

Pozor toto jen první verze, v průběhu semestru může docházet ke změnám. Na příklady tak budou jednoznačně odkazovat čísla ŠT x.y

Cvičení 1 [ŠT UD 2.3, Poincaréův model Lobačevského geometrie] Po jaké dráze mezi dvěma body ve svislé rovině xy se pohybuje včela, která se snaží dosáhnout cíle za nejkratší možnou dobu? Předpokládejte, že její rychlost je úměrná výšce, $v = ky$, $k > 0$, $y > 0$, $x_1 \neq x_2$.

Cvičení 2 [ŠT 6.10, JŠT 62, Řetězovka] Určete polohu těžkého homogenního vlákna pod vlivem tíže. Návod: Mezi všemi rovinnými křivkami délky $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l$ jejichž konce leží v daných bodech (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , najděte ty, jejichž svislá souřadnice těžiště $y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{l} \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$ je minimální.

Cvičení 3 [ŠT UD 2.2, JŠT 60, Úloha o brachistochroně] Najděte rovinnou křivku spojující dva body A, B ve svislé rovině, tak aby hmotný bod vypuštěný s nulovou počáteční rychlostí z bodu A a pohybující se po této křivce vlivem tíže, dosáhl bodu B za nejkratší dobu.

Cvičení 4 [ŠT 5.1] Odvoďte Hamiltonovy rovnice přímo výpočtem derivací $\frac{\partial H}{\partial q_j}$, $\frac{\partial H}{\partial p_j}$.

Cvičení 5 [ŠT 5.3] Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu v poli konzervativních sil (v kartézských souřadnicích) a ukažte, že získané rovnice jsou ekvivalentní s rovnicemi Newtonovými.

Cvičení 6 [ŠT 5.4] Napište Hamiltonovu funkci harmonického oscilátoru.

Cvičení 7 [ŠT 5.7, JŠT 5.3] Napište Hamiltonovu funkci a sestavte Hamiltonovy rovnice částice s nábojem e a hmotností m v daném vnějším elektromagnetickém poli s potenciály $\varphi(\vec{r}, t)$, $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

Cvičení 8 [ŠT 5.2, JŠT 5.1] Napište Hamiltonovu funkci volného hmotného bodu v kartézských, sférických a cylindrických souřadnicích

Cvičení 9 [ŠT 5.5] Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu pod vlivem centrální síly s potenciálem $U(r)$ ve sférických souřadnicích. Určete integrály pohybu.

Cvičení 10 [ŠT 5.6, JŠT 5.2] Hmotný bod m je vázán na válcovou plochu $x^2 + y^2 = R^2$ a pohybuje se po ní pod vlivem centrální elastické síly $\vec{F} = -k\vec{r}$. Najděte Hamiltonovu funkci, sestavte Hamiltonovy rovnice a řešte je (v cylindrických souřadnicích).

Cvičení 11 [ŠT 5.12] Spočtěte $\{e^{\alpha q}, e^{\beta p}\}$.

Cvičení 12 [Fundamentální Poissonovy závorky] Spočtěte $\{q_i, q_j\}$, $\{p_i, p_j\}$, $\{q_i, p_j\}$.

Cvičení 13 [ŠT 5.13, JŠT 5.8] Spočítejte Poissonovy závorky pro složky hybností p_j a momentů hybností $L_i = \varepsilon_{ijk}x_jp_k$ částice tj. $\{L_i, p_j\}$ a $\{L_i, L_j\}$. Budou stejné vztahy platit i pro celkovou hybnost a celkový moment hybnosti?

Cvičení 14 [ŠT 5.15] Dokažte, že jsou-li L_1, L_2 integrály pohybu, pak i L_3 je integrálem pohybu.

Cvičení 15 [ŠT U 5.3] Dokažte Poissonovu větu: Poissonova závorka dvou integrálů pohybu je opět integrálem pohybu.

Cvičení 16 [ŠT 5.17, JŠT 5.10] Pomocí Poissonovy věty odvoďte další první integrál Hamiltonových pohybových rovnic (tj. integrál pohybu) v případě hmotného bodu pod vlivem centrální síly v otáčející se soustavě, znáte-li první integrály: $u = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} - \Omega \cdot (x_1p_2 - x_2p_1) + U(r)$, $v = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} + U(r)$.

Cvičení 17 [ŠT 5.14] Ukažte, že $\{L_3, F\} = 0$, kde $F = F(\vec{q}, \vec{p})$ je libovolná (dostatečně hladká) skalární funkce souřadnic a hybností částice.

Cvičení 18 [ŠT 5.16, JŠT 5.9] Ověřte, že složky momentu hybnosti $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ a Runge–Lenzova vektoru $\vec{A} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{L} + \alpha \frac{\vec{r}}{r}$ splňují vztahy: $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk}A_k$, $\{A_i, A_j\} = -2H\varepsilon_{ijk}L_k$, kde $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$.

Cvičení 19 [ŠT U 5.4] Najděte kanonické transformace určené vytvořujícími funkcemi a) $F_2 = \sum_k q_k P_k$, b) $F_2 = \sum_k f_k(\vec{q}, t)P_k$, c) $F_1 = \sum_k q_k Q_k$.

Cvičení 20 [ŠT 5.19] Ukažte, že transformace $Q_j = p_j$, $P_j = -q_j$ je kanonická.

Cvičení 21 [ŠT 5.20] Ukažte, že kanonická transformace $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \longrightarrow (R, \varphi, z, P_R, P_\varphi, P_z)$ definovaná vytvořující funkcí $F_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}P_R + \arctg(\frac{x_2}{x_1})P_\varphi + x_3P_z$ převádí souřadnice kartézské na cylindrické.

Cvičení 22 [ŠT 5.21] Ukažte, že transformace $Q = \arctg(\sqrt{km}\frac{q}{p})$, $P = \frac{1}{2}(\sqrt{km}q^2 + \frac{p^2}{\sqrt{km}})$ je kanonická. Užijte tuto transformaci k řešení pohybových rovnic harmonického oscilátoru $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$. Jaký fyzikální význam mají nové proměnné Q a P ?

Cvičení 23 [ŠT 5.24] Uvažujte transformaci $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$ $Q = q^\alpha \cos(\beta p)$, $P = q^\alpha \sin(\beta p)$. Pro která $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je tato transformace kanonická. Najděte příslušnou vytvořující funkci.

Cvičení 24 [ŠT U5.8] Řešte Hamilton–Jacobiho rovnici pro bezsilový volný hmotný bod popsáný Hamiltonovnou funkcí $H = \sum_{i=1}^2 \frac{p_i^2}{2m}$. Ukažte, že Hamilton–Jacobiho rovnice pro vytvořující funkce typu F_1 resp. F_2 mají úplné integrály tvarů $S_1(q_i, t, Q_i) = \frac{m}{2t} \sum_{i=1}^3 (q_i - Q_i)^2$ a $S_2(q_i, t, P_i) = -\sum_{i=1}^3 \frac{P_i^2}{2m}t + \sum_{i=1}^3 P_i q_i$.

Cvičení 25 [ŠT 5.41] Zkonstruuje hlavní funkci Hamiltonovu $S_1(q_i, t, Q_i) = \frac{m}{2t} \sum_{i=1}^3 (q_i - Q_i)^2$ integrací Lagrangeovy funkce $L = \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{q}_i^2}{2m}$ od 0 do t po skutečné trajektorii bezsilového hmotného bodu $q_i = Q_i + v_i t$.

Cvičení 26 [ŠT 5.41] Najděte kanonické transformace určené vytvořujícími funkcemi $S_1(q_i, t, Q_i) = \frac{m}{2t} \sum_{i=1}^3 (q_i - Q_i)^2$ a $S_2(q_i, t, P_i) = -\sum_{i=1}^3 \frac{P_i^2}{2m} t + \sum_{i=1}^3 P_i q_i$. Jaký geometrický tvar mají příslušné vlnoplochy $S = \text{konst}$ v konfiguračním prostoru?

Cvičení 27 [ŠT 5.38] Napište a řešte Hamilton–Jacobiho rovnici pro lineární harmonický oscilátor $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$.

Cvičení 28 [ŠT 5.43, JŠT 5.22] Ukažte, že funkce $S(q, t, Q) = m\omega \frac{(q^2 + Q^2) \cos(\omega t) - 2qQ}{2 \sin(\omega t)}$ je při $0 < t < \pi$ úplným integrálem Hamilton–Jacobiho rovnice pro harmonický oscilátor ($\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$).

Cvičení 29 [Generátor transformace] Ukažte, že veličina $L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ je generátorem rotace.

Cvičení 30 [ŠT U5.9 Nezávislé integrály pohybu] Uvažujte soustavu o s stupních volnosti, jejímž fázovým prostorem je $\mathbb{R}^{2s}$ (nebo jeho otevřená podmnožina) a jejíž Hamiltonova funkce nezávisí explicitně na čase. Ukažte, že taková soustava může mít nanejvýš $2s - 1$ integrálů pohybu, které nezávisí explicitně na čase.

Cvičení 31 [U5.11 Integrabilní soustavy] Definice integrabilní soustavy. Liouviellova věta

Cvičení 32 [ŠT 5.53] Todova Molekula. Ukažte, že lineární tříatomová molekula s Hamiltoniánem $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + e^{q_1 - q_2} + e^{q_2 - q_3} + e^{q_3 - q_1}$ je integrabilní soustava. Návod: zkoumejte první integrály H , $P = p_1 + p_2 + p_3$, $K = \frac{1}{9}(p_1 + p_2 - 2p_3)(p_2 + p_3 - 2p_1)(p_3 + p_1 - 2p_2) + (p_1 + p_2 - 2p_3)e^{q_1 - q_2} + (p_2 + p_3 - 2p_1)e^{q_2 - q_3} + (p_3 + p_1 - 2p_2)e^{q_3 - q_1}$.

Cvičení 33 [ŠT 5.55] Naděte proměnné akce – úhel v případě harmonického oscilátoru $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$.

Cvičení 34 [ŠT 7.3, JŠT 6.3] Odvoďte relativistický zákon skládání rovnoběžných rychlostí složením dvou speciálních Lorentzových transformací. Jsou speciální Lorentzovy transformace podél osy x záměnné – záleží na jejich pořadí?

Cvičení 35 [ŠT 7.2] Přesvědčte se, že Lorentzovy transformace je možno zapsat v kompaktní vektorové podobě $\vec{r}' = \vec{r} + (\frac{\gamma-1}{V^2} \vec{V} \cdot \vec{r} - \gamma t) \vec{V}$, $t' = \gamma(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{c^2})$. Návod: rozložte vektor $\vec{r}$ na dvě složky rovnoběžnou k $\vec{V}$ a kolmou k $\vec{V}$. Složky se pak transformují obdobně jako souřadnice x resp. y .

Cvičení 36 [ŠT 7.1] Najděte matici boostu (speciální Lorentzovy transformace) v libovolném směru.

Cvičení 37 [ŠT 7.4] *Odvodte relativistický zákon skládání rychlostí pro libovolnou vzájemnou orientaci obou rychlostí. Jak se zjednoduší pro $V \ll c$. Jaká bude velikost výsledné rychlosti?*

Cvičení 38 [ŠT 7.5] *Relativní rychlost dvou částic je definována jako rychlost jedné z nich v soustavě, v níž je druhá částice v klidu. Určete kvadrát v_{rel}^2 , jestliže v některé inerciální soustavě mají částice rychlosti $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.*

Cvičení 39 [Relativita současnosti a souměrnosti] *Uvažujte dvě inerciální soustavy S a S' spojené speciální Lorentzovou transformací. Určete rychlost V soustavy S' vůči soustavě S tak aby*

a) událost o souřadnicích $(ct, x, 0, 0)$ splňujících $(ct)^2 - x^2 = \Delta a^2 < 0$ v soustavě S byla v soustavě S' současná s událostí o souřadnicích $(0, 0, 0, 0)$

b) událost o souřadnicích $(ct, x, 0, 0)$ splňujících $(ct)^2 - x^2 = \Delta a^2 > 0$ v soustavě S byla v soustavě S' současná s událostí o souřadnicích $(0, 0, 0, 0)$.

Cvičení 40 [ŠT 7.9] *V horní vrstvě atmosféry vznikl mion pohybující se rychlostí $v = 0,99c$. Do svého rozpadu stihl urazit vzdálenost $l = 5\text{km}$ (v soustavě spojené se Zemí – SZ). a) Jakou dobu života mionu pozorujeme v soustavě SZ ? b) Jakou dobu života měl mion ve své klidové soustavě? c) Jak silná vrstva atmosféry prošla kolem mionu v jeho klidové soustavě?*

Cvičení 41 [ŠT 7.15] *Fizeauův pokus (1859). Fizeau měřil pomocí interferometru rychlost světla v v kapalinách tekoucích (rychlostí $\pm V$) po i proti směru šíření světla a zjistil závislost $v = \frac{c}{n} \pm V(1 - \frac{1}{n^2})$, kde n je index lomu kapaliny. Odvodte tento empirický vztah pomocí zákona skládání rychlostí. Návod: použijte Taylorův rozvoj do prvního řádu ve $\frac{V}{c}$.*

Cvičení 42 [ŠT 7.17] *Rychlost $\vec{v}$ (v soustavě S) leží v rovině xy a s osou x svírá úhel Θ , obdobně je definovaný úhel Θ' pro rychlost $\vec{v}'$ v soustavě S' . Odvodte vztah mezi Θ a Θ' při speciální Lorentzově transformaci $S \rightarrow S'$. Určete $\tan \Theta'$ pomocí Θ .*

Cvičení 43 [ŠT 7.18] *Specializujte vztah získaný v předchozím příkladu pro případ $v = v' = c$. Dopočítejte $\sin \Theta', \cos \Theta'$ jako funkce Θ . A za předpokladu malé (oproti c) vzájemné rychlosti soustav vypočítejte $\Delta\Theta = \Theta' - \Theta$.*

Cvičení 44 [ŠT 7.19 Aberace světla stálíc] *Hvězdy opisují během roku na obloze malé elipsy, kružnice nebo úsečky o úhlovém rozměru asi $41''$. Vysvětlete tento jev pohybem Země kolem Slunce rychlostí $V = 30\text{km/s}$.*

Cvičení 45 [ŠT 7.20] *Dopplerův jev. Inerciální soustavy S a S' jsou svázány speciální Lorentzovou transformací podél osy x . Soustava S je spojena s pozorovatelem, S' je klidovou soustavou zdroje monochromatické světelné vlny ve vakuu s úhlovou frekvencí $\omega' = \omega_0$. Předpokládejte, že vlna je rovinná a šíří se v soustavě S' ve směru $\vec{n}' = (\cos \Theta', \sin \Theta', 0)$ a v soustavě S ve směru $\vec{n} = (\cos \Theta, \sin \Theta, 0)$. Jakou frekvenci ω bude registrovat pozorovatel? Specializujte výsledek pro podélný ($\Theta = 0$) a příčný ($\Theta = \frac{\pi}{2}$) Dopplerův jev. Návod: fáze vlny je v obou soustavách stejná.*

Cvičení 46 [ŠT 7.27] Mezon π^0 s klidovou hmotností m_0 pohybující se rychlostí v se rozpadá na dvě stejná kvanta záření gama (fotony). Určete úhel φ který budou svírat směry pohybu fotonů.

Cvičení 47 [ŠT 7.28] Ukažte, že v nepřítomnosti vnějšího pole se foton nemůže změnit v pár elektron – pozitron.

Cvičení 48 [Comptonův Jev] Na elektron, který je v laboratorní soustavě v klidu dopadá foton s energií $h\nu_0$. Najděte závislost energie fotonu po srážce na úhlu φ , který svírá směr fotonu po srážce se směrem fotonu před srážkou.

Cvičení 49 [ŠT U7.4] Pohyb nabitě relativistické částice v magnetickém poli – cyklotronová frekvence. Určete jak se bude pohybovat nabitá částice v homogenním magnetickém poli intenzity $\vec{B} = \text{konst.}$ v nerelativistickém a relativistickém případě.

Cvičení 50 [ŠT 7.16*] Tyč vlastní délky l' je v klidu v soustavě S' , v níž svírá úhel Θ' s osou x' . Určete délku l a úhel Θ (s osou x) v soustavě S . Jsou-li soustavy S a S' spojeny speciální Lorentzovou transformací ve směru osy x .

Cvičení 51 [ŠT 7.21*] Přesvědčte se, že z transformačních vzorců pro čtyřrychlost plynou relativistické vzorce pro skládání rychlostí. Co dává transformace nultých složek?

Cvičení 52 [ŠT 7.30] Ukažte, že při pohybu nabitě částice (m_0, q) v magnetickém poli určeném vektorovým potenciálem $\vec{A} = (0, 0, A(x, y))$ se zachovává veličina $\frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + qA(x, y)$.

Cvičení 53 [ŠT 7.33] Odvoďte pohybové rovnice polí ve dvourozměrném prostoročase (t, x) a daných hustot Lagrangiánu. Indexy t, x značí parciální derivace podle t, x .

a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi_t^2 - \varphi_x^2) + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$ kde $\mu^2, \lambda > 0$.

b) sinus-Gordon $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi_t^2 - \varphi_x^2) + (\cos \varphi - 1)$.

c) Korteweg-de Vries $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Theta_x\Theta_t + \frac{\alpha}{6}\Theta_x^3 + \Theta_x\Psi_x + \frac{1}{2}\Psi^2$.

Cvičení 54 [ŠT 7.32] Odvoďte pohybovou rovnici reálného skalárního pole $\varphi = \varphi(t, x)$ jestliže $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu} - \kappa^2\varphi^2)$. (Klein-Gordon)

Cvičení 55 [ŠT U8.4 Lorentzovy transformace potenciálů a polí] Pomocí čtyřpotenciálu resp. tenzoru elektromagnetického pole odvoďte transformační vztahy pro skalární φ a vektorový $\vec{A}$ potenciál resp. pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$.

Cvičení 56 [ŠT 8.50] Vypočítejte potenciály elektromagnetického pole buzeného ve vakuu bodovým nábojem e pohybujícím se (v dané inerciální soustavě S) rovnoměrně přímočaře rychlostí $\vec{V}$. Jaký tvar mají ekvipotenciální plochy?

Cvičení 57 [ŠT 8.45] Najděte dva různé vektorové potenciály, které popisují konstantní homogenní magnetické pole $\vec{B} = (0, 0, B)$. Ukažte, že tyto vektorové potenciály spolu souvisí kalibrační transformací.

Cvičení 58 [ŠT 8.46] Určete složky vektorových potenciálů z předchozího příkladu ve sférických a cylindrických souřadnicích.

Cvičení 59 [ŠT 8.42] Jaký fyzikální smysl má veličina $\Gamma = \oint_l \vec{A} d\vec{l}$. Je tato veličina kalibračně invariantní?

Cvičení 60 [ŠT 8.43] Rozhodněte, zda je veličina $A^\mu A_\mu$ vytvořená z čtyřpotenciálu A^μ a) Lorentzovsky invariantní b) kalibračně invariantní.

Cvičení 61 [ŠT U8.2 Popis bodového náboje pomocí Diracovy δ -funkce]

Cvičení 62 [ŠT 9.52 Doba života Rutherfordova atomu] Předpokládejte, že elektron v atomu vodíku je na kruhové dráze o poloměru $R = 10^{-10} \text{m}$. Určete dobu t_c , za kterou nastane jeho pád na centrum vlivem radiačního útlumu.

Cvičení 63 [ŠT 8.35] Vypočítejte energii elektromagnetického pole náboje rozloženého s konstantní hustotou v kulovém objemu o poloměru R .

Cvičení 64 [ŠT 8.36 Klasický poloměr elektronu] Určete řádovou velikost elektronu, za předpokladu, že celá jeho hmotnost má původ v energii pole.

Cvičení 65 [ŠT 9.55 Thompsonův účinný průřez] Na volný elektron dopadá ve vakuu světelná vlna. Vypočítejte totální účinný průřez rozptylu σ_t definovaný jako poměr celkového vyzářeného výkonu W k intenzitě J_0 (lépe hustotě toku energie) dopadající vlny. Zanedbejte reakci záření a relativistické efekty.

Cvičení 66 [ŠT 9.7] Nechť je dána elektromagnetická vlna popsaná potenciály $\vec{A} = \vec{a} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, $\varphi = b \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$. Ukažte, že magnetické pole $\vec{B}$ je automaticky příčné, zatímco příčnost elektrického pole $\vec{E}$ vyžaduje splnění podmínky $b = \omega \frac{\vec{k} \cdot \vec{a}}{k^2}$. Ukažte, že za této podmínky bude vektor $\vec{B}$ kolmá na vektor $\vec{E}$.

Cvičení 67 [ŠT 9.8] Určete kalibrační transformaci, která transformuje potenciály z předchozího příkladu splňující podmínku $b = \omega \frac{\vec{k} \cdot \vec{a}}{k^2}$ na tvar $\vec{A}' = \text{veca}' \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, $\varphi' = 0$ odpovídající coulombovské kalibraci, v níž $\vec{a}' \cdot \vec{k} = 0$.