

Teoretická fyzika II

Rychlokurz

Niels

3. března 2020

Obsah

0	Variační počet	2
1	Hamiltonův formalismus	4
1.1	Hamiltonovy rovnice	4
1.2	Hamiltonova kuchařka na sestavování pohybových rovnic	6
1.3	Poissonovy závorky a integrály pohybu	7
1.4	Kanonické transformace	9
1.5	Kritéria kanoničnosti	11
1.6	Kuchařka kanonických transformací	13
1.7	Hamiltonova–Jacobiho rovnice	14
1.8	Teorém Noetherové	15
1.9	Poincarého integrální invarianty	17
2	Speciální teorie relativity	18
2.1	Matematický aparát – vektory, tenzory	19
2.2	Minkowského prostoročas	21
2.3	Lorentzova grupa	23
2.4	Čtyřveličiny v Minkowského prostoročase	27
2.5	Vztah hybnosti a energie	29
2.6	Lagrangeův a Hamiltonův formalismus v STR	30
3	Elektrodynamika	32
3.1	Maxwellovy rovnice ve vakuu	32
3.2	Maxwellovy rovnice v prostředí	34
3.3	Řešení Maxwellových rovnic metodou potenciálů	35
3.4	Rovnice elektrodynamiky v Minkowského prostoru	37
3.5	Invarianty EM pole	41
3.6	Lagrangeův formalismus pro soustavu nabitých částic v EM poli	42
3.7	Energetické veličiny a zákony zachování	45

0 Variační počet

Zde si jen ve zkratce uděláme rychlokurz do počtu variačního.

Variační počet studuje extrémy funkcí, jejichž definičním oborem je nekonečnědimenzionální prostor křivek – takové funkce nazýváme funkcionály. Budeme hledat křivky, které stacionarizují jistou funkci (funkcionál), jež zobrazuje prostor křivek do množiny reálných čísel.

Definice 0.1. **Křivkou** na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle \subset \mathbb{R}$ nazvu spojitě zobrazení $\varphi : \langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že φ je třídy $\mathcal{C}^k(x_1, x_2)$, právě když je k -krát spojitě diferencovatelná. Symbolem $\mathcal{C}^1(x_1, x_2)$ budeme značit (vektorový) prostor křivek, jež jsou spojitě diferencovatelné na intervalu (x_1, x_2) .

Definice 0.2. Prostor $\mathcal{C}^k(x_1, x_2)$ vybavený normou¹ $\|\cdot\|$ tvoří *normovaný* vektorový prostor, který budeme značit $\mathcal{L}^1(x_1, x_2)$.

Definice 0.3.

- **Variací** křivky $\varphi \in \mathcal{C}^1(x_1, x_2)$ s *volnými konci* nazveme libovolnou křivku $h \in \mathcal{L}^1(x_1, x_2)$, kterou budeme značit $h := \delta\varphi$. Toto lze ekvivalentně přeformulovat následovně: Buďte $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(x_1, x_2)$ křivky. Pak h nazveme variací křivky φ , právě když $\forall x \in (x_1, x_2)$ platí

$$\varphi + h = \psi.$$

Variace h je tedy malou změnou křivky φ .

- **Variací** křivky $\varphi \in \mathcal{C}^1(A, B)$ ² s *pevnými konci* nazveme každou křivku h z množiny

$$\mathcal{L}_0^1 := \{\varphi \in \mathcal{C}^1(x_1, x_2) \mid h(x_1) = 0 \wedge h(x_2) = 0\}.$$

U křivky s pevnými koncovými body jsou tedy variace v krajních bodech nulové.

Definice 0.4. Zobrazení $I : \mathcal{C}^1(x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme **funkcionálem**. Funkcionál bere křivku a přiřadí jí číslo.

Definice 0.5. Necht I je *diferencovatelný* funkcionál. I nabývá na křivce φ stacionární hodnoty právě tehdy, když

$$(\exists \varphi \in \mathcal{C}^1(x_1, x_2))(\forall h \in \mathcal{L}^1(x_1, x_2)) ([\delta I(\varphi)]h = 0),$$

kde $\delta I(\varphi)$ je takzvaná variace (diferenciál³) funkcionálu I na křivce φ . Takovou křivku pak nazvu **extremálou** funkcionálu I .

¹Ne jen tak ledajakou, nýbrž normou definovanou pro všechny křivky φ předpisem $\|\varphi\| := \max_{(x_1, x_2)} |\varphi| + \max_{(x_1, x_2)} |\varphi'|$.

²To je množina křivek spojujících *pevné* body $A[x_1, y_1]$, $B[x_2, y_2]$.

³Tento diferenciál je (jako v MAA3) *lineární zobrazení* (zde funkcionál).

Stále hledáme *křivky*, v nichž je *variace* funkcionálu I nulová. (Podobně jako v MA hledáme *body*, v nichž je *derivace* nulová.) V TEF se budeme zabývat funkcionály speciálního tvaru, a to

$$I(\varphi) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx, \quad (0.1)$$

kde $I: \mathcal{C}^1(x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ a $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je nějaká dvakrát spojitě diferencovatelná funkce. Proč zrovna takové funkcionály se ukáže v následující větě, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 0.6. Označme $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi'(x)$. Křivka $\varphi \in \mathcal{C}^1(A, B)$ je **extremálou** funkcionálu (0.1) právě tehdy, když podél této křivky platí

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (0.2)$$

Poznámka 0.7.

- Vidíme tedy, že jsme schopni převést hledání extrémů funkcionálu (0.1) na řešení obyčejné diferenciální rovnice (0.2).
- Označení užitá ve větě dává smysl. Zatímco v MA hraje roli nezávislé proměnné např. x , ve variačním počtu je touto nezávislou proměnnou *křivka*.
- Rovnici (0.2) říkáme Eulerova.
- Je důležité si povšimnout, že volbou $x \equiv t$, $F \equiv \mathcal{L}$, $y \equiv q$ dostáváme Hamiltonův princip, který říká: „Pohyb konzervativní soustavy s holonomními vazbami probíhá v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ po takové trajektorii $q = q(t)$, na níž funkcionál *akce*

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

nabývá stacionární hodnoty.“

Řešení Eulerovy rovnice si můžeme ještě zjednodušit pomocí integrálů pohybu. Následující větu v testových příkladech (řetězovka, brachistochrona) jistě použijeme.

Věta 0.8. Platí, že

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = C.$$

Slovy: Nezávisí-li funkce F explicitně na x , je veličina $\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F$ integrálem pohybu.

Poznámka 0.9. Opět si povšimněme, že speciální volbou $x \equiv t$, $F \equiv \mathcal{L}$, $y \equiv q$ dostáváme tvrzení, že v případě nezávislosti lagrangiánu na čase je obecná energie integrálem pohybu.

1 Hamiltonův formalismus

1.1 Hamiltonovy rovnice

Podobně jako ve formalismu Lagrangeově zkoumáme systém N hmotných bodů, který je podroben p holonomním vazbám tvaru $f_k(q_i, t) = 0$. Tyto vazby snižují počet stupňů volnosti s dle vztahu $s = 3N - p$. Eulerovy–Lagrangeovy rovnice jsou soustavou s obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Z TEF1 už víme, že pro systém bez nepotenciálových sil vypadají takto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (1.1)$$

kde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ je naše známá Lagrangeova funkce.

William Hamilton však dokázal soustavu (1.1) převést na $2s$ obyčejných diferenciálních rovnic *prvního* řádu. Hamiltonovy rovnice lze získat z tzv. *hamiltoniánu*, jenž je výsledkem Legendreovy⁴ duální transformace lagraniánu.

Mějme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x)$ a necht je konvexní (tj. $f''(x) > 0$) a $f \in \mathcal{C}^1$. Z MA1 víme, že spojitá a ryze monotonní funkce je prostá, což v tomto případě můžeme říci o f' . To nám později umožní udělat inverzi. Může se stát, že z nějakého důvodu má f dobře vyjádřitelnou derivaci, s níž se pohodlně pracuje. Rádi bychom tedy proměnnou x nahradili jinou proměnnou p , kterou s x spřáhneme vztahem

$$p := \frac{df}{dx}(x).$$

Tato transformace je regulární díky předpokladu konvexnosti. Jelikož se Legendreova transformace nazývá *duální*, bylo by záhodno, aby byl takový přechod obousměrný. Najdeme funkci g , která nás od p vrátí zpět k x . Budeme tedy požadovat, aby

$$\pm x := \frac{dg}{dp}(p).$$

(Zde jsou dvě možnosti, protože $g'(f'(x)) = x$. Pokračujme dále s volbou $+x$.) Spočteme si diferenciály funkcí f a g :

$$\begin{aligned} df &= p dx \\ dg &= x dp \end{aligned}$$

Po sečtení rovnic dále upravujeme

$$\begin{aligned} df + dg &= p dx + x dp \\ d(f + g) &= d(px), \end{aligned}$$

⁴Čti [ležándrovy].

z čehož až na konstantu (kterou ihned položíme rovnu nule) dostáváme⁵

$$g(p) = px - f(x). \quad (1.2)$$

To je Legendreova transformace pro funkci jedné proměnné. Lze ji snadno rozšířit do dimenze n . Budiž $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Budeme-li transformovat jen jednu proměnnou, nechť je to BÚNO $x_1 \rightarrow p$, proběhne to stejně jako v (1.2). Nová funkce g bude vypadat následovně:

$$g(p, x_2, \dots, x_n) = px_1 - f(x_1, \dots, x_n). \quad (1.3)$$

Budeme-li měnit k proměnných, bude g ve tvaru

$$g(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k p_j x_j - f(x_1, \dots, x_n), \quad (1.4)$$

my jsme však už kování z TEF1 a budeme používat Einsteinovu sumační konvenci.

Hamiltonova funkce vznikne z funkce Lagrangeovy Legendreovou transformací proměnných $\dot{q}_j$ na p_j (od rychlostí ke zobecněným hybnostem). Důvod je ten, že se v mechanice zachovává právě hybnost, a nikoli rychlost, což nám může ulehčit práci při řešení pohybových rovnic. Probíhá zde tedy přechod $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \rightarrow \mathcal{H}(q_j, p_j, t)$, a to následovně:

1. Zavedeme nové proměnné (zobecněné hybnosti) p_i namísto starých rychlostí $\dot{q}_i$:

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.5)$$

2. Podobně jako u funkce jedné proměnné musíme zajistit inverzní transformaci vyjádřením

$$\dot{q}_j = f_j(q_i, p_i, t). \quad (1.6)$$

3. Provedeme Legendreovu transformaci funkce $\mathcal{L}$ k nové funkci $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(q_j, p_j, t) = \left[\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \right] \bigg|_{(q_j, f_j(q_i, p_i, t), t)} \quad (1.7)$$

$$= \sum_{j=1}^s p_j f_j(q_i, p_i, t) - \mathcal{L}(q_j, f_j(q_i, p_i, t), t), \quad (1.8)$$

to je ale podle definice *obecná* energie vyjádřená v proměnných q_j, p_j, t . To se nám velmi hodí, protože za jistých podmínek se obecná energie rovná energii celkové, která se může zachovávat. Je tedy

$$\mathcal{H}(q_j, p_j, t) = E(q_j, f_j(q_i, p_i, t), t). \quad (1.9)$$

⁵Nebo ekvivalentně $g(p) = f(x) - px$.

4. Sestavíme **Hamiltonovy rovnice** (HR)

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad (1.10)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \quad (1.11)$$

Říkáme, že první sada (HR1) „nemá dynamický obsah“, protože ji dostáváme přímo z Legendreovy transformace (jen zavádí novou proměnnou).

Poznámka 1.1. Je důležité si povšimnout, že

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Hamiltonián nezávisí na čase, právě když na něm nezávisí lagrangián.

Věta 1.2. $(E = T + U) \iff \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0 \wedge \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \right)$. *Slovy: Obecná energie je rovna energii celkové, právě když je U nejhuř funkcí polohy a času a když je kinetická energie funkce homogenní stupně dva.*

1.2 Hamiltonova kuchařka na sestavování pohybových rovnic

1. Sestavíme Lagrangeovu funkci $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
2. Vyjádříme obecné hybnosti pomocí vztahu (1.5)

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_j}.$$

3. Z obecných hybností vyjádříme rychlosti $\dot{q}_j$ jako funkce poloh a hybností:

$$\dot{q}_j = f_j(q_i, p_i, t).$$

4. Určíme obecnou energii $E(q_i, \dot{q}_i, t)$. Jsou-li splněny předpoklady⁶ věty 1.2, můžeme rovnou psát

$$E = T + U.$$

5. Sestavíme hamiltonián. To znamená: Do obecné energie v proměnných $q_i, \dot{q}_i, t$ dosadíme z bodu 3 obecné rychlosti, neboli

$$\mathcal{H}(q_j, p_j, t) = E(q_j, f_j(q_i, p_i, t), t).$$

⁶Ale nikdy jindy! Například energii částice v elektromagnetickém poli musíme zobecněnou energii spočítat ručně dle definice, neboť potenciál EM pole závisí i na rychlostech!

6. Napíšeme Hamiltonovy rovnice

$$\begin{aligned}\dot{q}_j &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j},\end{aligned}$$

které řešíme pro $2s$ neznámých funkcí času $q_i = q_i(t)$ a $p_i = p_i(t)$. Říkáme jim *fázové trajektorie*. Pro fázový prostor Φ platí, že $\dim \Phi = 2s$.

1.3 Poissonovy závorky a integrály pohybu

Definice 1.3. Funkce $F = F(q_i, p_i, t)$ je **integrálem pohybu**, právě když *podél fázové trajektorie* nabývá pouze konstantní hodnoty, tj.

$$(\forall \text{ fázovou trajektorii } (q_j(t), p_j(t))) (\exists C \in \mathbb{R}) (F(q_j(t), p_j(t), t) = C),$$

neboli

$$F(q_i, p_i, t) \text{ je integrál pohybu} \iff \left. \frac{dF}{dt} \right|_{(q_j(t), p_j(t), t)} = 0.$$

Provedme totální časovou derivaci výše zmíněné funkce:

$$\left. \frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \right) \right|_{\text{podél traj.}} \stackrel{!}{=} 0.$$

„Podél trajektorie“ ale znamená, že $\dot{q}_i$ a $\dot{p}_i$ plní HR (1.10) a (1.11)! Tudíž

$$\frac{dF}{dt} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}}_{\text{ozn. } \{F, \mathcal{H}\}} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, \mathcal{H}\} + \frac{\partial F}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0.$$

Symbol $\{F, \mathcal{H}\}$ nazýváme **Poissonovou⁷ závorkou**. Máme tedy nové kritérium:

Věta 1.4. $F(q_i, p_i, t)$ je integrál pohybu $\iff \{F, \mathcal{H}\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$.

Definice 1.5. Poissonovu závorku dvou libovolných funkcí $F = F(q_i, p_i)$, $G = G(q_i, p_i)$ definujeme jako

$$\{F, G\} := \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Věta 1.6 (Vlastnosti PZ). Pro Poissonovu závorku dvou funkcí platí:

⁷Čti [poasonovou].

1. *Antisymetrie*

$$\{F, G\} = -\{G, F\}.$$

2. *Bilinearita*

$$\begin{aligned} (\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\{\alpha F_1 + F_2, G\} &= \alpha \{F_1, G\} + \{F_2, G\}), \\ (\forall \beta \in \mathbb{R}) (\{F, \beta G_1 + G_2\} &= \beta \{F, G_1\} + \{F, G_2\}). \end{aligned}$$

3. *Jacobiho identita*

$$\{\{F_1, F_2\}, F_3\} + \{\{F_2, F_3\}, F_1\} + \{\{F_3, F_1\}, F_2\} = 0.$$

4. *Leibnizovy identity*

$$\begin{aligned} \{F_1 \cdot F_2, G\} &= F_1 \{F_2, G\} + F_2 \{F_1, G\}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \{F, G\} &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\}. \end{aligned}$$

5. *Fundamentální Poissonovy závorky*

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}, \end{aligned}$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta.

Důkaz. Až na Jacobiho identitu jsou všechny vlastnosti snadno ověřitelné přímo z definice Poissonovy závorky. $\square$

Díky novému značení lze nyní HR (1.10) a (1.11) psát v kompaktnějším tvaru

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, \mathcal{H}\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, \mathcal{H}\}. \end{aligned}$$

Věta 1.7 (Poissonova). Jsou-li funkce F_1, F_2 integrály pohybu, je i $\{F_1, F_2\}$ integrálem pohybu.

Podobně jako v Lagrangeově formalismu je i u hamiltoniánu důležité si všimnout, zdali náhodou nezávisí na nějaké proměnné.

Věta 1.8 (O cyklických souřadnicích). Nechť $\mathcal{H}$ je Hamiltonova funkce.

1.

$$(\exists j \in \hat{s}) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = 0 \right) \xrightarrow{(1.11)} p_j \text{ je IP.}$$

2.

$$(\exists j \in \hat{s}) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = 0 \right) \stackrel{(1.10)}{\implies} q_j \text{ je IP.}$$

3.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \implies \mathcal{H} \text{ je IP.}$$

Důkaz. První a druhý bod jsou přímými důsledky Hamiltonových rovnic. Co se týče bodu 3, tak s využitím antisymetrie PZ máme

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0,$$

a tedy $\mathcal{H}$ je IP. □

Poznámka 1.9. V Hamiltonově formalismu pojem „cyklická hybnost“ nepoužíváme.

1.4 Kanonické transformace

O lagrangiánu víme, že se jeho tvar zachovává při každé transformaci souřadnic. Toto však obecně nemůžeme říci o hamiltoniánu, kde je naopak třída transformací zachovávajících hamiltonián velmi úzká.

Definice 1.10. Transformaci

$$\begin{aligned} Q_i &= \hat{Q}_i(q_j, p_j, t) \\ P_i &= \hat{P}_i(q_j, p_j, t) \end{aligned}$$

na fázovém prostoru Φ nazveme **kanonickou** právě tehdy, když

$$(\forall \mathcal{H}(q_j, p_j, t)) (\exists \mathcal{K}(Q_i, P_i, t)) (\forall \text{ křivku } (q_j(t), p_j(t)) \text{ na } \Phi) (\forall i, j \in \hat{s})$$

$$\left(\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \Leftrightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} \right) \wedge \left(\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \Leftrightarrow \dot{P}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i} \right).$$

Slovy: „Tvar HR se zachovává.“ Nebo: „ $(q_j(t), p_j(t))$ je fázová trajektorie na Φ , právě když jí je i $(Q_j(t), P_j(t))$.“

Otázkou je, kdy se tak stane. Postačující podmínku nám dává variační princip.⁸ Budeme chtít, aby $\delta S = \delta S'$, tj. aby

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(q_i, p_i, t)) dt \stackrel{!}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} (P_k \dot{Q}_k - \mathcal{K}(Q_l, P_l, t)) dt.$$

⁸To, jestli je to i podmínka nutná, dr. Novotný nevěděl.

Rovnost nastane, když se integrandy budou lišit nanejvýš o totální časovou derivace funkce $F = F(q_j, Q_j, p_j, P_j, t)$,⁹ neboli když bude platit

$$p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = P_k \dot{Q}_k - \mathcal{K} + \frac{dF}{dt}.$$

Takové funkci říkáme **vytvorující** funkce kanonické transformace. Podle kombinace velkých a malých proměnných, na nichž závisí, rozlišujeme čtyři druhy. Nejčastěji se setkáme s prvními dvěma.

1. $F_1 = F_1(q_j, Q_j, t)$. Spočtíme diferenciál funkce F_1 :

$$dF_1 = p_j dq_j - P_j dQ_j + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt \stackrel{!}{=} \frac{\partial F_1}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt.$$

Vidíme tedy, že má-li taková funkce existovat, nevyšetřujeme nic jiného než *exaktnost* diferenciální formy dF_1 . Dostáváme podmínky integrability:

$$\begin{aligned} p_j(q_i, Q_k) &\stackrel{!}{=} \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \\ -P_j(q_i, Q_k) &\stackrel{!}{=} \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \\ \mathcal{K} &\stackrel{!}{=} \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

2. $F_2 = F_2(q_j, P_j, t)$ získáme Legendreovou transformací $F_2 = F_1 + P_j Q_j$ a příslušné podmínky exaktnosti jsou

$$\begin{aligned} p_j(q_i, P_k) &\stackrel{!}{=} \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \\ Q_j(q_i, P_k) &\stackrel{!}{=} \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \\ \mathcal{K} &\stackrel{!}{=} \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

3. $F_3 = F_3(p_j, Q_j, t) = F_1 - p_j q_j$.

$$\begin{aligned} -q_j(p_i, Q_k) &\stackrel{!}{=} \frac{\partial F_3}{\partial p_j} \\ -P_j(p_i, Q_k) &\stackrel{!}{=} \frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \\ \mathcal{K} &\stackrel{!}{=} \mathcal{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

⁹Obecně může mít F skutečně $4s + 1$ proměnných, ale jen $2s + 1$ z nich může být nezávislých.

$$4. F_4 = F_4(p_j, P_j, t) = F_1 - q_j p_j + Q_j P_j.$$

$$\begin{aligned} -q_j(p_i, P_k) &\stackrel{!}{=} \frac{\partial F_4}{\partial p_j} \\ Q_j(q_i, P_k) &\stackrel{!}{=} \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \\ \mathcal{K} &\stackrel{!}{=} \mathcal{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.5 Kritéria kanoničnosti

Už víme, že Hamiltonův princip poskytne ekvivalentní rovnice v malých, resp. velkých proměnných, když integrandy splňují

$$p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = P_j \dot{Q}_j - \mathcal{K} + \frac{dF}{dt},$$

neboli po „vynásobení dt “

$$p_i dq_i - P_j dQ_j + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt = dF(Q, P, t).$$

Budeme se nyní zabývat otázkou, jak poznat, že jsme našli tu správnou funkci. Abychom měli co srovnávat, využijeme transformační rovnosti $q_i = q_i(Q, P, t)$. Spočítáme totální diferenciál dq_i a dosadíme do rovnosti výše. Dostaneme

$$\underbrace{\left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - P_j \right)}_{\stackrel{!}{=} \frac{\partial F}{\partial q_j}} dQ_j + \underbrace{\left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \right)}_{\stackrel{!}{=} \frac{\partial F}{\partial P_k}} dP_k + \underbrace{\left(\mathcal{K} - \mathcal{H} + p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} \right)}_{\stackrel{!}{=} \frac{\partial F}{\partial t}} dt = dF(Q, P, t).$$

Má-li tedy taková funkce $F \in \mathcal{C}^2$ existovat, musí být dF *exaktní* diferenciální forma. K tomu máme *nutnou*¹⁰ podmínku, a to uzavřenost. Musí se rovnat křížové derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial P_k \partial Q_j} &\stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial Q_k \partial P_j} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial Q_k \partial Q_j} &\stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial Q_k} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial P_k \partial P_j} &\stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial P_j \partial P_k}. \end{aligned}$$

Když tyto derivace provedeme, dostaneme z první podmínky díky záměnnosti derivací

$$\delta_{jk} \stackrel{!}{=} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial p_i}{\partial P_j} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} := [Q_j, P_k]_{q,p}.$$

¹⁰Na jednoduše souvislé množině (tj. v naší fyzice vždy) je i postačující

Výraz $[Q_j, P_k]_{q,p}$ nazýváme *Lagrangeovou závorkou*. Podobně obdržíme

$$\begin{aligned} [Q_j, Q_k]_{q,p} &\stackrel{!}{=} 0 \\ [P_j, P_k]_{q,p} &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

To je naše první kritérium kanoničnosti.

Poznámka 1.11. Zaveďme nyní tzv. *jednotné* souřadnice pro všechna $i \in \hat{s}$ vztahem

$$\begin{aligned} Z_i &= Q_i \\ Z_{i+s} &= P_i \end{aligned}$$

(stejným způsobem pro malé proměnné). Dále označme

$$\mathbb{J} := \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I}_s \\ -\mathbb{I}_s & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{O}$ je nulová a $\mathbb{I}_s$ je s -rozměrná jednotková matice. Jde o symplektickou matici o rozměrech $2s \times 2s$, pro niž platí $\mathbb{J}^T = \mathbb{J}^{-1}$ a $\mathbb{J}^T = -\mathbb{J}$. To nám umožní v kompaktní formě zaznamenat následující:

- Hamiltonovy rovnice: $\forall i \in \widehat{2s}$

$$\dot{z}_i = \mathbb{J}_{ik} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_k}.$$

- Lagrangeovu závorku dvou funkcí A, B :

$$[Z_i, Z_k]_z = \frac{\partial Z_i}{\partial A} \mathbb{J}_{ik} \frac{\partial Z_k}{\partial B}.$$

- Poissonovu závorku dvou funkcí A, B :

$$\{A, B\}_z = \frac{\partial A}{\partial z_i} \mathbb{J}_{ik} \frac{\partial B}{\partial z_k}.$$

- První kritérium kanoničnosti: $[Z_i, Z_k]_z = \mathbb{J}_{ik}$.

Lemma 1.12. *Platí, že*

$$\sum_i \{Z_i, Z_j\}_z [Z_i, Z_k]_z = \delta_{jk}.$$

Toto lemma lze snadno dokázat přímo z definice příslušných závorek. Využíváme přitom derivace složených funkcí $z = z(Z(z))$ a $Z = Z(z(Z))$. Také nám toto tvrzení pomůže odvodit druhé kritérium kanoničnosti. Je-li

totiž transformace kanonická, tj. $[Z_i, Z_k]_z = \mathbb{J}_{ik}$, dostaneme vynásobením rovnosti výrazem $\mathbb{J}_{lk}$ druhé kritérium kanoničnosti:

$$\{Z_l, Z_j\}_z = \mathbb{J}_{lj},$$

což po složkách znamená

$$\{Q_l, P_j\} = \delta_{lj}$$

$$\{Q_l, Q_j\} = 0$$

$$\{P_l, P_j\} = 0.$$

1.6 Kuchařka kanonických transformací

Budeme řešit dva typy úloh:

- Dostaneme vytvořující funkci F_i , $i \in \hat{4}$, z níž máme odvodit tvar příslušné transformace $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$. Stačí dosadit předpis F_i do příslušné sady vztahů (1.13) až (1.16) a tyto vztahy vyjádřit.
- Dostaneme transformační vztahy a naším úkolem bude ověřit kanoničnost této transformace a najít generující funkci F_i . Zpravidla se bude jednat o *bezčasové* přechody, a tudíž ani vytvořující funkce nebude na čase záviset. Nejčastěji bude úloha koncipována tak, aby existovala alespoň jedna z F_1 nebo F_2 . Postup by vypadal zhruba takto:

1. Dostaneme transformaci $Q_i = Q_i(q_j, p_j)$ a $P_i = P_i(q_j, p_j)$.¹¹
2. Podívejme se, na čem závisí funkce $F_1 = F_1(q_j, Q_j)$. Abychom mohli integraci řešit parciální diferenciální rovnice (1.13), musíme zbývající proměnné (tj. P_j, p_j) vyjádřit *jako funkce* proměnných F_1 . Formálně zapsáno bychom tedy rádi našli

$$p_j = f_j(q_i, Q_i)$$

$$P_j = g_j(q_i, Q_i).$$

Není-li možné toto vyjádření provést nebo by to bylo příliš složité, zkusíme stejnou úvahu aplikovat na jinou funkci F_i .

3. *Nutnou* podmínkou exaktnosti diferenciální formy je její uzavřenost. Než začneme řešit (1.13), vyplatí se zjistit, zda má vůbec cenu se snažit, a to výpočtem

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q \partial q} \stackrel{?}{=} \frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q}.$$

Tato podmínka je pouze nutná! (Stačí ale k *lokální* exaktnosti a na jednoduše souvislé množině už je pro exaktnost postačující.)

¹¹Zadání se však může zkomplikovat tím, že dostaneme zadáno $q = q(Q, P)$, $p = p(Q, P)$.

4. Poté si vybereme jednu z rovnic (1.13).¹² Samozřejmě si zvolíme tu, která se bude lépe integrovat, například první z nich. Je-li nyní pro jednoduchost $s = 1$, počítáme integrál $F_1(q, Q) = \int p \, dq$, kde p jsme našli v bodě 2. Nezapomeňme, že výsledek (včetně konstanty!) stále závisí na Q . Tuto konstantu určíme dosazením do druhé rovnice. S trochou štěstí vyjde $C' = 0$, načež ji můžeme položit rovnu nule. (Je-li počet stupňů volnosti vyšší, musíme takto integrovat dále). Tím získáme finální tvar $F_1(q, Q)$. Podobně to probíhá i u ostatních funkcí F_i .

Věta 1.13 (Kritérium kanoničnosti). *Mějme bezčasovou transformaci*

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_k(q_j, p_j) \\ P_k &= P_k(q_j, p_j). \end{aligned}$$

Tato transformace je kanonická právě tehdy, když

$$(\forall k, l \in \hat{s}) \left(\{Q_k, Q_l\}_{q,p} = 0 \wedge \{P_k, P_l\}_{q,p} = 0 \wedge \{Q_k, P_l\}_{q,p} = \delta_{kl} \right).$$

Poznámka 1.14. Toto kritérium je výhodné, když $s = 1$, neboť díky antisymetrii stačí ověřit jen $\{Q, P\} = 1$.

1.7 Hamiltonova–Jacobiho rovnice

V ideálním případě bychom byli rádi, kdyby výsledný kamiltonián $\mathcal{K}$ byl identicky nulový. Pak bychom totiž řešili jednoduché diferenciální rovnice $\dot{Q}_j = 0$ a $\dot{P}_j = 0$, což jistě zvládneme.

Budeme tedy hledat vytvářející funkci $F_2 = F_2(q_i, P_i, t)$, aby

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F_2(q_i, P_i, t)}{\partial t} \equiv 0.$$

K tomu si musíme ze vztahu pro vytvářející funkce F_2 (soustava (1.14)) vyjádřit p_i a dosadit do hamiltoniánu. Řešíme pak tzv. *Hamiltonovu–Jacobiho rovnici* (HJR)

$$\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (1.17)$$

kde funkce $S = S(q_i, t, P_i)$ je v podstatě F_2 . Vidíme tedy, že systém lze popsat jedinou parciální diferenciální rovnicí prvního řádu, jejíž řešení (funkci S) nazýváme *hlavní funkcí Hamiltonovou* nebo též úplným integrálem. Je závislá na $s + 1$ konstantách (hybnostech P_i), z nichž jedna je aditivní.

¹²Poslední rovnice každé série nás tolik nezajímá, protože kamiltonián díky bezčasovosti transformace vznikne pouhým dosazením do hamiltoniánu.

Věta 1.15 (Jacobiho). *Nechť S je hlavní funke Hamiltonova. Pak rovnosti*

$$\begin{aligned} p_j(q_i, P_k) &= \frac{\partial S}{\partial q_j} \\ Q_j(q_i, P_k) &= \frac{\partial S}{\partial P_j} \end{aligned}$$

určují pohyb soustavy s hamiltoniánem $\mathcal{H}$.

Důkaz. Vyjádříme-li z druhé sady $q_j = q_j(t, \underbrace{Q, P}_{\text{konst.}})$ a dosadíme do rovnic pro p_j , obdržíme $p_j = p_j(t, \underbrace{Q, P}_{\text{konst.}})$. To jsou ale fázové trajektorie, podél nichž se systém pohybuje. $\square$

Vidíme tedy, že z funkce S dovedeme pouhým derivováním vyjádřit fázové trajektorie. Navíc je $\mathcal{H} = -\partial S / \partial t$. Díky této skutečnosti se navíc snadno s využitím (1.14) přesvědčíme, že

$$\left. \frac{dS(q_i, t, P_i)}{dt} \right|_{\text{podél traj.}} = \mathcal{L},$$

z čehož plyne, že integrací HFH jakožto funkce horní meze dostaneme akci:

$$S(q_i(t), t, P_k) = \int_{t_1}^t \mathcal{L} d\tau.$$

1.8 Teorém Noetherové

Označme symbolem Γ fázový prostor. Mějme funkci $G: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $G = G(q_i, p_i)$. Nechť hamiltonián ani funkce G nezávisí na čase. K takové funkci (budeme jí říkat *generátor*) můžeme sestrojit tzv. hamiltonovské vektorové pole

$$X_G := \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial G}{\partial q_i} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

To lze chápat tak, že každém bodě fázového prostoru vygeneruje pole X_G „šipku“. Hledejme nyní integrální křivku $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$,

$$\gamma(\varepsilon) := \begin{pmatrix} q_i(\varepsilon) \\ p_i(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

a zkoumejme, jak se podél ní bude chovat hamiltonián. Integrální křivka je definována tak, že v každém bodě je její tečný vektor shodný s vektorem pole X_G v onom bodě, neboli budeme chtít, aby

$$\frac{d\gamma}{d\varepsilon}(\varepsilon) \stackrel{!}{=} X_G(\gamma(\varepsilon)),$$

po složkách:

$$\frac{dq_i}{d\varepsilon} \stackrel{!}{=} \frac{\partial G}{\partial p_i}(q_i(\varepsilon), p_i(\varepsilon)) \quad (1.19)$$

$$\frac{dp_i}{d\varepsilon} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial G}{\partial q_i}(q_i(\varepsilon), p_i(\varepsilon)). \quad (1.20)$$

Abychom prozkoumali chování hamiltoniánu podél křivky γ , musíme se po ní nějak posouvat. K tomu nám poslouží tzv. *tok pole*, což je zobrazení $\Phi_\varepsilon: \Gamma \rightarrow \Gamma$, které provádí následující přiřazení:

$$\forall \varepsilon: \Phi_\varepsilon: \gamma(\varepsilon_0) \mapsto \gamma(\varepsilon_0 + \varepsilon).$$

Toto zobrazení má zajímavé vlastnosti:

1. $\Phi_0 = \text{id}$
2. $\Phi_{\varepsilon_2} \circ \Phi_{\varepsilon_1} = \Phi_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$
3. $\Phi_\varepsilon^{-1} = \Phi_{-\varepsilon_1}$
4. Je asociativní.

To ale není nic jiného než axiomy *jednparametrické grupy*! Definujme tedy přechod k velkým proměnným $\forall j \in \hat{s}$ takto

$$Q_j(\varepsilon) := q_j(\varepsilon_0 + \varepsilon) = [\Phi_\varepsilon(q_i(\varepsilon_0), p_i(\varepsilon_0))]_j \quad (1.21)$$

$$P_j(\varepsilon) := p_j(\varepsilon_0 + \varepsilon) = [\Phi_\varepsilon(p_i(\varepsilon_0), p_i(\varepsilon_0))]_{j+s} \quad (1.22)$$

Znamená to, že vezmeme bod fázového prostoru a *aktivně* ho pomocí toku Φ posuneme po křivce γ . Nyní se ptáme, jestli se bude hamiltonián zachovávat:

$$\forall \varepsilon: \mathcal{H}(Q_i(\varepsilon), P_i(\varepsilon)) \stackrel{?}{=} \mathcal{H}(q_i(\varepsilon_0), p_i(\varepsilon_0)).$$

Aby tomu tak bylo, nesmí $\mathcal{H}$ na ε záviset. Provedeme-li tedy totální derivaci $d\mathcal{H}/dt$ a položíme-li ji rovnu nule, zjistíme, že tomu tak bude, pokud

$$\{\mathcal{H}, G\} = 0,$$

neboli když G bude integrálem pohybu. Odsud máme první část tvrzení teorému Noetherové:

Je-li funkce $G(q_i, p_i)$ integrálem pohybu, tj. $\{G, \mathcal{H}\} = 0$, pak je hamiltonián invariantní podél integrálních křivek generovaných polem X_G . Jinými slovy: Funkce G generuje transformaci, která je symetrií $\mathcal{H}$.

Stejnou proceduru však můžeme provést při záměně rolí G a $\mathcal{H}$, neboli vygenerujeme pole $X_{\mathcal{H}}$ a budeme zkoumat, jak se kolem jeho integrálních křivek bude chovat funkce G . Integrálními křivkami pole $X_{\mathcal{H}}$ jsou však jen a pouze *fázové trajektorie*! Přejmenujeme-li sugestivně v transformačních vztazích (1.19), (1.20) parametr ε na t a funkci G nahradíme hamiltoniánem $\mathcal{H}$, obdržíme Hamiltonovy rovnice – to je druhá část našeho teorému. Shrňme si ho nyní do jedné věty.

Věta 1.16 (Teorém Emmy Noetherové). *Budťe $G = G(q_i, p_i)$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i)$. Pak platí:*

- *Je-li $\{G, \mathcal{H}\} = 0$, pak je $\mathcal{H}$ invariantní vůči jednoparametrické grupě transformací generovaných funkcí G , neboli $\mathcal{H}$ se zachovává podél integrálních křivek hamiltonovského vektorového pole X_G .*
- *Funkce G je invariantní vůči jednoparametrické grupě transformací generovaných Hamiltonovou funkcí $\mathcal{H}$, neboli G se zachovává podél fázové trajektorie (je integrálem pohybu).*

Pravá síla věty Noetherové je poznat z následující věty.

Věta 1.17 (O duální povaze pozorovatelných). *Každá pozorovatelná veličina $G = G(q_i, p_i)$ je generátorem jisté infinitezimální kanonické transformace.*

Důkaz. V tuto chvíli nemůžeme na funkci G jen tak použít některé z našich kritérií kanoničnosti, protože nevíme, jak vypadá. Můžeme však považovat transformaci z tvrzení věty za *složení* nekonečně mnoha infinitezimálních krůčků. Provedme ve vztazích (1.21), (1.22) Taylorův rozvoj do prvního řádu se středem v bodě ε_0 . Pak s využitím definice integrální křivky γ (rovnice (1.19), (1.20)) dostaneme po vyčíslení derivací v bodě $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$\begin{aligned} Q_j(\varepsilon) &\stackrel{\text{T}}{=} q_j(\varepsilon_0) + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \\ P_j(\varepsilon) &\stackrel{\text{T}}{=} p_j(\varepsilon_0) - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Nyní pomocí kritéria kanoničnosti (věta 1.13) zjistíme, že tato infinitezimální transformace je skutečně kanonická. Zbývá už jen ověřit, že kanonické transformace tvoří grupu, neboli že

- Složení dvou kanonických transformací je opět kanonická transformace. To už stačí k dokončení důkazu této věty – složením kanonických transformací kanoničnost nenarušíme.
- Existuje inverzní prvek: ten je dán vytvořující funkcí $-F$.
- Existuje jednotkový prvek: tím je vytvořující funkce $F_2 = q_i P_i$.
- Jsou asociativní.

□

1.9 Poincarého integrální invarianty

Na přednášce jsme se ještě zmínili o tzv. Poincarého integrálních invariantech. Měli bychom si odsud odnést hlavně tuto větu:

Věta 1.18 (Poincaré¹³). *Na každé podvarietě fázového prostoru Ω_{2l} (sudé*

¹³Čti [poankaré].

dimenze) jsou tyto integrály invarianty kanonických transformací:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_2} \sum_j dq_j \wedge dp_j \\ I_2 &= \int_{\Omega_4} \sum_{j,k} dq_j \wedge dp_j \wedge dq_k \wedge dp_k \\ &\vdots \\ I_s &= \int_{\Omega_{2s}} dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_s \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_s. \end{aligned}$$

Symbolem $\wedge$ značíme operaci na prostoru diferenciálních forem zvanou *vnější součin*. Jsou-li dx, dy diferenciální formy, pak

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= -dy \wedge dx \\ dx \wedge dx &= 0. \end{aligned}$$

Těchto vlastností jsme využili v důkazu věty. Symbolem d myslíme zobrazování, které diferenciální k -formě přiřadí $(k+1)$ -formu. Říkáme mu *vnější derivace*.

Všimněme si, že integrál I_s představuje objem elementu fázového prostoru ($\dim \Gamma = 2s$). Jeho invariance vůči kanonickým transformacím znamená, že *objem fázového prostoru se ve všech souřadnicích počítá stejně* – vzorec pro jeho výpočet se nemění. Můžeme ale kanonické transformace interpretovat i *aktivně*. Pak dostáváme Liouvilleovu větu: *Objem libovolné oblasti fázového prostoru se při aktivní kanonické transformaci nemění.*¹⁴

2 Speciální teorie relativity

V roce 1864 zformuloval Maxwell svou teorii elektromagnetického (EM) pole, z níž vyplynulo, že existuje EM vlnění šířící se konečnou rychlostí c . Ukázalo se však, že Maxwellovy rovnice nejsou invariantní vůči Galileiho transformacím, tedy že v různých systémech dávají různé výsledky. Panoval názor, že Maxwellovy rovnice jsou nesprávné, a tak byla snaha vysvětlit elektřinu a magnetismus pomocí zákonů mechaniky, jež do té doby byly k dispozici, např. pomocí *éteru*. Všichni známe slavný Michelsonův–Morleyho experiment, v němž se jeho existenci prokázat nepodařilo. Možná tedy nastal čas uvěřit, že maxwellky opravdu správné jsou, a naopak pomocí nich přeformulovat mechaniku.

Definice 2.1. Existuje kartézský systém, vůči němuž se každý volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře. O takovém systému budeme říkat, že je *inerciální*. Jakmile takový systém existuje, existuje jich nekonečně mnoho.

¹⁴Tato skutečnost je ve skriptech zvětšena pomocí legendární transformace kočky.

Fyzici vymýšleli transformace tak, aby MR zůstaly invariantní. V roce 1905 však Einstein postupoval opačně: vyslovil postuláty a z nich Lorentzovy transformace odvodil.

- I. postulát STR: *Všechny fyzikální děje probíhají ve všech inerciálních soustavách podle stejných zákonů.*
- II. postulát STR: *Světlo se ve vakuu vůči všem inerciálním soustavám šíří rovnoměrně přímočaře konečnou rychlostí*

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}.$$

2.1 Matematický aparát – vektory, tenzory

Definice 2.2. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $\dim V = n < +\infty$. Prostor *duální* k V budeme značit $V^\#$. Je to prostor všech lineárních funkcí (kovektorů). Je-li $\mathcal{E} = (\vec{e}_i)_{i=1}^n$ báze prostoru V , pak bázi k ní duální budeme značit $\mathcal{E}^\# = (\underline{e}^i)_{i=1}^n$, přičemž platí, že $\underline{e}^i(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$.¹⁵

Přejdeme-li ve V k nové bázi $\tilde{\mathcal{E}} = (\widetilde{\vec{e}}_i)_{i=1}^n$, budou se bazické vektory transformovat takto:

$$\widetilde{\vec{e}}_i = \vec{e}_j S_i^j, \quad (2.1)$$

kde $S = (S_i^j) \in \text{GL}(n)$ je tzv. matice přechodu mezi bázemi. Vektory jakožto elementy V lze vyjádřit v bázích $\mathcal{E}$, resp. $\tilde{\mathcal{E}}$ takto:

$$\vec{v} = v^j \vec{e}_j, \text{ resp. } \vec{v} = \tilde{v}^i \widetilde{\vec{e}}_i \stackrel{(2.1)}{=} \tilde{v}^i \vec{e}_j S_i^j.$$

Srovnáním dostáváme transformační vztahy

$$v^j = S_i^j \tilde{v}^i \quad (2.2)$$

$$\tilde{v}^k = (S^{-1})_j^k v^j. \quad (2.3)$$

Vektorům, které se řídí rovností (2.3), říkáme *kontravariantní*, protože se transformují pomocí matice S^{-1} , tedy *proti* bázi $\mathcal{E}$.

Funkcionály (kovektory) jakožto elementy duálního prostoru $V^\#$ lze v bázích $\mathcal{E}^\#$, resp. $\tilde{\mathcal{E}}^\#$ vyjádřit jako

$$\underline{\varphi} = \varphi_j \underline{e}^j, \text{ resp. } \underline{\varphi} = \tilde{\varphi}_i \widetilde{\underline{e}}^i$$

a odsud pomocí slavné věty 20 z LAL1 máme

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_j S_i^j.$$

Takovým objektům říkáme *kovariantní* vektory, jelikož se transformují stejným způsobem jako báze $\mathcal{E}$.

¹⁵V LAL1 bychom to zapsali jako $e_i^\#(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$.

Poznámka 2.3. Je třeba rozlišovat, že

- U VEKTORŮ zápis $\vec{e}_i$ značí i -tý prvek báze $\mathcal{E}$ a v^j značí j -tou složku vektoru $\vec{v} \in V$.
- U KOVEKTORŮ zápis $\underline{e}^i$ značí i -tý prvek báze $\mathcal{E}^\#$ a φ_j značí j -tou složku kovektoru (funkcionálu) $\varphi \in V^\#$.

Duální báze $\mathcal{E}^\#$ se transformuje *kontravariantně* (opačně nežli $\mathcal{E}$):

$$\widetilde{\underline{e}}^i = (S^{-1})^i_j \underline{e}^j. \quad (2.4)$$

Definice 2.4. Tenzorem typu (p, q) nad V nazveme každé multilineární zobrazení

$$T: \underbrace{V \times \cdots \times V}_q \times \underbrace{V^\# \times \cdots \times V^\#}_p \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Množinu všech tenzorů typu (p, q) nad V budeme značit $T_q^p(V)$, přičemž dodefinujeme $T_0^0(V) := \mathbb{R}$.

Na prostoru $T_q^p(V)$ lze zavést sčítání tenzorů a násobení číslem. Například složky tenzoru typu $(1, 1)$ v bázi $\mathcal{E}$ získáme takto:

$$T_j^i := T(\vec{e}_j, \underline{e}^i), \quad (2.5)$$

tj. pustíme tenzor na j -tý prvek báze $\mathcal{E}$ a na i -tý prvek báze k ní duální. Z TEF1 už víme, že jednou kontra- a jednou kovariantní tenzor se transformuje následovně:

$$\tilde{T}_j^i = T(\widetilde{\vec{e}}_j, \widetilde{\underline{e}}^i) = \cdots = (S^{-1})^i_l T_k^l S_j^k.$$

Definice 2.5. **Pseudometrickým tenzorem** na V nazveme každý tenzor g typu $(0, 2)$, který splňuje, že

1. je nede degenerovaný: $(\forall \vec{w} \in V)(g(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0})$.
2. je symetrický: $(\forall \vec{v}, \vec{w})(g(\vec{v}, \vec{w}) = g(\vec{w}, \vec{v}))$.

Správně by g měl být nazýván *pseudometrickým*, protože nedefinuje metriku¹⁶ – na to bychom potřebovali mít zaručenou pozitivní definitnost. Je-li g bilineární symetrická forma, lze k ní najít tzv. *polární bázi*, v níž má g tvar

$$(g_{ij}) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_s, \underbrace{0, \dots, 0}_l),$$

kde trojici (r, s, l) nazveme signaturou tenzoru g . Díky nede degenerovanosti je $l = 0$.

¹⁶Důvod je ten, že v LAL2 jsme skalárním součinem nazvali každou hermitovskou formu s *pozitivně definitní* diagonálou. Naše g je sice hermitovská forma, ale její diagonála (tedy příslušná kvadratická forma) obecně PD není. Z MAA3 víme, že skalární součin indukuje normu a ten metriku, zde bychom ale měli správně použít předponu *pseudo*-.

Poznámka 2.6 (Co je metrický tenzor?). Americká města jsou známá svými mřížovitými půdorysy. Chceme-li se v takovém městě dostat z bodu A do bodu B autem, musíme jet samozřejmě po silnici, přičemž ujedeme vzdálenost

$$\varrho_{\text{taxi}} = \sum_{i=1}^2 |a_i - b_i|,$$

kde dimenze našeho města je $n = 2$. Orel však takové omezení nemá, takže může letět „přímo“ a urazí vzdálenost

$$\varrho_{\text{eukl}} = \left(\sum_{i=1}^2 |a_i - b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

V obou případech jde o nejkratší vzdálenost, a přesto jsou různé – je totiž mnoho způsobů, jak měřit vzdálenost. Metrický tenzor uchovává informaci o tom, jak je prostor zakřivený a jak v něm vzdálenost měřit. V našem (eukleidovském) světě, je metrický tenzor dán jednotkovou maticí:

$$g_{\text{eukl}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To je matice pozitivně definitní kvadratické formy, takže když s ní zapůsobíme na vektor $\vec{x} = (\Delta x_1 \quad \Delta x_2 \quad \Delta x_3)^T$ podle vztahu $g(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^T g_{\text{eukl}} \vec{x} \stackrel{\text{ozn.}}{=} (\Delta l)^2$, dostaneme

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2,$$

což je naše stará známá Pythagorova věta. V tomto případě g skutečně indukuje normu a potažmo metriku bez předpony *pseudo*-. Problémy však nastávají v neeukleidovských prostorech: např. na sféře je metrický tenzor reprezentován maticí

$$g_{\text{sf}} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Prostor, v němž operuje newtonovská fyzika, je eukleidovský. Dlouho se mělo za to, že by to tak mělo být i v STR, Einstein, Lorentz a Poincaré však zjistili, že to tak nefunguje.

2.2 Minkowského prostoročas

Minkowski jako první sjednotil časovou a prostorovou souřadnici do tzv. *prostoročasu*. Matematicky jde o dvojici $\mathbb{E}(1, 3) = (\mathbb{R}^4, g_{\mu\nu})$, tedy o čtyřrozměrný reálný vektorový prostor vybavený *pseudoskalárním* součinem, který

je určen pseudometrickým tenzorem $g \in T_2^0(\mathbb{R}^4)$ s *indefinitní* maticí¹⁷

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Elementy Minkowského prostoru nazýváme *čtyřvektory*. Budeme jejich kontravariantní složky značit takto:

$$X = (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Působení pseudometrického tenzoru na dva čtyřvektory X, Y probíhá dle definice následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \\ &= x^\mu y_\mu && \text{snížení indexu u } y^\nu \\ &= x_\nu y^\nu && \text{snížení indexu u } x^\mu \\ &= x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3. \end{aligned}$$

Poznámka 2.7. Tzv. snižování či zvyšování indexů má svůj původ ve ztožňování prostorů V a $V^\#$, do kterého se zde nebudeme pouštět. Je třeba vědět, že indexy se *snižují* takto:

$$v_i = g_{ij} v^j \quad (2.7)$$

a *zvyšují* se takto:

$$\varphi^i = g^{ij} \varphi_j. \quad (2.8)$$

Kovariantní složky čtyřvektoru tedy získáme snížením indexů u x^ν :

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (2.9)$$

což znamená, že maticí $(g_{\mu\nu})$ zapůsobíme na vektor (x^μ) :

$$(x_\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \neq (x^\mu). \quad (2.10)$$

Zde je důležité si povšimnout zásadního rozdílu oproti eukleidovskému prostoru $\mathbb{E}(3)$. V něm je $g_{ij} = \delta_{ij}$, takže při zvýšení indexu zjistíme, že

$$x^i = g^{ij} x_j = \delta_{ij} x_j = x_i,$$

¹⁷Někteří autoři používají matici se signaturou $(-+++)$.

tedy že kontra- a kovariantní složky splývají.

Zapůsobíme-li tenzorem g na tentýž čtyřvektor X , dostaneme podobně jako v eukleidovském prostoru číslo, které bude reprezentovat „vzdálenost“ v Minkowského prostoročase, a sice *kvadrát prostoročasového intervalu*:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.11)$$

$$= dx^\mu dx_\mu \quad (2.12)$$

$$= c^2 dt^2 - dl^2. \quad (2.13)$$

Úspornějším zápisem ds^2 míníme ve skutečnosti $(ds)^2$.

Kvůli indefinitnosti matice (g_{ij}) může kvadrát intervalu (2.13) nabývat kladné, záporné i nulové hodnoty. Podle znaménka rozlišujeme interval

- *časupodobný* pro $ds^2 > 0$,
- *světlu podobný* pro $ds^2 = 0$,
- *prostorupodobný* pro $ds^2 < 0$.

2.3 Lorentzova grupa

Tak jako je v $\mathbb{E}(3)$ Galileiho transformacemi zachována vzdálenost $(dl)^2$, existují v Minkowského prostoročase transformace, které nemění tvar prostoročasového intervalu $(ds)^2$. Tyto transformace nazýváme *Lorentzovými*.

Definice 2.8. *Lorentzovou grupou* nazveme grupu reálných lineárních transformací Minkowského prostoročasu, které ponechávají indefinitní kvadratickou formu

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (2.14)$$

invariantní. Tyto transformace jsou tvaru

$$x'^\mu = \alpha^\mu_\nu x^\nu \quad (2.15)$$

nebo vektorově

$$X' = \mathbb{A}X, \quad (2.16)$$

kde

- $X = (x^\mu)$ je čtyřvektor s kontravariantními složkami $(ct \ x \ y \ z)^T$; x^μ , resp. x'^μ jsou souřadnice světobodů v inerciálních soustavách S , resp. S' .
- $\mathbb{A}$ je Lorentzova matice tvaru

$$\mathbb{A} = (\alpha^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \alpha^0_0 & \dots & \alpha^0_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^3_0 & \dots & \alpha^3_3 \end{pmatrix}.$$

- Vztah (2.14) lze zapsat i vektorově:

$$s^2 = X^T \mathbb{G} X, \quad (2.17)$$

kde $\mathbb{G} = (g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ je matice pseudometrického tenzoru g .

Podmínka invariance kvadrátu intervalu, jak to požaduje (2.14), je ekvivalentní s invariancí tenzoru g , tj. $g'_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} g_{\mu\nu}$. To ale znamená, že matice $\mathbb{A}$ musí plnit tzv. relace pseudoortogonalit:

$$g_{\zeta\eta} \stackrel{!}{=} g_{\mu\nu} \alpha_{\zeta}^{\mu} \alpha_{\eta}^{\nu}, \quad (2.18)$$

vektorově

$$\mathbb{G} \stackrel{!}{=} \mathbb{A}^T \mathbb{G} \mathbb{A}. \quad (2.19)$$

Tyto relace se opět nazývají *pseudo-*, protože klasická ortogonalita je definována vztahem $\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \mathbb{I}$. To by zde nastalo, jen kdyby $\mathbb{G} = \mathbb{I}$.

Definice 2.9. Lorentzovou grupou nazveme množinu

$$O(1, 3) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{4,4} \mid \mathbb{G} = \mathbb{A}^T \mathbb{G} \mathbb{A}\}.$$

Musí se ukázat, že Lorentzovy transformace skutečně tvoří grupu, tj. ověřit asociativitu, existenci jednotkového a inverzního prvku a uzavřenost na součin.

Lorentzova grupa má čtyři komponenty souvislosti, tj. z topologického hlediska se rozpadá na čtyři podmnožiny, z nichž každá je souvislá¹⁸. Tyto komponenty si nyní ukážeme.

- Jedna komponenta je určena znaménkem determinantu matice $\mathbb{A}$. Máme totiž

$$\begin{aligned} \det \mathbb{G} &= \det \mathbb{A}^T \det \mathbb{G} \det \mathbb{A} \\ 1 &= (\det \mathbb{A})^2 \\ |\det \mathbb{A}| &= 1. \end{aligned}$$

- Je-li $\det \mathbb{A} = 1$, mluvíme o *vlastních* Lorentzových transformacích. Ty tvoří podgrupu $O(1, 3)$, kterou budeme značit $SO(1, 3)$.
- Pro $\det \mathbb{A} = -1$ jde o *nevlastní* Lorentzovy transformace. Ty podgrupu netvoří, jelikož součin dvou LT (to odpovídá složení) dává vlastní LT.

- Podle znaménka prvku α_0^0 rozlišujeme transformace

¹⁸Množina je souvislá, právě když ji nelze napsat jako sjednocení dvou neprázdných vzájemně disjunktčních otevřených (či uzavřených) množin.

- *ortochronní*, je-li $\alpha_0^0 > 0$. Nemění směr chodu času a tvoří podgrupu se značkou $O^+(1, 3)$.
- *neortochronní*, je-li $\alpha_0^0 < 0$. Mění směr chodu času a netvoří podgrupu.

Dále budeme uvažovat jen vlastní ortochronní transformace, tj. grupu $SO^+(1, 3)$. I ta má své podgrupy, a sice:

- Matice tvaru

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \mathbb{M} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{M} \in SO(3)$, tj. $\mathbb{M}$ je ortogonální a $\det \mathbb{M} = 1$. Jde tedy o podgrupu *prostorových* rotací.

- **Speciální LT** ve stejném směru, též zvané *boosty*. Pro transformaci ve směru osy x má matice tvar

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

kde $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Odsud získáváme jejich explicitní tvar:

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c}x \right) \quad (2.21)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.22)$$

$$y' = y$$

$$z' = z.$$

Složení dvou boostů ve stejném směru je opět boost, v různých směrech nikoli.

Poznámka 2.10. V částicové fyzice se často pracuje s tzv. *rapidity* μ , již zavádíme vztahem $\tanh \mu = \beta$. Pomocí hyperbolických identit lze odvodit, že $\gamma = \cosh \mu$ a $\beta\gamma = \sinh \mu$, a tak je boost (2.20) možné přepsat pomocí rapidity:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cosh \mu & -\sinh \mu & 0 & 0 \\ -\sinh \mu & \cosh \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Vezmeme-li dvě události vzdálené v soustavě S o $\Delta t = t_2 - t_1$ a $\Delta x_2 - x_1$, máme pomocí (2.21), (2.22) v soustavě S' :

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \quad (2.24)$$

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t). \quad (2.25)$$

Odsud je vidět, že události, které jsou současné v S , vůbec nemusí být současné v S' !

Pomocí těchto poznatků lze odvodit **dilataci času**

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t, \quad (2.26)$$

kde $\Delta t'$ nazveme přírůstkem *vlastního času* τ – to je čas v klidové soustavě objektu. Platí

$$\tau = \frac{t}{\gamma}. \quad (2.27)$$

V soustavách, které se vůči S pohybují, plyne čas pomaleji. Vlastní čas je významný tím, že je to relativistický invariant. Snadno obdržíme i **kontrakci délek**

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.28)$$

$$l = \frac{l_0}{\gamma}, \quad (2.29)$$

kde l_0 je tzv. *klidová délka* objektu.

Relativistické skládání rychlostí je s pomocí speciální LT ve směru x dáno těmito vzorci¹⁹

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

$$v'_{y,z} = \frac{v_{y,z} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} v_{y,z}}.$$

¹⁹ V je rychlost, s níž se soustava S' pohybuje ve směru osy x vůči soustavě S . Dále je v'_{xyz} příslušná složka rychlosti objektu v soustavě S' . Při odvození využíváme skutečnosti, že díky tvaru LT (2.21), (2.22) jsou x' a t' vlastně složenými funkcemi času: $x' = x'(x(t), t)$, $t' = t'(x(t), t)$, a tedy

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{1}{\frac{dt'}{dt}}.$$

Inverzní transformaci dostaneme záměnou znaménka u V .

Poznámka 2.11. To, že Lorentzovy transformace ponechávají invariantním interval s^2 , je pouhým důsledkem daleko obecnější symetrie na Minkowského prostoru. Vůči LT je totiž invariantní pseudoskalární součin dvou čtyřvektorů $X = (x^\mu)$ a $Y = (y^\mu)$. Přetransformujeme-li jejich složky pomocí (2.21) a (2.22) a provedeme-li skalární součin, dojdeme k tomu, že

$$X'^T \mathbb{G} Y' = X^T \mathbb{G} Y.$$

Odsud už pseudonormu získáme položením $X = Y$.

2.4 Čtyřveličiny v Minkowského prostoročase

K odvození II. Newtonova zákona je třeba zavést na Minkowského prostoru veličiny, které se budou vhodně transformovat. Budeme chtít, aby

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \leftrightarrow \frac{dp'^\mu}{d\tau} = K'^\mu$$

při transformaci $x'^\mu = \alpha^\mu_\nu x^\nu$. Tomu říkáme *kovariantní* tvar zákona. Při pasivních transformacích se nemění jeho *tvar*.

- **Čtyřvektor polohy.**

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Příslušný invariant dostaneme díky poznámce 2.11 puštěním metrického tenzoru na tento vektor:

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = \begin{pmatrix} ct & \vec{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = s^2. \quad (2.31)$$

- **Čtyřrychlost** je tečný vektor ke světočáře (trajektorii v Minkowského prostoru). Ta je z praktických důvodů parametrizována vlastním časem τ , protože je invariantní. Čtyřrychlost je tedy definována jako

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \gamma = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

kde prostorová část u *není* klasická třírychlost, jak ji známe! Je totiž $u^i = \gamma v^i \neq v^i$. Příslušný invariant:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu = \gamma^2 \begin{pmatrix} c & \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -\vec{v} \end{pmatrix} = c^2 > 0. \quad (2.33)$$

Čtyřrychlost je tedy časupodobný vektor.

- **Čtyřhybnost** definujeme vztahem

$$p^\mu := m_0 u^\mu = \gamma \begin{pmatrix} m_0 c \\ m_0 \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{p} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

kde m_0 je *klidová* hmotnost. Důvod takové definice je ten, že hmotnost jako taková závisí na rychlosti²⁰ vztahem

$$m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.35)$$

Prostorový prvek $\vec{p}$ je *relativistická* hybnost, jelikož v sobě obsahuje hmotnost závislou na rychlosti. Příslušný invariant:

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p^\mu p_\mu = (\gamma m_0)^2 \begin{pmatrix} c & \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -\vec{v} \end{pmatrix} = m_0^2 c^2 > 0. \quad (2.36)$$

- **Čtyřzrychlení.**

$$w^\mu := \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (2.37)$$

Díky (2.33) víme, že invariant příslušný čtyřrychlosti je c^2 , což je samozřejmě konstanta nezávislá na čase. To ale znamená, že podél světočáry je čtyřrychlost pořád stejně velká, takže se může měnit jen její směr, tedy že změna u^μ na ni musí být *kolmá*. Skutečně: zderivováním (2.33) máme díky symetrii g

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) \\ &= w^\mu u_\mu + u^\mu w_\mu \\ &= g_{\mu\nu} w^\mu u^\nu + g_{\mu\nu} u^\mu w^\nu \\ &= g_{\mu\nu} w^\mu u^\nu + g_{\nu\mu} u^\mu w^\nu \\ &= 2g_{\mu\nu} w^\mu u^\nu. \end{aligned}$$

Nulový (pseudo)skalární součin dvou čtyřvektorů implikuje „čtyřkolmost“.

- **Čtyřsíla.**

$$K^\mu := \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} \\ \gamma \vec{F} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Tvar čtyřsíly jsme „uhodli“ z požadovaného tvaru pohybové rovnice:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \vec{v} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

²⁰Odvození viz skriptu STR od O. Semeráka.

Jelikož $\gamma m_0 \vec{v}$ v prostorové složce představuje relativistickou hybnost $\vec{p}$, položením $\vec{K} \stackrel{!}{=} \gamma \vec{F}$ dostaneme rovnici

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Časovou složku čtyřsily určíme vypočtením „čtyřvýkonu“ $K^\mu u_\mu$.

2.5 Vztah hybnosti a energie

Integrací rovnosti

$$\gamma \frac{d}{dt}(\gamma m_0 c) \stackrel{!}{=} K^0 \stackrel{!}{=} \frac{\gamma}{c} \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{v}}_{\frac{dE}{dt}}$$

podle času dospějeme k

$$\gamma m_0 c^2 = E + \text{const.}$$

Einstein prohlásil, že tato konstanta není libovolná, nýbrž rovna nule. Toto pozorování je v souladu s experimenty. Obdrželi jsme slavnou Einsteinovu formuli

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.39)$$

která říká, že v STR má těleso určitou energii už jen „za to, že je“.

Relativistickou kinetickou energii definujeme takto:

$$E_k := E - E_0 = m_0 c^2 (\gamma - 1). \quad (2.40)$$

Díky (2.39) lze nyní čtyřhybnost vyjádřit též jako

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{p} \end{pmatrix} \stackrel{(2.39)}{=} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}.$$

Spočtěme nyní invariant příslušný čtyřhybnosti dvěma způsoby:

$$p^\mu p_\mu = \begin{cases} \left(\frac{E}{c} \right) \cdot \left(\frac{E}{c} \right) = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \\ (m_0 u^\mu)(m_0 u_\mu) = m_0^2 c^2. \end{cases}$$

Srovnáním získáme důležitý vztah mezi energií a hybností:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2. \quad (2.41)$$

Vidíme tedy, že E^2 ani p^2 nejsou invarianty, ale rozdíl $\frac{E^2}{c^2} - p^2$ už ano. Pro foton, jehož klidová hmotnost je nulová, pak platí $E = pc = h\nu$,

$$(p_f^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ \frac{h\nu}{c} \vec{s} \end{pmatrix},$$

kde $\vec{s}$ je jednotkový vektor mířící ve směru pohybu fotonu.

2.6 Lagrangeův a Hamiltonův formalismus v STR

Už v TEF1 jsme se přesvědčili, že z Hamiltonova variačního principu lze za znalosti lagrangiánu $\mathcal{L}$ odvodit pohybové rovnice. Hamiltonův princip zní: *Systém podrobený holonomním vazbám a potenciálovým silám se mezi časy t_1 a t_2 pohybuje po takové trajektorii, podél níž variace akce*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (2.42)$$

nabývá **stacionární hodnoty** vzhledem k izochronním variacím s pevnými konci, tj.

$$\delta q_i(t_1) = 0 = \delta q_i(t_2).$$

Nutnou a postačující podmínkou je splnění Eulerových–Lagrangeových rovnic (ELR):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (2.43)$$

V STR bychom však rádi lagrangián, který je invariantní vůči LT, protože v opačném případě by ELR měly v každé inerciální soustavě jiný tvar. Tím pádem už nelze definovat relativistický lagrangián vztahem

$$\mathcal{L} = T - U,$$

protože kinetická energie invariantní není. Navíc musíme v akci (2.42) integrovat podle invariantu τ . Jak tedy zobecnit nerelativistický lagrangián

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

pro *jednu bezsilovou* částici?

První nápad by byl zavést akci jakožto délku světočáry, o níž víme, že invariantní je:

$$ds = c d\tau = c \gamma dt = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \stackrel{\text{T}}{=} c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right).$$

Když však tuto rovnost vynásobíme výrazem $-m_0 c$, dojdeme k tomu, že rozvoj invariantu $-m_0 c ds$ nám v prvním přiblížení dává kinetickou energii:

$$-m_0 c ds = \underbrace{-m_0 c^2}_{\text{konst.}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_T + \underbrace{\frac{1}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots}_{\text{zanedbáme}}$$

Jen jsme posunuli klasickou akci $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} 1/2 m_0 v^2 dt$ o konstantu! Můžeme tedy definovat akci bezsilové částice vztahem

$$S_0 := \int_{t_1}^{t_2} (-m_0 c) ds = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-m_0 c^2) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} (-m_0 c^2) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (2.44)$$

který dále definuje lagrangián bezsilové částice:

$$\mathcal{L}_0(\vec{r}, \vec{v}) := -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.45)$$

Ve vnějším poli s potenciálem $U = U(\vec{r}, t)$ má tvar

$$\mathcal{L}_0(\vec{r}, \vec{v}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(\vec{r}, t). \quad (2.46)$$

Jakmile máme lagrangián, můžeme počítat

- **Obecnou hybnost**

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.47)$$

- **Obecnou energii**

$$\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \vec{v}} \vec{v} - \mathcal{L} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U = E + U. \quad (2.48)$$

- **Hamiltonián**, což je zobecněná energie v proměnných $\vec{r}, \vec{p}, t$. K tomu si musíme ze vztahu pro obecnou hybnost (2.47) ve vektorovém tvaru po umocnění vyjádřit kvadrát rychlosti

$$v^2 = \frac{p^2 c^2}{m_0^2 c^2 + p^2},$$

a ten dosadit do gamma-faktoru v (2.48), odkud máme

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} + U. \quad (2.49)$$

Problém nastává, máme-li *soustavu* N interagujících částic. V newtonovské mechanice nám to nevadilo, protože tam byla rychlost interakce konečná, což ovšem není případ STR. Proto musíme zavést pojem *pole*, což je jakási forma hmoty, nositel a zprostředkovatel interakce. Popíšeme ho sadou funkcí (souřadnic pole) $q_a(x^\mu)$, kde $a \in \hat{n}$, jejichž transformace závisí na typu pole (to může být skalární, vektorové, tenzorové...).

Pro pole definujeme funkcionál akce následujícím vztahem:

$$S[q_a(x^\mu)] := \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L} \left(q_a, \frac{\partial q_a}{\partial x^\mu}, x^\mu \right) dV^*, \quad (2.50)$$

kde $\mathcal{L}$ je zatím neznámá funkce, q_a je soubor zobecněných souřadnic, $\frac{\partial q_a}{\partial x^\mu}$ označíme $q_{a,\mu}$. Funkcionál (2.50) je zobecněním mechanické akce. Symbol

$dV^* = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ značí objemový element čtyřprostoru. Je-li speciálně $V^* = \langle ct_1, ct_2 \rangle \times V$ (čtyřrozměrný válec), pak lze pomocí Fubiniho věty psát

$$S = \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L} dV^* \stackrel{\text{F}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \mathcal{L} dV \right) dt, \quad (2.51)$$

z čehož po srovnání s klasickou akcí (2.42) plyne, že $\int_V \mathcal{L} = \mathcal{L}$, tedy že $\mathcal{L}$ odpovídá *hustotě Lagrangeovy funkce*.

Věta 2.12 (Hamiltonův princip pro pole). *Skutečný časový vývoj soustavy polí se děje s takovou závislostí q_a na x^μ , při níž akce (2.50) nabývá **stacionární hodnoty** vzhledem k variacím $\delta q_a(x^\mu)$ splňujícím podmínku pevných konců, tj.*

$$\delta q_a(x^\mu)|_{\partial V^*} = 0.$$

Odsud lze opět odvodit Lagrangeovy pohybové rovnice soustavy polí. Je třeba použít Taylorův rozvoj, čtyřrozměrnou Gaussovu větu a základní větu variačního počtu. Nakonec dostáváme rovnice

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0. \quad (2.52)$$

Stále však přetrvává složitý problém s hledáním funkce $\mathcal{L}$. Bude-li za příznivé konstelace akce (2.50) invariant, budou invariantní i rovnice (2.52). K tomu ale stačí požadovat invarianci funkce $\mathcal{L}$, jelikož objem dV^* , přes který integrujeme, je invariantní, což lze poměrně snadno dokázat.

3 Elektrodynamika

3.1 Maxwellovy rovnice ve vakuu

Napišme nyní Maxwellovy rovnice, které známe již z naší milované ELMY. Ve vakuu platí:

$$\text{Gaussův zákon} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.1)$$

$$\text{Ampèrův zákon} \quad \text{rot } \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.2)$$

$$\text{Faradayův zákon} \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

$$\text{Neexistence mg. monopolů} \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad (3.4)$$

které je třeba doplnit o rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (3.5)$$

a o rovnici pro pohyb nábojů způsobený EM polem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.6)$$

Prvním dvěma rovnicím říkáme *první série MR*, druhým dvěma *druhá série MR*. Abychom objasnili význam jednotlivých rovnic, převedeme je do integrálního tvaru a uijeme zobecněné Stokesovy věty²¹ a jejího důsledku, a sice věty Gaussovy.²²

- **Gaussův zákon (3.1).** Zintegrováním přes plochu, užitím Gaussovy věty a definice hustoty náboje $\int_V \rho dV = Q$ máme

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3.7)$$

„Elektrický indukční tok plochou S je přímo úměrný náboji, který tato plocha obepíná.“

- **Ampèrův zákon (3.2).** Zintegrujeme přes plochu, použijeme Stokesovu větu a definici proudové hustoty $\int_S \vec{j} d\vec{S} = I$. Dostáváme

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} d\vec{S} = \mu_0 I.$$

„Cirkulace magnetického pole kolem uzavřené křivky l obepínající plochu S je přímo úměrná proudu, který touto plochou prochází.“

- **Faradayův zákon (3.3).** Aplikujeme integrál přes plochu a použijeme Stokesovu větu:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.8)$$

„Časově proměnný magnetický tok plochou S indukuje napětí v křivce tuto plochu obepínající.“

- **Neexistence magnetického monopólu (3.4).** Zintegrujeme přes objem a použijeme Gaussovu větu:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.9)$$

„Magnetické pole nemá žádné zdroje – je *solenoidální*.“

²¹ $\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$. Zde uijeme konkrétnější podoby: $\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{l=\partial S} \vec{E} d\vec{l}$.

²² $\int_V \text{div} \vec{B} dS = \oint_{S=\partial V} \vec{B} d\vec{S}$.

Z MR lze odvodit nehomogenní vlnové rovnice pro $\vec{B}$, resp. $\vec{E}$ zrotováním (3.2), resp. (3.3):

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \operatorname{rot} \vec{j} \quad (3.10)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Nejsou-li v prostředí žádné zdroje, tj. $\rho = 0 \wedge \vec{j} = 0$, je jejich pravá strana nulová. Je vidět, že EM vlna existuje i v prostředí bez zdrojů.

Platí též důležitý **Weberův vztah**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (3.12)$$

3.2 Maxwellovy rovnice v prostředí

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (3.13)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \quad (3.14)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.15)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.16)$$

kde

- $\vec{D}$ je vektor elektrické indukce.

$$\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.17)$$

$$[\vec{D}] = \text{C m}^{-2}. \quad (3.18)$$

- $\vec{P}$ nazýváme vektorem polarizace. Reprezentuje dipólový momentu v jednotce objemu:

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho \, dV = \int_V \vec{P} \, dV.$$

- Celková nábojová hustota je dána součtem volných a vázaných nábojů (bez indexu značí volné):

$$\rho_{\text{celk}} = \rho + \rho_{\text{váz}} = \rho - \operatorname{div} \vec{P}. \quad (3.19)$$

- $\vec{H}$ je vektor intenzity magnetického pole.

$$\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (3.20)$$

$$[\vec{H}] = \text{A m}^{-1}. \quad (3.21)$$

- $\vec{M}$ je tzv. vektor magnetizace.

$$\vec{m} = \int_V (\vec{r}' \times \vec{j}) dV = \int_V \vec{M} dV.$$

- Celková proudová hustota je dána součtem polarizačního a magnetizačního proudu:

$$\vec{j}_{\text{celk}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{mag}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot } \vec{M}. \quad (3.22)$$

Uvažujme dále už jen měkká dielektrika, což jsou homogenní, izotropní a lineární látky, tzn., že platí

$$\vec{P} = \chi_E \varepsilon_0 \vec{E} \quad (3.23)$$

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}, \quad (3.24)$$

kde χ_E , resp. χ_M nazýváme tzv. elektrickou, resp. magnetickou *susceptibilitou*. Odsud lze pomocí definičních vztahů pro $\vec{D}$ a $\vec{H}$ vyjádřit

$$\vec{D} \stackrel{(3.17)}{=} \varepsilon \vec{E} \quad (3.25)$$

$$\vec{B} \stackrel{(3.20)}{=} \mu \vec{H}. \quad (3.26)$$

a přepsat pomocí těchto vztahů maxwellky v měkkém dielektriku do následující podoby:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.27)$$

$$\text{rot } \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{j} \quad (3.28)$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.29)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (3.30)$$

3.3 Řešení Maxwellových rovnic metodou potenciálů

Z teorie parciálních diferenciálních rovnic plyne, že lépe řešitelné jsou PDR *druhého* řádu.²³ Převědeme tedy první sérii MR (rovnice (3.27), (3.28)) zavedením jistých potenciálů na druhý řád a pak se pokusíme pomocí těchto potenciálů druhou sérii vyřešit.

Povšimněme si, že v rovnicích (3.29), (3.30) nevystupuje ani hustota nábojů, ani hustota proudu. Dále z vektorového počtu víme, že $\text{div rot} \equiv 0$.

²³Skutečný důvod ale nejspíš spočívá v tom, že vlnová rovnice, již je odjakživa věnováno spoustu pozornosti a je dobře prozkoumaná, je rovnicí právě *druhého* řádu.

Jestliže tedy budeme schopni $\vec{B}$ vyjádřit jakožto rotaci *něčeho*, bude rovnost (3.30) vždy splněna. V teorii diferenciálních forem se objevuje *Poincarého lemma*, které při nulovosti divergence vektorového pole zaručuje existenci²⁴ jistého potenciálu $\vec{A}$:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \implies (\exists \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)) (\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}). \quad (3.31)$$

Dosazením za $\vec{B}$ do (3.29):

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Zde opět přichází Poincaré a říká:

$$(\exists \varphi = \varphi(\vec{r}, t)) \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi \right). \quad (3.32)$$

Znaménko mínus u gradientu volíme čistě z konvenčních důvodů. Toto tvrzení znamená, že $\vec{E}$ je *potenciálové* jedině v případě stacionárního pole ($\partial/\partial t = 0$)! Není-li tomu tak, tj. jde-li o EM pole, pak je potenciálové pole $\vec{E} + \partial \vec{A}/\partial t$. Veličinám $\vec{A}, \varphi$ říkáme po řadě *vektorový* a *skalární* potenciál. Zavedli jsme je uměle, aby se nám lépe řešila druhá série MR. Nejsou měřitelné a ani nejsou určeny jednoznačně. Důvod nejednoznačnosti těchto potenciálů tkví v tom, že existují tzv. *kalibrační transformace*

$$\tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda \quad (3.33)$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad (3.34)$$

které určují takové přechody mezi poteniciály $(\vec{A}, \varphi) \leftrightarrow (\tilde{\vec{A}}, \tilde{\varphi})$, jež vedou na *stejná* pole $\vec{E}, \vec{B}$.

Druhá sada MR tedy přešla na soustavu

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (3.35)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.36)$$

Splnili jsme druhou sérii MR volbou poteniciálů. Nyní je dosaďte do (3.27), resp. (3.28). Dostáváme

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (3.37)$$

resp.

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (3.38)$$

²⁴Na jednoduše souvislé množině platí i opačný směr.

Z kosmetických důvodů přičteme k oběma stranám rovnice (3.37) výraz $-\varepsilon\mu\partial^2\varphi/\partial t^2$, pak totiž obdržíme

$$\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \quad (3.39)$$

Jde o velmi složité PDR druhého řádu. Můžeme je však zjednodušit naložením tzv. *Lorenzovy²⁵ podmínky*

$$\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.40)$$

Tím dostáváme *d'Alembertovy rovnice*

$$\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.41)$$

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \quad (3.42)$$

$$\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.43)$$

Jde o nehomogenní vlnové rovnice pro neznámé funkce $\varphi, \vec{A}$. To, že skutečně můžeme požadovat splnění Lorenzovy podmínky, se rozebírá na přednášce. Plyne to ze skutečnosti, že po přechodu k vlnkovým potenciálům dle (3.33), (3.34) má rovnice

$$\nabla^2\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = -\operatorname{div}\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

při předepsané pravé straně nekonečně mnoho řešení. I kdyby funkce $\vec{A}$ a φ nevyhovovaly Lorenzově podmínce, ale plnily d'Alembertovy rovnice, lze pomocí kalibrační transformace (3.33), (3.34) najít potenciály, které už jí vyhovují (to plyne právě z existence řešení výše uvedené vlnové rovnice).

3.4 Rovnice elektrodynamiky v Minkowského prostoru

Nyní přepíšeme MR do tvaru, z něhož bude vidět, že jsou Lorentzovsky invariantní. Napíšeme je v tzv. *kovariantním tvaru*, což je tvar, v němž mají všechny členy při LT stejné transformační vlastnosti. Začneme s d'Alembertovými rovnicemi *ve vakuu*. Nejdříve zavedme d'Alembertův operátor vztahem

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

²⁵Nikoli Lorentzovy.

Pak lze rovnice (3.41) – (3.43) zapsat v kompaktnějším tvaru

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.44)$$

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (3.45)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.46)$$

Jak vypadá dalambertián na Minkowského prostoru?

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} = -g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \stackrel{\text{ozn}}{=} -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\partial^\mu \partial_\mu,$$

kde jsme označili $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Dá se snadno ukázat, že dalambertián je invariantní vůči transformacím $x'^\mu = \alpha^\mu_\nu x^\nu$, tj. že

$$\square' = \square.$$

Nyní se podívejme na pravou stranu rovnic. Vhodně zavedeme nové veličiny, které se šikovně transformují. Můžeme předpokládat, že náboj je relativistický invariant.²⁶ Z kontrakce délek platí, že

$$dV = \frac{dV_0}{\gamma},$$

a tedy

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{dQ}{\frac{dV_0}{\gamma}} := \gamma \rho_0,$$

kde ρ_0 je tzv. klidová hustota náboje. To nám umožní zavést nový čtyřvektor zvaný *čtyřproud* vztahem

$$(j^\mu) := \rho_0 (u^\mu) \stackrel{(2.32)}{=} \rho_0 \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Rovnice (3.44), (3.45) pak s pomocí Weberova vztahu (3.12) přechází na

$$\begin{aligned} \square \varphi &= -\mu_0 c^2 \rho = -\mu_0 c j^0 \\ \square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}. \end{aligned}$$

Teď už jen definujme *čtyřpotenciál*, který nám umožní sloučit výše uvedené rovnice do jedné.

$$(A^\mu) := \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

²⁶Není žádný důvod, proč by tomu tak být nemělo. Kdyby ne, jevily by se předměty v jedné soustavě jako nabitě, v druhé soustavě nikoli; to však není v souladu s tím, co pozorujeme v experimentech.

čímž obdržíme d'Alembertovy rovnice v kovariantním tvaru

$$\square A^\mu = -\mu_0 j^\mu \quad (3.49)$$

spolu s Lorenzovou podmínkou

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.50)$$

Přepišme takto ještě rovnici kontinuity:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \vec{j} + \frac{c}{c} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ 0 &= \frac{\partial j^i}{\partial x^i} + \frac{\partial (c\rho)}{\partial (ct)} \\ 0 &= \frac{\partial j^i}{\partial x^i} + \frac{\partial j^0}{\partial x^0} \\ 0 &= \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}. \end{aligned}$$

O to samé se pokusme i u kalibračních transformací (3.33), (3.34). Pomocí definice čtyřpotenciálu (3.48) můžeme psát

$$\begin{aligned} \tilde{A}^0 &= \frac{\tilde{\varphi}}{c} = \frac{\varphi}{c} - \frac{\partial \Lambda}{\partial (ct)} = A^0 - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} \\ \tilde{A}^i &= A^i + \underbrace{\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}}_{(\operatorname{grad} \Lambda)_i}. \end{aligned}$$

Takto však kvůli znaménku nemůžeme dát rovnosti dohromady. Proto snížíme index v derivaci, $x^i = -x_i$, $x^0 = x_0$ a dostáváme kalibrační transformaci v kovariantním tvaru:

$$\tilde{A}^\mu = A^\mu - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \stackrel{\text{ozn.}}{=} A^\mu - \partial^\mu \Lambda.$$

Abychom v kovariantním tvaru napsali MR (3.1) – (3.4), musíme zavést tenzor EM pole. Ve zkratce si odvodíme, jak by mohly jeho složky vypadat.

Jelikož $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, bude

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} && / \cdot \frac{c}{c} \\ &= -c \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi}{c} \right) + \frac{\partial A_x}{\partial (ct)} \right) && x \equiv x^1, \quad ct \equiv x^0, \quad \frac{\varphi}{c} \equiv A^0, \quad A_x \equiv A^1 \\ &= -c \left(\frac{\partial A^0}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) && \text{chci rotaci - sniž indexy: } A^1 = -A_1 \\ &= c \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} \right) := cF_{01}, \end{aligned}$$

dále, protože $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, je

$$\begin{aligned} B_x &= [\text{rot } \vec{A}]_x \\ &= \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \\ &= \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2} := F_{32}. \end{aligned} \quad A^i = -A_i$$

Tenzor elektromagnetického pole tedy zavedeme vztahem

$$F_{\mu\nu} := \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.51)$$

Je antisymetrický a má šest nezávislých složek:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Jeho kontravariantní verzi získáme dvojím zdvižením indexů: $F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}$, jelikož je ale g symetrický, odpovídá to vynásobení maticí metrického tenzoru zprava i zleva: $(F^{\mu\nu}) = (g^{\mu\rho})(F_{\rho\sigma})(g^{\sigma\nu})^T$, takže

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Je třeba ještě zavést tenzor *duální* k $F^{\mu\nu}$ pomocí Hodgeova duálu.

$$\star F_{\kappa\lambda} := \frac{1}{2!} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.54)$$

kde

$$\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{při sudé permutaci indexů} \\ -1 & \text{při liché permutaci indexů} \\ 0 & \text{při rovnosti alespoň dvou indexů.} \end{cases}$$

Kontravariantní verzi tohoto tenzoru dostaneme zdvižením indexů: $\star F^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\nu\lambda} \star F_{\kappa\lambda}$,

$$(\star F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Při srovnání s (3.53) je vidět, že přechodem k duálnímu tenzoru dojde k „prohození“ elektrických a magnetických prvků.

To už nám stačí, abychom slavnostně mohli zapsat Maxwellovy rovnice v kovariantním tvaru:

$$1. \text{ série} \quad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu \quad (3.56)$$

$$2. \text{ série} \quad \frac{\partial(\star F^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} = 0. \quad (3.57)$$

Explicitním výpočtem pro $\mu = 0, 1, 2, 3$ zjistíme, že jde skutečně o rovnice (3.1) – (3.4).

Jak vypadá kovariantní podoba Lorentzovy síly? Pokusme se přepsat rovnici pro pohyb nábojů (3.6) do tvaru

$$\frac{d}{dt}(m_0 u^\mu) = K^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} \\ \gamma \vec{F} \end{pmatrix},$$

kde $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Pomocí matice tenzoru EM pole (3.53) a distributivity skalárního součinu máme

$$\begin{aligned} K^0 &= \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\gamma}{c} e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &= \frac{\gamma}{c} e \vec{E} \cdot \vec{v} + 0 \\ &= e \frac{\vec{E}}{c} \cdot (\gamma \vec{v}) \\ &= e \underbrace{F^{00}}_{=0} u_0 + e(-F^{0i})(-u_i) \\ &= e F^{0\nu} u_\nu. \end{aligned}$$

Podobným trikem²⁷ dostaneme stejný vztah pro prostorové složky K^i . Lorentzova čtyřsíla má tedy tvar

$$K^\mu = e F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (3.58)$$

3.5 Invarianty EM pole

Z tenzoru EM pole vzejdou tyto invarianty:

- $F^\mu_\mu = g_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \text{Tr } F = 0$. To je stopa tenzoru (součet diagonálních prvků.) Invariant je to především proto, že je to prachobyčejné číslo.
- $I_1 := F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Lze ho spočítat pomocí tzv. Hadamardova součinu. Ten je pro matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ definován takto: $[\mathbb{A} \circ \mathbb{B}]_{ij} := a_{ij} b_{ij}$ (bez sumace!). V Hadamardově součinu se tedy násobí odpovídající si prvky.

²⁷Tzn. rozepsáním příslušné složky součinu $(\vec{v} \times \vec{B})_i$, roznásobením gamma faktorem, rozšířením pomocí c u složky E_i a přičtením nulového členu $F^{ii} u_i$.

Provedme nejdřív Hadamardův součin matic (3.53) a (3.52) a až poté sečtíme všech 16 prvků výsledné matice. Dostáváme

$$I_1 = 2 \left(-\frac{\vec{E}}{c} \right) \left(\frac{\vec{E}}{c} \right) + 2\vec{B}^2 = 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right). \quad (3.59)$$

- $I_2 := \star F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Toto je *pseudoinvariant*, jelikož mění znaménko při nevlastní LT. Opět ho určíme spočtením Hadamardova součinu matic (3.55), (3.52) a vysčítáním:

$$I_2 = 4 \cdot \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c}. \quad (3.60)$$

- Další invarianty už nejsou nezávislé, je totiž např. $\star F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} = -I_1$.

3.6 Lagrangeův formalismus pro soustavu nabitých částic v EM poli

V této kapitole budeme užívat symbolu $\mathcal{L}$ pro lagrangián, jak jej známe, a symbolu $\mathcal{L}$ pro hustotu lagrangiánu. Nejdříve zformulujeme dva mezní případy, které pak dáme dohromady.

- (A) Sestavíme lagrangián pro soustavu *neinteragujících*²⁸ částic.

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{MF}, \quad (3.61)$$

kde $\mathcal{L}_M$ (*matter*) bude lagrangián volných částic a $\mathcal{L}_{MF}$ (*matter-field*) bude interakční člen.

- (B) Pro pole bude hustota vypadat takto:

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{MF}, \quad (3.62)$$

kde $\mathcal{L}_F$ bude funkce pro *volné*²⁹ pole a $\mathcal{L}_{MF}$ bude opět interakční člen. Ten bude říkat, jak je z případných nábojů a proudů generováno pole.

Pojďme tedy tyto zvláštní případy rozebrat.

- (A) Vztahem (2.46) jsme definovali lagrangián jedné částice v poli s potenciálem U . Uvažme nyní potenciál Lorentzovy síly a soustavu N neinteragujících částic. Interakce zahrneme až v polním lagrangiánu.

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N \left(-m_{0\alpha} c^2 \sqrt{1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}} \right) - \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \left(\varphi(\vec{r}_\alpha, t) - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}(\vec{r}_\alpha, t) \right). \quad (3.63)$$

²⁸Tím myslíme, že náboje jsou slabé a ne příliš blízko u sebe.

²⁹Tj. $\rho = 0$ a $\vec{j} = 0$.

Nyní je třeba nějak popsat *bodový* náboj. K tomu použijeme Diracovu delta-funkci, která je definována jako

$$\delta(x) := \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ ? & x = 0, \end{cases} \quad (3.64)$$

ale přitom splňuje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Tato „funkce“ je tedy všude nulová, jen v *jednom* bodě (tj. na množině míry nula) nabývá hodnoty tak velké, že integrál přes celou reálnou osu je nenulový. Takovou vlastnost nemůže mít žádná myslitelná funkce, ale přesto je tato definice legitimní. O těchto zobecněných funkcích se více dozvíme v předmětu RMF.

Budeme potřebovat další vlastnost delta-funkce, a sice

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0). \quad (3.65)$$

To nám umožní definovat nábojovou hustotu jednorozměrné částice v bodě $x = x_0$:

$$\rho(x) := Q\delta(x - x_0)$$

a v případě třírozměrné částice použijeme 3D delta-funkci

$$\delta^3(\vec{r}) := \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ ? & \vec{r} = \vec{r}_0, \end{cases}$$

abychom dostali

$$\rho(\vec{r}) := Q\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (3.66)$$

Jde-li o soustavu N částic s náboji e_α , definujeme nábojovou, resp. proudovou hustotu takto:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\alpha), \quad (3.67)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \vec{v}_\alpha \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\alpha). \quad (3.68)$$

Pomocí tohoto přepíšeme interakční člen $\mathcal{L}_{MF}$. Na funkce φ a $\vec{A}$ použijeme identitu (3.65), poté zaměníme sumu a integrál, abychom dostali výše uvedené definice nábojové a proudové hustoty. Po snížení indexů

u A (pozor na znaménko) máme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MF} &\stackrel{(3.63)}{=} - \sum_{\alpha=1}^N e_{\alpha} \left(\varphi(\vec{r}_{\alpha}, t) - \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r}_{\alpha}, t) \right) \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3} c \rho(\vec{r}, t) \frac{\varphi(\vec{r}, t)}{c} dV + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) dV \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3} j^0 A_0 dV - \int_{\mathbb{R}^3} j^i A_i dV \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3} j^{\mu} A_{\mu} dV.
\end{aligned}$$

Rozepíšeme-li si příslušnou akci S_{MF} podle (2.51), zjistíme odsud i hustotu interakčního lagrangiánu:

$$\mathcal{L}_{MF} = -j^{\mu} A_{\mu}. \quad (3.69)$$

- (B) Nyní, když už známe $\mathcal{L}_{MF}$, nám zbývá určit hustotu polního lagrangiánu $\mathcal{L}_F$. To nám usnadní následující požadavek: Chceme, aby akce $S_F = \int_{V^*} \mathcal{L}_F dV^*$ byla invariantní, a to proto, aby z ní plynoucí rovnice měly ve všech soustavách stejný tvar. My už ale víme, že čtyřobjem dV^* a tím i integrace přes něj je invariantní. Jediné, co tedy musíme požadovat, je invariance funkce $\mathcal{L}_F$. Jediná použitelná definice je pomocí I_1 z (3.59).³⁰ Nechť je tedy

$$\mathcal{L}_F := -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (3.70)$$

Úpravami pomocí Weberova vztahu nabude tato funkce konkrétní podoby:

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H^2.$$

Celkem tedy dostáváme

$$\mathcal{L}_B = -j^{\mu} A_{\mu} - \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

s polními proměnnými $A_{\mu}, A_{\mu,\nu}$. Odsud lze odvodit pohybové rovnice pole (sčítáme přes $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$):

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\lambda}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda}} = 0. \quad (3.71)$$

Na přednášce jsme ukazovali, že odsud skutečně plyne první série Maxwellových rovnic (3.56). Druhou sérii odsud nedostaneme, protože ta byla automaticky splněna volbou potenciálu A_{μ} .

³⁰ I_2 použít nemůžeme, protože to je pouze *pseudoinvariant*.

3.7 Energetické veličiny a zákony zachování

1. **Zákon zachování náboje.** Mějme jistý referenční objem V , jehož hranice $\partial V = S$ je konstantní v čase. Pripustíme pohyb částic z a do objemu. Budeme zkoumat celkovou bilanci náboje v objemu V . Je jen jedna možnost³¹: *To, co ubylo v objemu, muselo projít pláštěm ven*, neboli

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV \stackrel{!}{=} \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{f}_n,$$

kde $d\vec{f}_n = \vec{n} df$ je normálový vektor k elementární plošce df . Odsud už snadno Gaussovou větou dostaneme rovnici continuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (3.72)$$

2. **Zákon zachování energie.** Necht už nyní částice *neproudí* ven ani dovnitř. Jak může v objemu V ubýt energie? Buď je vyzářena ven, nebo se spotřebuje na práci na částicích. Je-li $dQ = \rho dV$ náboj v elementárním objemu dV , pak síla pole na tento náboj bude

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= dQ(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \underbrace{\rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}_{=: \mathcal{F}} dV, \end{aligned}$$

kde $\mathcal{F}$ je hustota Lorentzovy síly. Určíme ještě hustotu výkonu Lorentzovy síly:

$$\begin{aligned} d\vec{F} \cdot \vec{v} &= \rho \vec{E} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{E} \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Předpokládejme tedy takovouto bilanci: *Úbytek energie v objemu V je roven výkonu mechanických sil a tomu, co je vyzářeno ven.*

$$-\frac{d}{dt} \int_V w(\vec{r}, t) dV \stackrel{!}{=} \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV + \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{f}_n,$$

kde w je hustota energie pole a $\vec{S}$ je hustota *toku* energie pole. Gaussovou větou získáme diferenciální tvar ZZE:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \vec{j} + \operatorname{div} \vec{S}. \quad (3.73)$$

Veličiny w a $\vec{S}$ lze dále interpretovat pomocí Poyntingovy věty

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \vec{j} \cdot \vec{E} + \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}),$$

³¹Protože náboj je relativistický invariant – nemůže vzniknout ani zaniknout.

což při porovnání s (3.73) dává

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Vektoru $\vec{S}$ říkáme Poyntingův, jeho jednotky jsou Wm^{-2} .

3. **Zákon zachování hybnosti.** Opět nepřipouštíme tok částic. Jediná možnost úbytku hybnosti je průtok přes hranici objemu:

$$-\frac{d}{dt} \int_V (p_i + g_i) dV = \oint_S \sigma_{ik} df_k, \quad (3.74)$$

$i \in \hat{3}$. Vektor $\vec{p}$ je tzv. hustota hybnosti částic, $\vec{g}$ je hustota hybnosti pole. $\vec{\sigma}_i = (\sigma_{i1} \ \sigma_{i2} \ \sigma_{i3})$ nazýváme vektorem hustoty toku i -té složky hybnosti toku. Použitím Gaussovy věty máme diferenciální tvar ZZH:

$$-\frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (3.75)$$

kde poslední člen představuje divergenci tenzoru (σ_{ik}) . Zdlouhavý výpočet následujících veličin dr. Novotný nezkouší:

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} = \varepsilon \mu (\vec{E} \times \vec{H}) = \varepsilon \mu \vec{S}$$

$$\sigma_{ik} = - \left[E_i D_k + H_i B_k - \delta_{ik} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) \right].$$