda}{\partial x_i}$$

$\boxed{\widetilde{A}^{\mu} = A^{\mu} - \frac{\partial\Lambda}{\partial x_{\mu}} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\Lambda}$ nebo $\boxed{\widetilde{A}_{\mu} = A_{\mu} - \frac{\partial\Lambda}{\partial x^{\mu}} = A_{\mu} - \partial_{\mu}\Lambda}$

(gradient $\partial^{\mu}\Lambda = g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\Lambda$ vs. složka jednoformy $\mathrm{d}\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial x^{\nu}}\,\mathrm{d}x^{\nu} = \partial_{\nu}\Lambda\,\mathrm{d}x^{\nu}$)

Maxwellovy–Lorentzovy rovnice (ve vakuu)

$\boxed{\text{I.}}$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ $\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}}$ $\boxed{\text{II.}}$ $\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0}$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$

Zapíšeme vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$ pomocí čtyřpotenciálu. Nejprve připomeneme jak tomu bylo v $\mathbb{R}^3$ pomocí potenciálů: $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

$B_i = (\operatorname{rot} A)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}B_k \qquad B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \widehat{B}_{23} \qquad \widehat{B}_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$

$B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\widehat{B}_{jk} \qquad \widehat{B}_{jk} = \varepsilon_{jki}B_i \qquad \widehat{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \widehat{B}_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$

Obdobně jako u úhlové rychlosti $\widetilde{\Omega}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\widetilde{\omega}_{jk}$ i zde jsou složky $\vec{B}$ ztotožněny (přes Hodgeův duální operátor) se složkami složky antisymetrického tenzoru 2. řádu $\widehat{B}$. Proto je $\vec{B}$ pseudovektor.

*Hodgeoův operátor $* : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{n-k}(V^*)$ nad n-dim. vek. pr. (V, g, o)

$(*\alpha)_{j_1,\dots,j_{n-k}} = \frac{1}{k!}\alpha^{i_1,\dots,i_k}\omega_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_{n-k}}$, kde $\omega_{i_1,\dots,i_n} = o(\text{baze})\sqrt{|g|}\epsilon_{i_1,\dots,i_n}$

Tenzor elektromagnetického pole

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = c\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi}{c}\right) - \frac{\partial A_x}{\partial (ct)}\right] = c\left[-\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0}\right]$$

$$\stackrel{(A^1=-A_1)}{=} c\left[\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}\right] = cF_{01}$$

$$B_x = [\mathrm{rot}\,\vec{A}]_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2} = F_{32}$$

Tenzor elektromagnetického pole $\boxed{F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

zvednutím indexů $F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

je antisymetricky $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

transformace $F'^{\mu\nu}(x') = \alpha^\mu{}_\rho \alpha^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x)$

kalibrační invariance $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \widetilde{A}^\nu - \partial^\nu \widetilde{A}^\mu = \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \Lambda) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \Lambda) =$

$$= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \Lambda + \partial^\nu \partial^\mu \Lambda = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

Duální tenzor

Čtyřrotace čtyřvektoru je tedy antisymetrický čtyřtenzor druhého řádu, Hodgeův duál z něj udělá zase čtyřtenzor druhého řádu.

Duální tenzor $\boxed{F^*_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2!}\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu}}$ $\quad F^{*\kappa\lambda} = -\frac{1}{2!}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu}$

Levi–civitův symbol $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ je úplně antisymetrický a $\epsilon_{0123} = 1 = \epsilon^{0123}$.

$$F^*_{01} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{01\mu\nu} F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{0123} F^{23} + \varepsilon_{0132} F^{32}) = \tfrac{1}{2}(F^{23} - (-F^{23})) = F^{23} = -B_x$$

$$F^*_{12} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{12\mu\nu} F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{1203} F^{03} + \varepsilon_{1230} F^{30}) = \tfrac{1}{2}(F^{03} - (-F^{03})) = F^{03} = -\tfrac{E_z}{c}$$

$$F^*_{13} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{13\mu\nu} F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{1302} F^{02} + \varepsilon_{1320} F^{20}) = \tfrac{1}{2}(-F^{02} + F^{20})) = F^{20} = \tfrac{E_y}{c}$$

$$(F^{*\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_y & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

Přechod od $F^{\mu\nu}$ k $F^{*\mu\nu}$ odpovídá záměně $\frac{\vec{E}}{c} \to -\vec{B}$ a $\vec{B} \to \frac{\vec{E}}{c}$.

Maxwellovy–Lorentzovy rovnice v kovariantním tvaru

I. série $\boxed{\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu}$ $\quad$ II. série $\boxed{\frac{\partial F^{*\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \partial_\nu F^{*\mu\nu} = 0}$

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = 0 + \frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{E_i}{c}\right) = -\frac{1}{c}\,\mathrm{div}\,\vec{E} = -\mu_0 j^0 = -\mu_0 c\rho$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + 0 + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial (ct)}\left(\frac{E_x}{c}\right) + \frac{\partial(-B_z)}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} - (\mathrm{rot}\,\vec{B})_x = -\mu_0 j_x \qquad (\mathrm{rot}\,\vec{B})_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x$$

$$\frac{\partial F^{*0\nu}}{\partial x^\nu} = 0 + \frac{\partial F^{*0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial B_i}{\partial x^i} = \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial F^{*1\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F^{*10}}{\partial x^0} + 0 + \frac{\partial F^{*12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{*13}}{\partial x^3} = \frac{\partial(-B_x)}{\partial (ct)} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{E_z}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_y}{c}\right)$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{1}{c}(\mathrm{rot}\,\vec{E})_x = 0 \qquad \left(\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_x = 0$$

Lorentzova čtyřsíla

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0 u^\mu) = K^\mu \qquad (u^\mu) = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \qquad (K^\mu) = (\tfrac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{F}, \gamma \vec{F})$$

Lorentzova síla $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$K^1 = \gamma F_x = \gamma e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_x = e(\gamma \tfrac{c}{c} E_x + \gamma v_y B_z - \gamma v_z B_y) =$$

$$= e(u_0 F^{10} + (-u_2)(-F^{12}) + u_3 F^{13}) = eF^{1\nu} u_\nu$$

$$K^0 = \tfrac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{F} = e\tfrac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{E} = e(-\tfrac{E_i}{c})(-\gamma v_i) = eF^{0\nu} u_\nu$$

Lorentzova čtyřsíla $\boxed{K^\mu = eF^{\mu\nu} u_\nu}$

Relativistické invarianty elektromagnetického pole

$I_0 = F^\mu{}_\mu = g_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0$

$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2})$

$I_2 = F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} = 4\frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}$

(Hadamardův součin $(A \circ B)_{ij} = A_{ij} \cdot B_{ij}$, $\not\supseteq$) Další invarianty jsou již buď závislé nebo triviální. $I_1 = -F^*_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}$

Podle znamének těchto invariantů lze provést relativisticky invariantní klasifikaci EM–polí do devíti tříd. Případ $I_1 = 0 = I_2$ tj. $\vec{E} \perp \vec{B}$, $E = cB$ odpovídá rovinné elektromagnetické vlně ve vakuu.

Akce pro soustavu nabitých částic a elektromagnetického pole

Akci pro soustavu interagujících nabitých částic v EM poli sestavíme ze dvou mezních případů

- soustava vzájemně neinteragujících nabitých částic ve vnějším poli
- EM pole buzené zadaným rozložením nabitých částic a jejich rychlostí

Soustava neinteragujících částic ve vnějším poli

Zanedbává se vzájemná interakce částic stejně jako jejich vliv na EM pole.
Lagrangeova funkce

- pro nabitou částici s klidovou hmotností m_0 a nábojem e v EM poli
  $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t))$
- pro soustavu částic s klidovými hmotnostmi m_α a náboji e_α

$$L = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} -m_\alpha c^2 \sqrt{1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}}}_{L_m} \underbrace{- \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha [\varphi(\vec{r}_\alpha, t) - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}(\vec{r}_\alpha, t)]}_{L_{mf}}$$

Diracková delta funkce δ

Je "funkce" na $\mathbb{R}$ s vlastnostmi $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$ a $\delta(x) = 0,\ \forall x \neq 0$.

Platí pro ni $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$ $\qquad \int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$

$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_a) = \delta(x - x_a)\delta(y - y_a)\delta(z - z_a)$ $\qquad \int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_a) f(\vec{r})\,\mathrm{d}V = f(\vec{r}_a)$

Pro bodové náboje je nábojová a proudová hustota dána vztahy

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)) \qquad \vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \vec{v}_\alpha(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t))$$

Interakční lagrangián

$$\begin{aligned}
L_{mf} &= -\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \varphi(\vec{r}_\alpha, t) + \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}(\vec{r}_\alpha, t) = \\
&= -\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \varphi(\vec{r}, t)\,\mathrm{d}V + \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \vec{A}(\vec{r}, t)\,\mathrm{d}V = \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)}_{\rho(\vec{r},t)} \varphi(\vec{r}, t)\,\mathrm{d}V + \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \vec{v}_\alpha \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)}_{\vec{j}(\vec{r},t)} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)\,\mathrm{d}V = \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} c\rho(\vec{r}, t) \frac{\varphi(\vec{r}, t)}{c} - \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{-j^\mu A_\mu}_{\mathcal{L}_{mf}} \mathrm{d}V
\end{aligned}$$

Hustota Lagrangeovy funkce pro EM pole

Akce pro pole $S_f = \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L}_f\,\mathrm{d}V^*$ má být stejná ve všech inerciálních vztažných soustavách a neměla by záviset na zvolené kalibraci pole.
Hustotu Lagrangeovy funkce $\mathcal{L}_f$ pro EM pole hledáme tak, aby byla:

- nejvýše kvadratická v polních proměnných (Maxwellovy rce. jsou lineární)
- relativistiky invariantní (kvůli kovarianci polní rovnice)
- kalibračně invariantní (nezávislá na parametrizaci pole)

Kvadratickými v polních proměnných $\vec{E}, \vec{B}, A_\mu$, $\boxed{\partial_\nu A_\mu = A_{\mu,\nu}}$ jsou invarianty $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (skalár) $F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$ (pseudoskalár) (další $A_\mu A^\mu$, $A_{\mu,\nu}A^{\mu,\nu}$ nejsou kalib. inv.)

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\mu_0} 2(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2}\mu_0 \vec{H}^2$$

$$\mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\nu}, x^\nu) = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu = -\frac{1}{4\mu_0} (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})(A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}) - j^\mu A_\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = -j^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\kappa} = -j^\mu \delta^\kappa_\mu = -j^\kappa$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} &= -\frac{1}{4\mu_0}\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) = -\frac{1}{4\mu_0}\left(\frac{\partial (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})}{\partial A_{\kappa,\lambda}} F^{\mu\nu} + \right. \\
&\left. + F_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) = -\frac{1}{4\mu_0}\left((\delta^\kappa_\nu \delta^\lambda_\mu - \delta^\kappa_\mu \delta^\lambda_\nu) F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) = \\
&= -\frac{1}{4\mu_0}\left(F^{\lambda\kappa} - F^{\kappa\lambda} + F^{\rho\sigma}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) = -\frac{1}{4\mu_0}\left(2F^{\lambda\kappa} + 2F^{\lambda\kappa}\right) = \frac{1}{\mu_0} F^{\kappa\lambda}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{1}{\mu_0} F^{\kappa\lambda}\right) - (-j^\kappa) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_\lambda F^{\kappa\lambda} = -\mu_0 j^\kappa$$

I. série Maxwellových–Lorentzových rovnic (II. série je splněna potenciály)

Akce pro soustavu nabitých částic a EM pole je $S = S_m + S_{mf} + S_f$, kde

- hmota (matter) $S_m = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{N} (-m_\alpha c^2) \sqrt{1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t$
- pole (field) $S_f = \frac{1}{c} \int_{V^*} (-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\,\mathrm{d}V^*$
- inetarkce $S_{mf} = \frac{1}{c} \int_{V^*} (-j^\mu A_\mu)\,\mathrm{d}V^* = \int_{t_1}^{t_2} (-\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha [\varphi(\vec{r}_\alpha, t) - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}(\vec{r}_\alpha, t)])\,\mathrm{d}t$

Odtud se variací podle proměnných x^μ_α (při neměnných A_μ) získají relativistické pohybové rovnice pro částice v EM poli a variací podle polních proměnných A_μ (při neměnných x^μ_α) Maxwellovy–Lorentzovy rovnice.

Zákon zachování náboje

Náboj neexistuje samostatně, je vždy vázán na částice (elektrony, protony, pozitrony), je kvantován (násobky $\pm e$), je relativistický invariant (nezávisí na pohybu částice). Celkový náboj se navíc zachovává i při procesech při kterých částice vznikají a zanikají (rozpady a anihilace částic).

Nechť je v prostoru rozložen volný elektrický náboj s objemovou hustotou $\rho(\vec{r},t)$ jehož pohyb je popsán polem rychlostí $\vec{v}(\vec{r},t)$. Úbytek náboje v libovolně pevně zvolené oblasti V je dán množstvím náboje, které projde přes hranici ∂V oblasti V.

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \rho\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial V} \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{j}\,\mathrm{d}V$$

Pro libovolnou pevně zvolenou oblast V tedy platí

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}\,\mathrm{d}V = 0$$

odtud pro $V \to 0$ dostaneme rovnici kontinuity

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$$

Zákon zachování energie

Dále budeme předpokládat, že částice neprochází plochou ∂V ohraničující oblast V. Síla, kterou EM pole působí na náboj dq v elementu objemu dV je

$$\mathrm{d}\vec{F} = (\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\,\mathrm{d}q = (\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\rho\,\mathrm{d}V = \rho(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\,\mathrm{d}V = \vec{f}\,\mathrm{d}V$$

Výkon této síly

$$\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{F} = \vec{v}\cdot\vec{f}\,\mathrm{d}V = \rho\vec{v}\cdot\vec{E} + \rho\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})\,\mathrm{d}V = \rho\vec{v}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V = \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$$

kde $\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ je hustota Lorentzovy síly a $\vec{j}\cdot\vec{E}$ hustota výkonu Lorentzovy síly.

Úbytek energie pole v objemu V je roven práci, kterou pole vykoná na částicích a energii, která vyproudí přes hranici ∂V. Označíme–li hustotu energie EM pole $w = w(\vec{r},t)$ a hustotu toku energie EM pole $\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{S}}(\vec{r},t)$ můžeme energetickou bilanci v oblasti V popsat rovnicí

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w\,\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}V = \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V}\vec{\mathcal{S}}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \vec{j}\cdot\vec{E} + \operatorname{div}\vec{\mathcal{S}}\,\mathrm{d}V$$

Diferenciální tvar představuje lokální zákon zachování energie v soustavě EM pole a nabitých částic.

$$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{j}\cdot\vec{E} + \operatorname{div}\vec{\mathcal{S}}}$$

Zbývá najít jak závisí w a $\vec{\mathcal{S}}$ na EM poli, proto vyjádříme člen $\vec{j}\cdot\vec{E}$ pomocí Maxwellových rovnic a využijeme identitu $\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}$

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = \left(\operatorname{rot}H - \tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E} = \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{E}\cdot\tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} =$$
$$= -\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) + \vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) - (\vec{H}\cdot\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t})$$

Dále předpokládáme pouze lineární (měkké) prostředí (s konst $\mu,\varepsilon\in\mathbb{R}$), kde

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \vec{B} = \mu\vec{H} \quad\Longrightarrow\quad \vec{H}\cdot\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \tfrac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \tfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B})$$

Poyntingova věta

$$\boxed{-\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \tfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right) = \vec{j}\cdot\vec{E} + \operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H})}$$

Odtud porovnáním s lokálním ZZE určíme:

- hustotu energie EM pole $w = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}) = \frac{1}{2}(\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2)$
- hustotu toku energie EM pole (Poyntingův vektor) $\vec{\mathcal{S}} = \vec{E}\times\vec{H}$

V látkovém prostředí je ve w zahrnuta i energie spotřebované na polarizaci a magnetizaci prostředí. Ve vakuu $w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \mu_0\vec{H}^2)$

Zákon zachování hybnosti

Kromě energie předává EM pole nosičům nábojů i hybnost. Existence hybnosti EM pole byla experimentálně potvrzena objevem mechanického tlaku záření (Lebevěv 1899). Abychom zapsali bilanci hybnosti v oblasti V ohraničené nehybnou plochou ∂V kterou částice neprochází, označíme

$\vec{p}$ ... hustou hybnosti částic, $\vec{g}$ ... hustotu hybnosti EM pole

$\vec{\sigma}_i = (\sigma_{i1},\sigma_{i2},\sigma_{i3})$... hustotu toku i–té složky hybnosti EM pole (hustota toku vektoru $\vec{g}$ představuje tenzor (σ_{ij})

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V p_i + g_i\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V}\sigma_{ij}\,\mathrm{d}S_j = \oint_{\partial V}\vec{\sigma}_i\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{\sigma}_i\,\mathrm{d}V$$

Diferenciální tvar představuje lokální zákon zachování hybnosti v soustavě EM pole a nabitých částic.

$$\boxed{-\frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}}$$

K určení veličin $\vec{g}$ a σ_{ij} zapíšeme pohybovou rovnici pro částice v elementu objemu a dosadíme z Maxwellových rovnic

$$\frac{\partial\vec{p}}{\partial t} = \vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} = (\operatorname{div}\vec{D})\vec{E} + \left(\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\times\vec{B}$$

na pravou stranu rce. přidáme dvě nuly $0 = \vec{H}\operatorname{div}\vec{B}$ a $0 = (\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t})\times\vec{D}$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{D} + \vec{H}\,\mathrm{div}\,\vec{B} + \left(\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \times \vec{B} + \left(\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \times \vec{D} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B}) + [\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{D} + \vec{H}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{D}\times\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{B}\times\mathrm{rot}\,\vec{H}]$$

$$\begin{aligned}
[\ldots]_i &= E_i\frac{\partial D_j}{\partial x_j} + H_i\frac{\partial B_j}{\partial x_j} - \epsilon_{ijk}D_j\epsilon_{klm}\frac{\partial E_m}{\partial x_l} - \epsilon_{ijk}B_j\epsilon_{klm}\frac{\partial H_m}{\partial x_l}\\
&= E_i\frac{\partial D_j}{\partial x_j} + H_i\frac{\partial B_j}{\partial x_j} - (D_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - D_j\frac{\partial E_i}{\partial x_j}) - (B_j\frac{\partial H_j}{\partial x_i} - B_j\frac{\partial H_i}{\partial x_j})\\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}(E_iD_j + H_iB_j) - D_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - B_j\frac{\partial H_j}{\partial x_i} =
\end{aligned}$$

V lineárním prostředí s konstantními $\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$ lze výraz dále upravit

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_j}(E_iD_j + H_iB_j) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(D_jE_j + B_jH_j) =\\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}(E_iD_j + H_iB_j) - \frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}) =\\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_iD_j + H_iB_j - \delta_{ij}\underbrace{\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})}_{w}\right)
\end{aligned}$$

Odtud porovnáním s lokálním ZZH

- hustota hybnosti EM pole $\vec{g} = \vec{D}\times\vec{B} = \varepsilon\mu\vec{E}\times\vec{H} = \varepsilon\mu\vec{\mathcal{S}}$
- Maxwellův tenzor napětí (tenzor hustoty toku hybnosti EM pole)
  $\sigma_{ij} = -[E_iD_j + H_iB_j - \delta_{ij}\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})]$
  $\sigma_{ij} = -[\varepsilon E_iE_j + \mu H_iH_j - \delta_{ij}\frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)] = -[\varepsilon E_iE_j + \mu H_iH_j - \delta_{ij}w]$

Tyto výrazy v sobě obsahují i hybnosti vázaných nábojů. Veličiny $\vec{g}$ a σ_{ij} pro samostatné EM pole bychom získali dosazením $\varepsilon = \varepsilon_0$ a $\mu = \mu_0$ případně odvozením z Lorentz–Maxwellových rovnic místo rovnic Maxwellových.

Název pro σ_{ij} pochází z analogie s mechanikou kontinua. Ve stacionárním případě EM pole totiž platí $\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = 0$ a lokální ZZH se tak redukuje na $\frac{\partial p_i}{\partial t} = f_i = -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$. Tenzor σ_{ij} tak umožňuje vypočítat sílu působící na objem V jako výslednici "napětí" působících na povrchu ∂V
$\int_V f_i\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V}(-\sigma_{ij})\,\mathrm{d}S_j$

*Tenzor energie a hybnosti

Teorém Noetherové říká, že ke každé spojité jednoparametrické grupě transformací, které ponechávají akci $S = \frac{1}{c}\int_{V^*}\mathcal{L}\,\mathrm{d}V^*$ invariantní, přísluší čtyřvektor k^μ splňující $\frac{\partial k^\mu}{\partial x^\mu} = 0$ tzv. zachovávající se čtyřproud.

Jako transformace si zvolíme translace $x'^\mu = x^\mu + b^\mu$ při kterých se polní proměnné transformují jako skalární funkce $q'_a(x') = q_a(x)$. Hustota Lagrangeovy funkce $\mathcal{L}(q_a, q_{a,\mu}, x^\mu)$ bude invariantní vůči translacím právě tehdy, když nebude záviset explicitně na souřadnicích x^μ tj. $\mathcal{L}(q'_a(x'), q'_{a,\mu}(x')) = \mathcal{L}(q_a(x), q_{a,\mu}(x))$. To lze vyjádřit nulovostí derivací explicitních závislostí $\mathcal{L}$ na x^μ:

$$0 = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right)_{expl} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a}q_{a,\mu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}q_{a,\nu\mu} \overset{\text{rce. pole}}{=}$$
$$= \delta^\nu_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)q_{a,\mu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}q_{a,\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}q_{a,\mu} - \delta^\nu_\mu\mathcal{L}\right]$$

Tyto rovnice pro $\mu = 0,1,2,3$ představují zákony zachování energie a hybnosti v teorii pole. Výraz v závorce nazýváme kanonický tenzor energie a hybnosti

$$\boxed{\mathcal{T}_\mu{}^\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}q_{a,\mu} - \delta^\nu_\mu\mathcal{L}}$$

Pro volné (bez zdrojů) elektromagnetické pole máme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \text{kde} \qquad F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\rho,\nu}}A_{\rho,\mu} - \delta^\nu_\mu\mathcal{L} \overset{\text{11.před.}}{=} \frac{1}{\mu_0}A_{\rho,\mu}F^{\rho\nu} + \delta^\nu_\mu\frac{1}{4\mu_0}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

Tento tenzor není vhodný, neboť není kalibračně invariantní. Doplníme ho proto o čtyřdivergenci

$$-\frac{1}{\mu_0}A_{\mu,\rho}F^{\rho\nu} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x^\rho}(A_\mu F^{\nu\rho}) \qquad \text{kde} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^\nu\partial x^\rho}(A_\mu F^{\nu\rho}) = 0$$

Dostaneme tak tenzor, který již kalibračně invariantní je

$T_\mu{}^\nu = \frac{1}{\mu_0}A_{\rho,\mu}F^{\rho\nu} - \frac{1}{\mu_0}A_{\mu,\rho}F^{\rho\nu} + \delta^\nu_\mu\frac{1}{4\mu_0}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0}(-F_{\mu\rho}F^{\nu\rho} + \frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\delta^\nu_\mu)$

Po zvednutí indexu dostáváme symetrický tenzor energie a hybnosti:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= g^{\mu\kappa}T_\kappa{}^\nu = \frac{1}{\mu_0}g^{\mu\kappa}(-F_{\kappa\rho}F^{\nu\rho} + \frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\delta^\nu_\kappa) =\\
&= \frac{1}{\mu_0}(-F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) = \frac{1}{\mu_0}(-g_{\sigma\rho}F^{\mu\sigma}F^{\nu\rho} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})
\end{aligned}$$

Symetrický tenzor energie a hybnosti

Je kalibračně invariantní tenzor $\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}(-g_{\rho\sigma}F^{\mu\rho}F^{\nu\sigma} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})}$

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w & \frac{\mathcal{S}_x}{c} & \frac{\mathcal{S}_y}{c} & \frac{\mathcal{S}_z}{c} \\ \frac{\mathcal{S}_x}{c} & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \frac{\mathcal{S}_y}{c} & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \frac{\mathcal{S}_z}{c} & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{c}\vec{\mathcal{S}}=c\vec{g}}{\overset{\text{ve vakuu}}{=}} \begin{pmatrix} w & cg_x & cg_y & cg_z \\ cg_x & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ cg_y & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ cg_z & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Tento tenzor umožňuje jednotně zapsat lokální zákon zachování energie a hybnosti.

Lokální zákon zachování energie a hybnosti pro volné EM pole

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

Lokální zákon zachování energie a hybnosti pro soustavu částic a EM pole

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -f^\mu$$

kde $f^\mu = F^{\mu\nu}j_\nu$ je hustota Lorentzovy čtyřsíly $(f^\mu) = (\frac{\vec{j}\cdot\vec{E}}{c}, \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})$.

Rozepsáním získáme dříve uvedené lokální ZZE a ZZH:

$$\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial w}{\partial(ct)} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial x_i} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\mathcal{S}}\right) = -\frac{1}{c}\vec{j}\cdot\vec{E} = -f^0$$

$$\frac{\partial T^{i\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial(cg_i)}{\partial(ct)} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})_i = -f^i$$

Řešení nehomogenních vlnových rovnic

Maxwellovy rovnice (v prostředí s konstantními $\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$) jsou ekvivalentní nehomogenním vlnovým rovnicím pro potenciály doplněným o Lorenzovu kalibrační podmínku:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \Delta\vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \qquad \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

kde $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$. Vlnové rovnice nejsou provázané, lze je tedy řešit zvlášť.
Vzhledem k podobnému tvaru rovnic, stačí řešit rovnici pro φ.
Řešení nehomogenní rovnice se skládá z

- obecného řešení homogenní rovnice (PS=0) - superpozice již známých d'Alembertových řešení $\varphi(\vec{r},t) = F(\vec{s}\cdot\vec{r} - vt)$ odpovídajících rovinným vlnám postupujícím ve směru $\vec{s}$
- partikulárního řešení nehomogenní rce. (PS≠0), které najdeme obdobně jako elektrostatický potenciál v elektrostatice, kde $\varphi = \varphi(\vec{r})$

Elektrostatika

Maxwelovy	$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$	$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$	Poissonova	$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$
rovnice	$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$	$\frac{\rho}{\varepsilon} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$	rovnice	

Poissonova rovnice má řešení $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V'$, které lze považovat za superpozici elementárních coulombovských potenciálů $\varphi(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathrm{d}q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
Elementární coulombovský potenciál určíme pro bodový náboj Q v počátku.
Řešení Poissonovy rovnice je jednoznačně určeno následujícími požadavky:

1. Laplaceova rovnice $\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$ pro $\vec{r} \neq 0$
2. sférická symetrie (rovnice i okrajové podmínky jsou invariantní vůči rotacím) $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$
3. okrajová podmínka $\varphi(r) \to 0$ pro $r \to +\infty$
4. Gaussova věta $\int_V \operatorname{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$

Z 1) a 2) plyne $\quad 0 = \Delta\varphi(r) = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) \quad$ pro $r \neq 0$

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \text{konst.} = -B \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = -\frac{B}{r^2} \qquad \boxed{\varphi(r) = \frac{B}{r} + A}$$

Konstanty A a B se určí z podmínek 3) a 4) $\quad 0 = \lim_{r\to+\infty}\varphi(r) = A$

$$\frac{Q}{\varepsilon} = \oint_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\oint_{\partial V}\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial V}\frac{B}{r^2}\underbrace{\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}_{r^2\,\mathrm{d}\Omega} = B\int\mathrm{d}\Omega = B4\pi$$

Tedy $B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}$ a $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$

Elektrodynamika

Elementární potenciál $\varphi = \varphi(\vec{r},t)$ splňující nehomogenní vlnovou rovnici pro časově proměnný bodový náboj v počátku $Q(t)$ musí splňovat podmínky

1. vlnová rovnice $\Delta\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$ pro $\vec{r} \neq 0$
2. sférická symetrie $\varphi(\vec{r},t) = \varphi(r,t)$
3. pro $v \to +\infty$ chceme $\varphi \to \varphi_\infty = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon r}$ (okamžitý coulombovský potenciál)
4. podmínka vyzařování $f_A = 0$ (podmínka kauzality)

Upravíme vzorec $\Delta\varphi(r,t) = \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)$

$$0 = \Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{r}{r}\varphi\right) = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi)\right]$$

To je vlnová rovnice pro funkci $r\varphi(r,t)$ pro kterou existuje d'Alembertovo řešení $r\varphi(r,t) = f_R(t - \frac{r}{v}) + f_A(t + \frac{r}{v})$ (Retardovaný a Avansovaný potenciál)

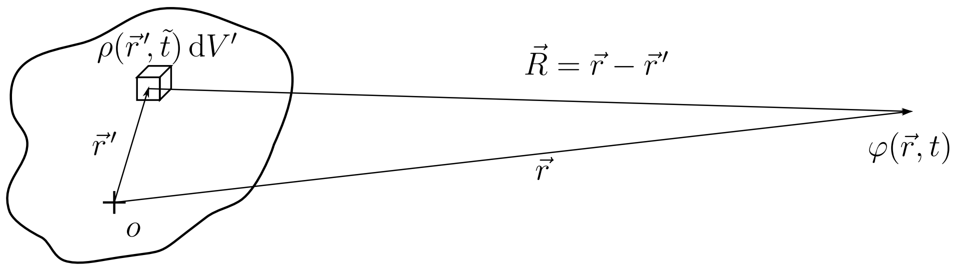
Avansovaný potenciál $\frac{1}{r}f_A$ vyloučíme kvůli podmínce kauzality. Retardovaný potenciál bodového náboje v počátku $\varphi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r}Q(t - \frac{r}{v})$ získáme z podmínky 3). Potenciál v místě $\vec{r}$ v čase t odpovídá Coulombově potenciálu v témže místě v retardovaném čase $\widetilde{t} = t - \frac{r}{v}$.

Pro náboj s hustotou $\rho(\vec{r},t)$ v objemu V dostaneme superpozicí

obdobně získáme $\vec{A}(\vec{r},t)$ ze zadaných proudových hustot $\vec{j}(\vec{r},t)$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V' \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V'$$

Dosazením se lze přesvědčit, že odvozené potenciály splňují Lorenzovu kalibrační podmínku. To že vlnová rovnice má dva typy řešení (zpožděné a předbíhavé) souvisí s její symetrií vůči časové inverzi ($t \to -t$), okrajové podmínky, ale takovou symetrii nemají. Zdroj tedy budí EM vlnu, která se šíří od něj jako rozbíhavá vlna k pozorovateli a odnáší sebou energii. Předbíhavá vlna odporuje kauzalitě.



Dipólová aproximace retardovaných potenciálů

Předpokládejme, že elektromagnetické pole je buzeno prostorově ohraničenou soustavou nábojů, tj. že ρ a $\vec{j}$ jsou nenulové pouze uvnitř koule V poloměru a. V dostatečné vzdálenosti od tohoto zdroje nahradíme funkce φ a $\vec{A}$ nejnižšími členy jejich multipólových rozvojů. Počátek soustavy souřadnic umístíme do středu koule. Integrand $f(\vec{r}', |\vec{r}-\vec{r}'|) = \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ je funkce dvou nezávislých proměnných $\vec{r}'$ a $\vec{r}$ od kterých přejdeme k $\vec{r}$ a $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ a uděláme Taylorův rozvoj v $\vec{R}$ do 1. řádu kolem hodnoty $\vec{r}$

$$f(\vec{r}', R) \doteq f(\vec{r}', R)|_{\vec{R}=\vec{r}} + (\vec{R}-\vec{r}) \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{R}}\right|_{\vec{R}=\vec{r}} =$$

$$= f(\vec{r}', r) + (-\vec{r}') \cdot \left[\frac{\partial f(\vec{r}', R)}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial \vec{R}}\right]_{\vec{R}=\vec{r}} = f(\vec{r}', r) - \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial f(\vec{r}', r)}{\partial r}$$

$$\varphi(\vec{r}, t) \doteq \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v})}{r}\,\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho(\vec{r}', t-\frac{r}{v})}{r}\right)\mathrm{d}V' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon r}\underbrace{\int_V \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v})\,\mathrm{d}V'}_{Q(\tilde{t})=0 \text{ nebo konst.}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\underbrace{\int_V \vec{r}'\rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v})\,\mathrm{d}V'}_{\vec{p}(\tilde{t})}\right)$$

Retardovaný potenciál buzený časově proměnným dipólem $\vec{p}(t)$ umístěným v počátku

$$\boxed{\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)}$$

lze upravit pomocí $\mathrm{div}\,\vec{F}(r) = \frac{\partial F_i(r)}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}r} = \frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\partial \vec{F}}{\partial r}$.

Lorenzova podmínka $\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ pak dává

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)\right) = \mathrm{div}\left(\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)\right)$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)}$$

S využitím rovnice kontinuity, identity $\mathrm{div}(f\vec{F}) = f\,\mathrm{div}\,\vec{F} + \vec{F}\cdot\mathrm{grad}\,f$ a skutečnosti, že hranicí koule nic neprotéká (tj. $\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}' = 0$ na ∂V) dostaneme

$$\frac{\partial p_k(\tilde{t})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V x_k'\rho(\vec{r}', \tilde{t})\,\mathrm{d}V' = \int_V x_k'\frac{\partial\rho(\vec{r}', \tilde{t})}{\partial t}\,\mathrm{d}V' = -\int_V x_k'\,\mathrm{div}'\,\vec{j}(\vec{r}', \tilde{t})\,\mathrm{d}V' =$$

$$= -\int_V \mathrm{div}'\left(x_k'\vec{j}(\vec{r}', \tilde{t})\right) - \vec{j}(\vec{r}', \tilde{t})\cdot\mathrm{grad}'(x_k')\,\mathrm{d}V' =$$

$$= -\oint_{\partial V} x_k'\vec{j}(\vec{r}', \tilde{t})\cdot\mathrm{d}\vec{S}' + \int_V j_k(\vec{r}', \tilde{t})\,\mathrm{d}V' = \int_V j_k(\vec{r}', \tilde{t})\,\mathrm{d}V'$$

Získaný vektorový potenciál je buzen polarizačním proudem kompenzujícím časové změny rozložení náboje v dipólu a odpovídá nultému členu multipólového rozvoje rozvoje

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r} = \frac{\mu}{4\pi r}\int_V \vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{r}{v}\right)\mathrm{d}V'}$$

kde $\dot{\vec{p}}$ značí derivaci funkce $\vec{p}$ vzhledem k její jediné proměnné

Záření dipólu

Označíme $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ a určíme pole $\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ a $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$$B_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \frac{\mu}{4\pi}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\dot{p}_k(t-\frac{r}{v})}{r}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\epsilon_{ijk}\left[-\frac{1}{r^2}\frac{x_j}{r}\dot{p}_k + \frac{1}{r}\ddot{p}_k\left(-\frac{x_j}{vr}\right)\right]_{t-\frac{r}{v}}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu}{4\pi}\left[\frac{\vec{r}\times\dot{\vec{p}}}{r^3} + \frac{\vec{r}\times\ddot{\vec{p}}}{vr^2}\right]_{t-\frac{r}{v}} = -\frac{\mu}{4\pi}\left.\left(\frac{\vec{n}\times\dot{\vec{p}}}{r^2} + \frac{\vec{n}\times\ddot{\vec{p}}}{vr}\right)\right|_{t-\frac{r}{v}}}$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r}\left[-\frac{1}{r^2}\vec{p} + \frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\left(-\frac{1}{v}\right)\right]_{t-\frac{r}{v}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} + \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}}{vr^2}\right]_{t-\frac{r}{v}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{x_jp_j}{r^3} + \frac{x_j\dot{p}_j}{vr^2}\right]_{t-\frac{r}{v}}$$

$$E_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\delta_{ij}p_j}{r^3} + \frac{x_j\dot{p}_j}{r^3}\left(-\frac{x_i}{vr}\right) - \frac{3}{r^4}\frac{x_i}{r}x_jp_j + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{ij}\dot{p}_j}{vr^2} + \frac{x_j\ddot{p}_j}{vr^2}\left(-\frac{x_i}{vr}\right) - \frac{2}{vr^3}\frac{x_i}{r}x_j\dot{p}_j\right]_{t-\frac{r}{v}} - \left.\frac{\mu}{4\pi}\frac{\ddot{p}_i}{r}\right|_{t-\frac{r}{v}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{3x_i(x_jp_j) - p_ir^2}{r^5} + \frac{3x_i(x_j\dot{p}_j) - \dot{p}_ir^2}{vr^4} + \frac{x_i(x_j\ddot{p}_j) - \ddot{p}_ir^2}{v^2r^3}\right]_{t-\frac{r}{v}}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left.\left(\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p}) - \vec{p}}{r^3} + \frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{p}}) - \dot{\vec{p}}}{vr^2} + \frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}}{v^2r}\right)\right|_{t-\frac{r}{v}}}$$

Statická zóna

Je oblast v blízkosti zdroje (pro malá r lze položit $t \doteq t - \frac{r}{v}$) ve které převládají členy

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p}(t)) - \vec{p}(t)}{4\pi\varepsilon r^3} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{n}\times\dot{\vec{p}}(t)}{r^2}$$

odpovídající elektrostatickému poli dipólu $\vec{p}$ (až na časovou závislost) a Biotově–Savartově zákonu pro magnetické pole buzené polarizačním proudem $\dot{\vec{p}}$

Vlnová zóna

Je oblast dostatečně vzdálená od zdroje ($r >> a$ a současně $r >> \lambda_{dom.}$) ve které převládají členy úměrné $\frac{1}{r}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left.\frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}}{4\pi\varepsilon v^2 r}\right|_{t-\frac{r}{v}} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = -\left.\frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{n}\times\ddot{\vec{p}}}{vr}\right|_{t-\frac{r}{v}}$$

Toto EM pole představuje sférickou vlnu (plochy konstantní fáze $t - \frac{r}{v} = konst.$ jsou sféry) šířící se rychlostí v. Vzhledem k tomu, že platí

$$\vec{n}\cdot\vec{E} = 0 = \vec{n}\cdot\vec{B} \qquad \text{a} \qquad \vec{n}\times\vec{E} = -\frac{\vec{n}\times\ddot{\vec{p}}}{4\pi\varepsilon v^2 r} = -\frac{\mu\vec{n}\times\ddot{\vec{p}}}{4\pi r} = v\vec{B},$$

tvoří $\vec{n}, \vec{E}, \vec{B}$ pravotočivou soustavu a $E = vB$. Vlna má tedy podobné vlastnosti jako rovinná vlna šířící se ve směru $\vec{n}$ a lze ji tedy v dostatečné vzdálenosti od zdroje rovinou vlnou aproximovat (nahradit malý úsek plochy konstantní fáze úsekem rovinné vlny šířící se ve směru $\vec{n}$).

Polarizace vlny je dána průmětem $\ddot{\vec{p}}_\perp$ vektoru $\ddot{\vec{p}}$ do směru kolmého k $\vec{n}$
$\ddot{\vec{p}} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}}) + \ddot{\vec{p}}_\perp$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\ddot{\vec{p}}_\perp\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon v^2 r}$$

Pro magnetické pole platí

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{Z}\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

kde $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ je charakteristická impedance (pro vakuum $Z_0 = 377\Omega$).

Hustota toku energie ve vlnové zóně je dána Poyntingovým vektorem

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{Z}\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E}) = \frac{1}{Z}\vec{E}^2\vec{n} = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon^2 v^4 Z}\left(\ddot{\vec{p}}_\perp\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)^2\frac{\vec{n}}{r^2}$$

Pro dipól $\vec{p}(t) = \vec{p}_0\cos(\omega t)$

máme $\ddot{\vec{p}} = -\omega^2\vec{p}_0\cos(\omega t)$
Označme úhel mezi konstantním vektorem $\vec{p}_0$ a směrem $\vec{n}$ jako θ pak

$$(\ddot{\vec{p}}_\perp)^2 = (\ddot{\vec{p}} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}}))^2 = \ddot{\vec{p}}^2 - 2(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}})^2 + (\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}})^2 = \omega^4 p_0^2(1-\cos^2\theta)\cos^2(\omega t)$$

$$\left(\ddot{\vec{p}}_\perp\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)^2 = \omega^4 p_0^2\sin^2\theta\cos^2\left(\omega t - \omega\frac{r}{v}\right) = \omega^4 p_0^2\sin^2\theta\cos^2(\omega t - kr)$$

kde $k = \frac{\omega}{v}$ je vlnové číslo.

Hustota toku energie v místě $\vec{r}$ a čase t lze s využitím $\varepsilon Z = \frac{1}{v}$ a $\omega = kv$ zapsat jako

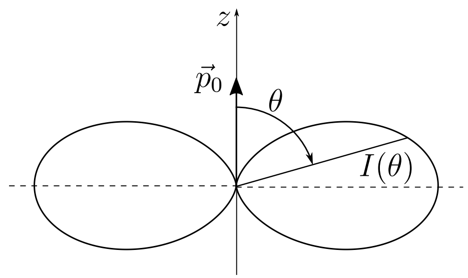
$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{r},t) = \vec{n}\frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi^2\varepsilon^2 v^4 Z}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\cos^2(\omega t - kr) = \vec{n}\frac{vk^4p_0^2}{16\pi^2\varepsilon}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)$$

Okamžitý vyzářený výkon – energie vyzářená za jednotku času přes sféru S_r velkého poloměru r

$$\begin{aligned}
W(t) &= \oint_{S_r}\vec{\mathcal{S}}\cdot d\vec{S} = \int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\vec{\mathcal{S}}\cdot\vec{n}r^2\sin\theta\,d\varphi\right)d\theta = \\
&= \frac{vk^4p_0^2}{16\pi^2\varepsilon}\cos^2(\omega t - kr)\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3\theta}{r^2}r^2\,d\varphi\right)d\theta = \\
&= \frac{vk^4p_0^2}{16\pi^2\varepsilon}\cos^2(\omega t - kr)2\pi\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta = \frac{vk^4p_0^2}{16\pi^2\varepsilon}\cos^2(\omega t - kr)2\pi\frac{4}{3} = \\
&= \frac{8\pi}{3}\frac{vk^4p_0^2}{16\pi^2\varepsilon}\cos^2(\omega t - kr)
\end{aligned}$$

Časová střední hodnota vyzářeného výkonu

$$\langle W(t)\rangle_T = \frac{vk^4p_0^2}{12\pi\varepsilon}$$



Intenzita záření

$$I = \langle|\vec{\mathcal{S}}|\rangle_T = \frac{vk^4p_0^2}{32\pi^2\varepsilon}\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

Maximální intenzita je ve směru kolmém k dipólovému momentu $\vec{p}_0$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Ve směru dipólového momentu ($\theta = 0$) dipól nevyzařuje.

Zkouškové otázky Tef02 2019/2020

1. Hamiltonův princip, Akce, Eulerovy–Lagrangeovy rovnice, důsledky Hamiltonova principu
2. Legendreova duální transformace, odvození Hamiltonových rovnic z rovnic Lagrangeových
3. Hamiltonův princip na fázovém prostoru a Hamiltonovy rovnice
4. Integrály pohybu, Poissonovy závorky, Poissonova věta, cyklické souřadnice
5. Kanonické transformace, vytvořující funkce kanonických transformací
6. Kriteria kanoničnosti transformace, Lagrangeovy závorky, Poissonovy závorky
7. Hamilton–Jacobiho rovnice, způsob řešení, Hlavní funkce Hamiltonova a její význam
8. Symplektické podmínky kanoničnosti a grupa kanonických transformací, symplekticá forma a grupa
9. Poincaréovy integrální invarianty, Liouvilleova věta
10. Teorém Noetherové v Hamiltonově formalizmu, Duální povaha pozorovatelných
11. Principy STR, speciální Lorentzovy transformace, kontrakce délek, dilatace času, skládání rychlostí
12. Tenzory a jejich transformace, metrický tenzor, zvedání a snižování indexů, invariantní tenzor
13. Minkowského prostoročas, světelný kužel, interval, čtyřvektory: polohy, rychlosti, hybnosti, zrychlení,
14. Lorentzova grupa, její vlastnosti a struktura
15. Relativistické zobecnění Newtonových pohybových rovnice jedné částice, relativistická energie
16. Lagrangeova a Hamiltonova funkce pro nabitou částici v elektromagnetickém poli relativisticky a klasicky
17. Hamiltonův princip v teorii pole a odvození rovnic pole
18. Maxwellovy–Lorentzovy rovnice a Maxwellovy rovnice a v nevodivém prostředí
19. Řešení Maxvellowých rovnic pomocí potenciálů, d'Alembertovy rovnice
20. Kalibrační transformace, Lorenzova podmínka a jejich zápis pomocí čtyřvektorů
21. Kovariantní tvar d'Alembertových rovnic, čtyřproud, čtyřpotenciál
22. Kovariantní tvar Maxwellových–Lorentzových rovnic, tenzor elektromagnetického pole
23. Kovariantní tvar relativistických pohybových rovnic částice, Lorentzova čtyřsíla
24. Lagrangeova funkce pro soustavu nabitých částic a elektromagnetické pole
25. Zákon zachování náboje pro EM pole, rovnice kontinuity a její kovariantní tvar
26. Zákon zachování energie pro EM pole, Poyntingova věta
27. Zákon zachování hybnosti pro EM pole, Maxwellův tenzor napětí, symetrický tenzor energie a hybnosti
28. Řešení nehomogenní vlnové rovnice pro náboj v počátku, retardované potenciály
29. Dipólová aproximace retardovaných potenciálů
30. Záření dipólu