Úvod do křivek a ploch

- Úvod do diferenciální geometrie
  (křivky, plochy)

1. Křivky v $\mathbb{R}^n$

- parametrické zadání $\quad x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t \in \mathbb{R}$
- implicitní zadání $\quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$

Parametricky zadaná křivka: $\vec{f}: I \to \mathbb{R}^n$, $\vec{f} \in C^{(1)}(I)$

Implicitně zadaná křivka: $F: O \to \mathbb{R}^{n-1}$, $O \subset \mathbb{R}^n$
$\{\vec{x} \in O \mid F(\vec{x}) = \vec{0}\}$

Domácí úkol:
Descartův list: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a \neq 0$
Napsat parametrické vyjádření, singulární body

Singulární bod $\vec{x}_0$ implicitně zadané křivky
$\Longleftrightarrow$ $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n$
$h\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)(\vec{x}_0) < n-1$

Kritický bod $x_0 = \vec{f}(t_0)$ parametricky zadané křivky
$\Longleftrightarrow$ $\vec{f}'(t_0) = 0$

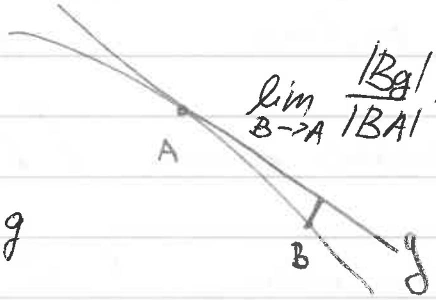
Věta
Nechť $\vec{f}$ je parametricky zadaná křivka a $f_n'(t_0) \neq 0$.
Pak existuje okolí (a,b) bodu t_0 a $(n-1)$ funkcí ϕ_j, $j \in \widehat{n-1}$
tak, že $\forall t \in (a,b): x_j = f_j(t) =: \phi_j(f_n(t)) = \phi_j(x_n)$,

implicitně: $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid F_j(\vec{x}) = 0,\ \forall j \in \widehat{n-1}\}$, $F_j(\vec{x}) := x_j - \phi_j(x_n)$
$= x_j - f_j(f_n^{-1}(x_n))$

Věta

Nechť $\vec{x}$ není singulárním bodem implicitně zadané křivky Γ.
Pak existuje jeho okolí a parametricky zadaná křivka $\vec{f}$, tak, že její obraz na tomto okolí

Tečna křivky



$$|BA| = |\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)|$$

$$|Bg| = \inf_{k \in \mathbb{R}} |B, A + k\vec{u}|$$

↑směrnice g

$$\lim_{B \to A} \frac{|Bg|}{|BA|} = 0 \Leftrightarrow g \text{ je tečna}$$

$$V(k) = (B - A - k\vec{u}, B - A - k\vec{u})$$

$$\frac{dV}{dk} = -2(\vec{u}, B - A - k\vec{u}) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow k_0 = \frac{(B-A, \vec{u})}{(\vec{u}, \vec{u})}$$

BÚNO $(\vec{u}, \vec{u}) = 1$

$$|Bg| = V(k_0) = |\overrightarrow{B-A} - (\overrightarrow{B-A}, \vec{u})\vec{u}| = |E_{\vec{u}_\perp}(\overrightarrow{B-A})|$$

$$\lim_{B \to A} \frac{|Bg|}{|BA|} = \lim_{t \to t_0} \frac{|E_{\vec{u}}(\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0))|}{|\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)|} = \frac{|E_{\vec{u}}\vec{f}'(t_0)|}{|\vec{f}'(t_0)|} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow E_{\vec{u}_\perp} \vec{f}'(t_0) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{f}'(t_0)$$

2. hodina

Definice

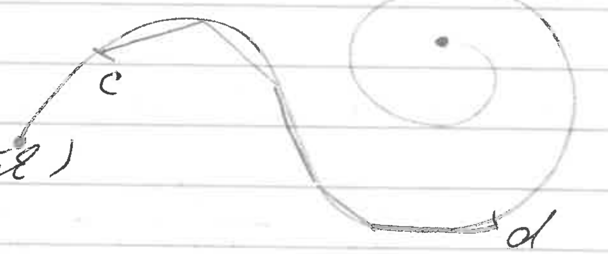
Nechť $\vec{\alpha}:(a,b)\to\mathbb{R}^n$, $\vec{\beta}:(c,d)\to\mathbb{R}^n$ jsou parametricky zadané křivky

Řekneme, že $\vec{\beta}$ je kladnou (zápornou) reparametrizací $\vec{\alpha} \iff \exists h:(c,d)\to(a,b),\ h' \gtrless 0,\ \vec{\alpha}=\vec{\beta}\circ h$

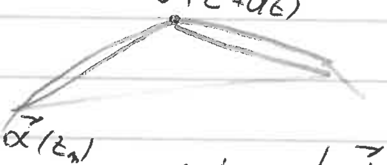
Důsledek $\vec{\alpha}'(t) = \vec{\beta}'(h(t))\,h'(t)$

Přirozená parametrizace křivky

- délka křivky $\vec{\alpha}: I\to\mathbb{R}^n$



L_{cd} := sup(vepsaných úseček)



$$\Delta t = |\vec{\alpha}(t+dt)-\vec{\alpha}(t)| = |\vec{\alpha}'(t)\,dt|$$

$$\boxed{L_{cd}[\vec{\alpha}] = \int_c^d |\vec{\alpha}'(t)|\,dt}$$

Věta

Nechť $\vec{\beta}$ je reparametrizací $\vec{\alpha}$, a $(\vec{\alpha}=\vec{\beta}\circ h)$
$c=h(c')$, $d=h(d')$

Pak $L_{cd}[\vec{\alpha}] = L_{cd}[\vec{\alpha}]$

Důkaz/

$$L_{cd}[\vec{\alpha}] = \int_c^d |\vec{\alpha}'(t)| dt = \int_c^d |\vec{\beta}'(h(t)) h'(t)| dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} h(t) = u \\ h'(t) dt = du \end{matrix} \right| = \int_{h(c)}^{h(d)} |\beta'(u)| du$$

Věta

Nechť $\vec{\alpha}(t)$ je regulární parametricky zadaná křivka
Pak $\exists$ reparametrizace $\vec{\beta}(s) \cdot |\vec{\beta}'| = 1$

Důkaz/

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} |\vec{\alpha}'(\tilde{t})| d\tilde{t} \Rightarrow s'(t) = |\vec{\alpha}'(t)|$$

α regulární: $|\vec{\alpha}'| \neq 0 \Rightarrow s'(t) \neq 0 \Rightarrow \exists s'$

$$t(s) : \frac{dt}{ds} = \frac{1}{s'(t(s))} = \frac{1}{|\vec{\alpha}'(t(s))|}$$

$$\vec{\beta}(s) := \vec{\alpha}(t(s))$$

$$|\vec{\beta}'(s)| = |\vec{\alpha}'(t(s))| \, |t'(s)| = |\vec{\alpha}'(t)| \left| \frac{1}{s'(t)} \right| = \frac{|\vec{\alpha}'(t)|}{|\vec{\alpha}'(t)|} = 1$$

3. hodina

$\vec{\alpha}(t)$, $\vec{\alpha}'(t) \neq 0$, $\forall t \in I = (t_0, t_1)$

$\exists h: t = h(s)$, $\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(h(s)) \Rightarrow |\vec{\beta}'(s)| = 1$
β - přirozená parametrizace křivky

$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{\alpha}'(\tilde{t})| d\tilde{t}$, $h = s^{-1}$

<u>Lemma</u>
Nechť $\vec{\beta}$ je reparametrizací $\vec{f}$, $|\vec{\beta}'| = 1 = |\vec{f}'|$

Pak $\vec{\beta}(t) = \vec{f}(\pm t + t_c)$

<u>Důkaz</u>

$\vec{\beta}(s) = \vec{f}(h(s))$, $1 = |\vec{\beta}'(s)| = |\vec{f}'(t(s))| |h'(s)|$
$\Rightarrow |h'(s)| = 1 \Rightarrow h(s) = \pm s + s_c$

Rovinné křivky

Věta: Směrový úhel
Nechť $\vec{f}: (a, b) \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f}'(t) \neq \vec{O}$, $\frac{\vec{f}'}{|\vec{f}'|}(t_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$

Pak existuje právě jedna funkce $\theta: (a, b) \to \mathbb{R}$, $\theta \in C(a, b)$
tak, že $\vec{n}(t) = \frac{\vec{f}'}{|\vec{f}'|}(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$, $\vec{n}(t_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$

Křivost κ

$$\kappa_2(s_0) := \frac{\theta(s)-\theta(s_0)}{s-s_0} = \frac{d\theta}{ds}(s_0),$$

kde s je přirozený parametr křivky

• velmi nepraktické, úloha vede na výpočet integrálu a jeho inverzi

$$\kappa_2(t) = \frac{d\theta}{ds}(t) = \frac{d\theta(t(s))}{ds} = \dot\theta(t(s))\frac{dt}{ds} =$$

$$= \frac{\dot\theta(t)}{\dot s(t)} = \frac{\dot\theta(t)}{|\vec f'(t)|} =$$

$\operatorname{arctg}\frac{\dot y}{\dot x}$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{\dot y}{\dot x}\right)}{(\dot x^2+\dot y^2)^{\frac12}} = \frac{\ddot y\dot x - \ddot x\dot y}{\left(1+\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)^2\right)}\frac{1}{\dot x^2}\frac{1}{(\dot x^2+\dot y^2)^{\frac12}} =$$

$$\boxed{= \frac{\dot x\ddot y - \dot y\ddot x}{(\dot x^2+\dot y^2)^{\frac32}}(t) = \kappa_2(t)} =$$

$$= \frac{\vec f' \wedge \vec f''}{|f'|^3}(t)$$

Lemma

Nechť $\vec B(s)$ je přirozeně parametrizovaná křivka,

Pak $\vec B''(s) = \kappa_2(s)\underbrace{(-\dot y, \dot x)}_{\text{normála}}$, $\vec B(s) = (x(s), y(s))$

Důkaz:

• $\vec B'\cdot\vec B' = 1 \quad / \frac{d}{ds}$

$2\vec B'\vec B'' = 0 \Rightarrow \vec B'' = \mu(-\dot y, \dot x)$

$$\kappa_2(s) = \frac{\dot x\mu\dot x - \dot y\mu(-\dot y)}{(\dot x^2+\dot y^2)^{\frac32}} = \mu$$

$\vec f'(t)$: $\quad \vec T := \left(\frac{\dot x}{|\vec f'|}, \frac{\dot y}{|\vec f'|}\right), \quad \vec N := \left(-\frac{\dot y}{|\vec f'|}, \frac{\dot x}{|\vec f'|}\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}\right) = \dots = -k_2 \dot y \qquad \vec T' = k_2(-\dot y, \dot x) = k_2 \vec N |\vec f'|$$

$$\vec N' = -k_2 \vec T |\vec f'|$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}\right) = k_2 \dot x$$

$$\begin{pmatrix} \vec T' \\ \vec N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec T \\ \vec N \end{pmatrix} |\vec f'|$$

Je křivost dobře definovaná?

$\vec\alpha(t) = \vec\beta(h(t)) = \vec\beta(s)$, $s = h(t)$

$\vec\alpha = (\tilde x(t), \tilde y(t))$ | $k_2 = \frac{\dot x \ddot y - \dot y \ddot x}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\vec\beta = (x(s), y(s))$

$\dot x = \dot{\tilde x} \dot h, \quad \dot y = \dot{\tilde y} \dot h$

$\ddot x = \ddot{\tilde x} \dot h^2 + \dot{\tilde x} \ddot h, \quad \ddot y = \ddot{\tilde y} \dot h^2 + \dot{\tilde y} \ddot h$

$$k_2[\alpha] = \frac{\dot x \ddot y - \dot y \ddot x}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dot h^3}{|\dot h|^3} k_2[\beta]$$

Křivost je invariantní veličina až na znaménko reparametrizace

$\vec\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $\vec\alpha : I \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x',y')$, $\quad F(\vec z) := \mathbb{A}\vec z + \vec v$, $(\vec z, \vec z')' = (F(\vec z), F(\vec z'))$

$\Rightarrow \mathbb{A} \in O(2)$, $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T$

$\vec\alpha(t) \mapsto \tilde{\vec\alpha}(t) = F(\vec\alpha(t)) \Rightarrow k_2[\tilde\alpha] = \det \mathbb{A} \cdot k_2[\alpha]$

Věta

Nechť $k : (a,b) \to \mathbb{R}$, $k \in C(a,b)$

Pak $\vec{\beta} : (a,b) \to \mathbb{R}^2$, kde

$$\vec{\beta}(s) := \left(\int_0^s \cos(\theta(s'))\,ds', \int_0^s \sin(\theta(s'))\,ds' \right),$$

kde $\theta(s) := \int_0^s k(s')\,ds'$ je přirozeně parametr. křivka jejíž křivost: $\kappa_2[\beta] = k$

<u>Důkaz:</u>

$\vec{\beta}' = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\vec{\beta}'' = (-k\sin\theta, k\cos\theta)$, $\kappa_2[\beta] = \dots = k$

4. hodina

Prostorové křivky, $n = 3$

$\vec f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec f'(t_0)$ tečna v t_0

Implicitní zadání: $\Gamma = \{\vec x \in \mathbb{R}^3 \mid F_1(\vec x) = 0 \wedge F_2(\vec x) = 0\}$

- $\vec T(t) = \dfrac{\vec f'(t)}{|f'(t)|} \Rightarrow |\vec T| = 1$
- $\vec N(t) = ?$ | Normálová rovina v t: $\perp \vec f'(t)$
- $\vec B(t) = ?$ | Přilehlá (oskulační) rovina:

Definice:

Rovinu $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ nazveme přilehlou ke křivce $\vec f$ v bodě $\vec f(t_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\delta(t)}{d^2(t)} = 0$,

kde $\delta(t) = \rho(f(t), \Gamma)$,
$d(t) = \rho(\vec f(t), \vec f(t_0))$

- Nechť Γ je přilehlá k $\vec f$ v bodě t_0, $\vec n$ je normála Γ

$$\delta(t) = |\vec n \cdot (\vec f(t) - \vec f(t_0))|$$

$$\frac{\delta}{d^2} = \frac{|\vec n \cdot (\vec f(t_0+h) - \vec f(t_0))|}{|\vec f(t_0+h) - \vec f(t_0)|^2} = \frac{|\vec n (\vec f'(t_0)h + \frac{1}{2}\vec f''(t_0)h^2 + o(h^3))|}{|\vec f'(t_0)h + o(h^2)|^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|h|^2 \left(\frac{\vec n \cdot \vec f'(t_0)}{h} + \frac{1}{2}\vec n \vec f''(t_0) + o(h)\right)}{|h|^2 |\vec f'(t_0) + o(h)|^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec n \cdot \vec f'(t_0) = 0$
$\vec n \cdot \vec f''(t_0) = 0$ | Pokud $\vec f'(t_0) \nparallel \vec f''(t_0)$, pak definují přilehlou rovinu

• $\vec{N}(t_0) \in$ normálová rovina
$\vec{N}(t_0) \in$ přilehlá rovina

• $\vec{N}(t_0) = a \cdot \vec{f}'(t) + b \cdot \vec{f}''(t)$

$\vec{N} \cdot \vec{T} = 0 \Rightarrow a\,|\vec{f}'(t)|^2 + b \cdot \vec{f}' \cdot \vec{f}'' = 0$

$$a = -b \frac{\vec{f}' \cdot \vec{f}''}{|\vec{f}'|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = b\left(\vec{f}'' - \frac{(\vec{f}' \cdot \vec{f}'')}{|\vec{f}'|^2}\vec{f}'\right),\ b^2 = \left|\vec{f}'' - \frac{(\vec{f}' \cdot \vec{f}'')}{|\vec{f}'|^2}\vec{f}'\right|^2$$

$\vec{B}(t) := \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$

Křivost prostorové křivky

$\theta(t, t_0)$ - úhel mezi tečnami v bodech $\vec{f}(t), \vec{f}(t_0)$

křivost $k(t_0) := \lim_{t \to t_0} \left|\frac{\theta(t,t_0)}{s(t,t_0)}\right| = \lim_{s \to s_0} \left|\frac{\theta(s,s_0)}{s-s_0}\right| \overset{(*)}{=}$

$$= \left|\frac{d\theta}{ds}(s_0)\right| = \left|\frac{\theta'(t_0)}{s'(t_0)}\right| = \left|\frac{\theta'(t_0)}{|\vec{f}'(t_0)|}\right|$$

(*) • $\lim_{s \to s_0} \frac{|\vec{B}'(s) - \vec{B}'(s_0)|}{|s - s_0|} = |\vec{B}''(s_0)|$

kde s je přirozený parametr, tj. B je při parametrizaci

5. hodina

Příští týden (2.4.2019) přednáška v T112

Prostorové křivky

$(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$, $\kappa \overset{\text{def}}{=} \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = |\vec{\beta}''(s)|$, s je přirozený parametr

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{|\vec{f}'(t)|}, \quad \vec{N}(t) = \left(\vec{f}'' - \frac{(\vec{f}'\cdot\vec{f}'')}{|\vec{f}'|^2}\vec{f}'\right)\cdot\left|\vec{f}'' - \frac{(\vec{f}'\cdot\vec{f}'')}{|\vec{f}'|^2}\vec{f}'\right|^{-1}, \quad \vec{B}(t) = (\vec{T}\times\vec{N})(t)$$

• Uvažujme přirozenou parametrizaci β:

$$\vec{T}(t) = \vec{\beta}'(t), \quad \vec{N}(t) = \frac{\vec{\beta}''(t)}{|\vec{\beta}''(t)|}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= \frac{d}{dt}\vec{\beta}'(t) = \vec{\beta}''(t) = \kappa(t)\vec{N}(t) \\ \vec{N}(t) &= -\kappa(t)\vec{T}(t) + \tau(t)\vec{B}(t) \\ \vec{B}(t) &= -\tau(t)\cdot\vec{N}(t) \end{aligned}}$$

Frenetovy vzorce

• $0 = \vec{B}\cdot\vec{T} \Rightarrow \dot{\vec{B}}\vec{T} + \dot{\vec{T}}\vec{B} = 0$

$\dot{\vec{B}}\vec{T} = -\dot{\vec{T}}\vec{B} = -\kappa\vec{N}\vec{B} = 0$

$\vec{B}\cdot\vec{B} = 1 \Rightarrow \dot{\vec{B}}\vec{B} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{B}}(t) = -\tau(t)\vec{N}(t)$

• $\vec{N}\cdot\vec{T} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{N}}T = -\dot{\vec{T}}\vec{N} = -\kappa$

$\dot{\vec{N}}\cdot\vec{N} = 0$.

$\vec{N}\vec{B} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{N}}\cdot\vec{B} = -\dot{\vec{B}}\cdot\vec{N} = \tau$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\dot{\vec{T}}\\ \dot{\vec{N}}\\ \dot{\vec{B}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{T}\\ \vec{N}\\ \vec{B}\end{pmatrix}}$$

Lemma:
Nechť $\vec{\beta}$ je přirozeně parametrizovaná křivka, $\kappa(t)>0$ pro $t\in(c,d)$.

Pak $\tau(t)=0 \Leftrightarrow \vec{\beta}(t)$ je rovinná

Důkaz:
$\Leftarrow$: Nechť $\vec{\beta}$ je rovinná $\Leftrightarrow \exists \vec{q},\vec{\mu} \in \mathbb{R}^3: (\vec{\beta}(t)-\vec{\mu})\vec{q}=0$

$$\Rightarrow \vec{\beta}'(t)\cdot\vec{q}=0 \Rightarrow \vec{T}\cdot\vec{q}=0$$
$$\Rightarrow \vec{N}\cdot\vec{q}=0$$
$$\Rightarrow \vec{B}(t)=\pm\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} \Rightarrow \dot{\vec{B}}=0 \Rightarrow \tau(t)=0$$

$\Rightarrow$: $\tau(t)=0 \Rightarrow \dot{\vec{B}}(t)=0$

$$f(t):=(\vec{\beta}(t)-\vec{\beta}(t_0))\vec{B} \Rightarrow f(t_0)=0$$
$$\Rightarrow f'(t)=\vec{\beta}'(t)\cdot\vec{B}=\vec{T}\cdot\vec{B}=0$$
$$\Rightarrow f(t)=0$$

tj: $(\vec{\beta}(t)-\vec{\beta}(t_0))\vec{B}=0$

$-\vec{\beta}(t_0)\equiv\vec{\mu}$

$\vec{B}\equiv\vec{q}$

Definice: Velikost torse
Nechť $\vec{\alpha}(t)$ má jednoznačně definované přilehlé roviny na intervalu (a,b), Označme $\rho(t_1,t_2)$ úhel přilehlých rovin v t_1, t_2.

Pak velikostí torse křivky $\vec{\alpha}$ v bodě $\vec{\alpha}(t_0)$ rozumíme:

$$\tilde{\tau}_\alpha(t_0):=\lim_{t\to t_0}\frac{|\rho(t,t_0)|}{|s(t,t_0)|}$$

Věta:
Pro regulární křivky s $\kappa > 0$ na (c,d) platí: $\tilde{\tau}_\alpha(t_0) = |\tau_\alpha(t_0)|$

Důkaz:
$$\tilde{\tau}_\alpha(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{|\vec{B}(t)-\vec{B}(t_0)|}{|s(t)-s(t_0)|} = \lim_{s\to s_0} \frac{|\vec{B}(s)-\vec{B}(s_0)|}{|s-s_0|} = |\dot{\vec{B}}(s_0)|$$
$$= |\tau(s_0)|$$

Frenetovy vzorce pro obecnou parametrizaci

$$\vec{T}_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|}\right) = \frac{\ddot{\vec{\alpha}}|\dot{\vec{\alpha}}| - \dot{\vec{\alpha}}\frac{d}{dt}|\dot{\vec{\alpha}}|}{|\dot{\vec{\alpha}}|^2} = \frac{\ddot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|} - \frac{\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|^2}\frac{(\dot{\vec{\alpha}}\cdot\ddot{\vec{\alpha}})}{|\dot{\vec{\alpha}}|} =$$
$$= \frac{1}{|\dot{\vec{\alpha}}|}\vec{N}_\alpha \left|\ddot{\vec{\alpha}} - \frac{(\dot{\vec{\alpha}}\cdot\ddot{\vec{\alpha}})}{|\dot{\vec{\alpha}}|^2}\dot{\vec{\alpha}}\right| = \vec{N}_\alpha \cdot \kappa_\alpha |\dot{\vec{\alpha}}|$$

• $\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(t(s)) \Rightarrow \vec{\beta}'(s) = \dot{\vec{\alpha}}(t(s))\, t'(s) = \dfrac{\dot{\vec{\alpha}}(t(s))}{|\dot{\vec{\alpha}}(t(s))|}$

$$\kappa(s) = |\vec{\beta}''(s)|, \quad \vec{\beta}''(s) = \frac{\ddot{\vec{\alpha}}(t)\cdot t'(s)|\dot{\vec{\alpha}}(t)| - \dot{\vec{\alpha}}(t)\frac{d}{ds}|\dot{\vec{\alpha}}(t(s))|}{|\dot{\vec{\alpha}}(t)|^2} =$$
$$= \frac{\ddot{\vec{\alpha}}|\dot{\vec{\alpha}}|^2 - (\dot{\vec{\alpha}}\cdot\ddot{\vec{\alpha}})\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|^4}$$
$$|\beta''(s)|^2 = \frac{|\ddot{\vec{\alpha}}|^2\cdot|\dot{\vec{\alpha}}|^4 - 2(\dot{\vec{\alpha}}\cdot\ddot{\vec{\alpha}})|\dot{\vec{\alpha}}|^2(\dot{\vec{\alpha}}\cdot\ddot{\vec{\alpha}}) + |\dot{\vec{\alpha}}|^2(\dot{\vec{\alpha}}\cdot\ddot{\vec{\alpha}})^2}{|\dot{\vec{\alpha}}|^8} =$$
$$= \frac{|\dot{\vec{\alpha}}|^2(\ddot{\vec{\alpha}}^2\dot{\vec{\alpha}}^2 - (\dot{\vec{\alpha}}\cdot\ddot{\vec{\alpha}})^2)}{|\dot{\vec{\alpha}}|^6} = \frac{(\dot{\vec{\alpha}}\times\ddot{\vec{\alpha}})^2}{|\dot{\vec{\alpha}}|^6}$$

$$\kappa_\alpha = \frac{\dot{\vec{\alpha}}\times\ddot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|^3}$$

6. hodina

Pokračování: Frenetovy vzorce po obecnou parametrizaci $\vec{\alpha}$

$$\dot{\vec{T}}_\alpha = \kappa_\alpha \vec{N}_\alpha |\dot{\vec{\alpha}}|$$
$$\dot{\vec{N}}_\alpha = (-\kappa_\alpha \vec{T}_\alpha + \tau \vec{B}_\alpha)|\dot{\vec{\alpha}}|$$
$$\dot{\vec{B}}_\alpha = -\tau \vec{N} |\dot{\vec{\alpha}}|$$

Jak napočítat torzi křivky? , ozn : $|\dot{\vec{\alpha}}| = v_\alpha$

$$\dot{\vec{\alpha}} = v_\alpha \vec{T}_\alpha \Rightarrow \ddot{\vec{\alpha}} = \dot{v}_\alpha \vec{T}_\alpha + v_\alpha \dot{\vec{T}}_\alpha = \dot{v}_\alpha \vec{T}_\alpha + v_\alpha \kappa_\alpha \vec{N}_\alpha v_\alpha$$

Smíšený součin vektorů $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$:
$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) := \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

$$(\dot{\vec{\alpha}}, \ddot{\vec{\alpha}}, \dddot{\vec{\alpha}}) = (v_\alpha \vec{T}_\alpha, \underbrace{\dot{v}_\alpha \vec{T}_\alpha}_{0 \text{ (antisymetrie)}} + v_\alpha^2 \kappa_\alpha \vec{N}_\alpha, \dddot{\vec{\alpha}})$$

- Chceme pouze tu část $\dddot{\vec{\alpha}}$, která je úměrná $\vec{B}_\alpha$, neboť zbylé průměty nehrají roli díky antisymetrii

$$\dddot{\vec{\alpha}} \sim \vec{B}_\alpha = v_\alpha^2 \kappa_\alpha (\dot{\vec{N}}_\alpha \sim \vec{B}_\alpha) = v_\alpha^2 \kappa_\alpha \tau_\alpha \vec{B}_\alpha v_\alpha =$$
$$= v_\alpha^3 \kappa_\alpha \tau_\alpha \vec{B}_\alpha$$

$$(\dot{\vec{\alpha}}, \ddot{\vec{\alpha}}, \dddot{\vec{\alpha}}) = \underbrace{v_\alpha^6 \kappa_\alpha^2}_{|\dot{\vec{\alpha}} \times \ddot{\vec{\alpha}}|^2} \tau_\alpha \underbrace{(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})}_{1}$$

$$\boxed{\tau_\alpha = \frac{(\dot{\vec{\alpha}}, \ddot{\vec{\alpha}}, \dddot{\vec{\alpha}})}{|\dot{\vec{\alpha}} \times \ddot{\vec{\alpha}}|^2}}$$

Důsledek:

Nechť $\vec{F}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} V(r)$ je centrální síla. Pak pohyb v tomto poli je rovinná křivka

Důkaz:

$$\mathcal{T}(\vec{x}(t)) = \frac{(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}$$

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}) = V'(r) \cdot \frac{\vec{x}}{r} = \vec{x}\, U(r)$$

$$\dddot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{x}}(t)\, U(r) + \vec{x}(t) \left(U'(r) \frac{\vec{x}}{r} \dot{\vec{x}} \right)$$

$$(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = (\dot{\vec{x}}, \vec{x} U, \dot{\vec{x}} U) + \left(\dot{\vec{x}}, \vec{x} U, \vec{x} U' \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}}{r}\right) = 0$$

2. Plochy v $\mathbb{R}^3$

- Sféra S_2 : $\begin{cases} \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / \vec{x}^2 = R^2\} \\ \vec{f} = \vec{f}(u,v) = \vec{f}(u^1, u^2) \end{cases}$

- Helikoid

- Möbiův list

Definice:

Parametricky zadanou (elementární) plochou nazveme zobrazení $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f} : (u,v) \mapsto (x, y, z)$. Kde Ω je otevřená souvislá podmnožina $\mathbb{R}^2$, $\vec{f} \in C^1(\Omega)$

Definice:

Parametricky zadaná plocha je regulární v bodě $\vec{f}(x_0, y_0)$

$$\Leftrightarrow h\left[\begin{pmatrix} f_{1,u} & f_{2,u} & f_{3,u} \\ f_{1,v} & f_{2,v} & f_{3,v} \end{pmatrix}\Bigg|_{(u,v)=(x_0,y_0)}\right] = 2, \quad f_{i,u} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial u}$$

- $\vec{f}$ - mapa

Úvod do křivek a ploch
(16. 4. 2019)

Plochy v $\mathbb{R}^3$:
- parametricky: $\tilde{f}: \Omega \to \mathbb{R}^3$
  $\Omega \in \mathbb{R}^2$
- implicitně: $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(\vec{x}) = 0\}$

Singulární body: $\left(\partial_u \tilde{f} \; \partial_v \tilde{f}\right)\Big|_{(u_0,v_0)} < 2$

$d\phi(x_0, y_0, z_0) = 0$

Definice:
Buď $S \subset \mathbb{R}^3$. S nazveme regulární plochou, pokud pro všechny její body $\tilde{x_0}$ existují okolí $H_{\tilde{x_0}} \subset \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a zobrazení $f: \Omega \to \mathbb{R}^3$, že:
① f je homeomorfismem Ω a $S \cap H_{\tilde{x_0}}$
② f je regulární parametricky zadaná plocha

Definice:
Nechť A, B jsou body regulární plochy, g je rovina procházející bodem A.
Rovinu g nazveme tečnou v bodě $A \Leftrightarrow \lim_{B \to A} \frac{\delta}{d} = 0$
kde $d = \|AB\|$, δ - vzdálenost B od g

Lemma
Tečná rovina v $\tilde{f}(u_0,v_0)$ je $[\partial_u f(u_0,v_0), \partial_v f(u_0,v_0)]_{\lambda}$

První fundamentální forma plochy:

Věta:

Nechť $\vec{\alpha}:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ je křivka, jejíž stopa leží na parametricky zadané ploše $\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R}^3$, která je homeomorfismem $\Omega\leftrightarrow\vec{f}(\Omega)$

Pak existuje rovinná křivka $\vec{\gamma}:(a,b)\to\Omega$, tak že: $\vec{\alpha}=\vec{f}\circ\vec{\gamma}$

Důkaz:

$\vec{f}$ je homeomorfní $\Rightarrow$ $\gamma:=\vec{f}^{-1}\circ\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha}(t)=(x(t),y(t),z(t))=\vec{f}(\vec{\gamma}(t))=\vec{f}(u(t),v(t))$$

$$s_\alpha(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt=(*)$$

$$\cdot\ \dot{x}(t)=\frac{d}{dt}\left(f_1(u(t),v(t))\right)=\frac{\partial f_1}{\partial u}(u(t),v(t))\,\dot{u}(t)+\frac{\partial f_1}{\partial v}(u(t),v(t))\,\dot{v}(t)$$

$$(*)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{(\partial_u f_1\dot{u}+\partial_v f_1\dot{v})^2+(\partial_u f_2\dot{u}+\partial_v f_2\dot{v})^2+(\partial_u f_3\dot{u}+\partial_v f_3\dot{v})^2}\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{u}^2\vec{f}_u^{\,2}+2\dot{u}\dot{v}\,\vec{f}_u\vec{f}_v+\dot{v}^2\vec{f}_v^{\,2}}\,dt=$$

$\vec{f}_u^{\,2}=:E\equiv g_{11}$

$\vec{f}_u\cdot\vec{f}_v=:F\equiv g_{12}$

$\vec{f}_v^{\,2}=:G$

$$=\int_{t_0}^{t}\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{u}^\mu\dot{u}^\nu}\,dt$$

$g:=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$, $g_{\mu\nu}$, $\mu,\nu\in\{1,2\}$

První fundamentální forma

Geodetiku pak získáme minimalizací integrálu S:

$$S[\gamma=(u^1(t),u^2(t))] = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\sqrt{g_{\mu\nu}\dot u^\mu \dot u^\nu}}_{L(u,\dot u)}\, dt$$

$$0 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot u^\rho}\right) + \frac{\partial L}{\partial u^\rho} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{\mu\rho}\dot u^\mu}{\sqrt{\dots}}\right) + \frac{\partial_\rho g_{\mu\nu}\dot u^\mu \dot u^\nu}{2\sqrt{\dots}}$$

• přechod k přirozenému parametru $u(t) \to U(s)$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\dots}\,dt \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dots} \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dots}}$$

$$U^\mu(s) = u^\mu(t(s)), \quad \frac{dU^\mu}{ds} = \frac{du^\mu}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \dot u^\mu \frac{1}{\sqrt{\dots}}$$

• $$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{\mu\rho}\dot u^\mu}{\sqrt{\dots}}\right) = \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\rho}(U)\cdot \dot U^\mu(s)\right)\cdot\frac{ds}{dt} =$$

$$= \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\rho}(U)\cdot \dot U^\mu(s)\right)\sqrt{\dots} = \frac{\partial_\rho \cancel{g_{\mu\nu}}\dot u^\mu \dot u^\nu}{2\sqrt{\dots}} = \partial_\rho \cancel{g_{\mu\nu}}\, \dot U^\mu \dot U^\nu \cdot \sqrt{\dots}$$

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\rho}\dot U^\mu\right) = \frac{1}{2}\partial_\rho g_{\mu\nu}\dot U^\mu \dot U^\nu}$$

Rovnice pro geodetiku v přirozeném parametru

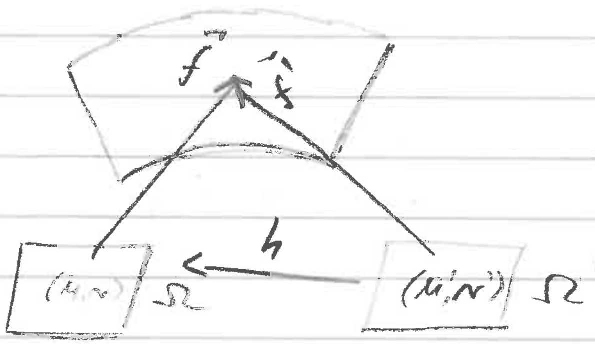
První fundamentální forma = metrický tenzor
(tenzorové pole)

$$g'_{\mu'\nu'}(u',v') = \frac{\partial u^\mu}{\partial u'^{\mu'}}\frac{\partial u^\nu}{\partial u'^{\nu'}} g_{\mu\nu}(u,v)$$

Riemannova varieta ~ Diferenciální varieta vybavená metrickým tenzorem

23. 4. 2019

Z minula: I. fundamentální forma $g_{\mu\nu}(\mu,\nu)$



$h = \vec f^{-1} \circ \vec f'$

$h : (\mu',\nu') \mapsto (\mu,\nu)$

$h(\mu',\nu') = (\hat\mu(\mu',\nu'), \hat\nu(\mu',\nu'))$

$$g'_{\mu'\nu'}(\mu',\nu') = \vec f'_{\mu'} \cdot \vec f'_{\nu'} = \vec f_{\mu'} \cdot \vec f_{\nu'} \,, \quad \mu',\nu' = 1,2$$

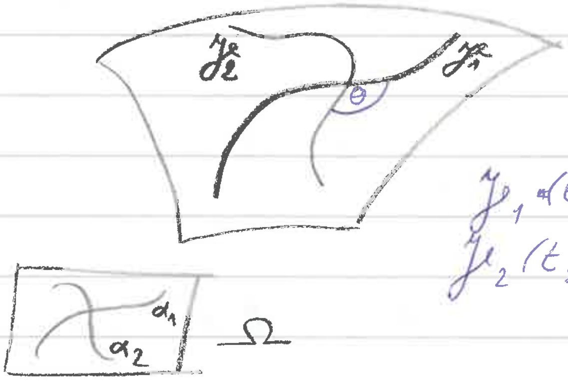
$$\vec f'_{\mu'} = \frac{\partial}{\partial \mu'} \vec f'(\mu',\nu') = \frac{\partial}{\partial \mu'} \vec f(\hat\mu(\mu',\nu'), \hat\nu(\mu',\nu')) =$$

$$= \vec f_\mu \frac{\partial \hat\mu}{\partial \mu'} + \vec f_\nu \frac{\partial \hat\nu}{\partial \mu'} = \vec f_\mu \frac{\partial \hat\mu^\mu}{\partial \mu'}$$

$$\vec f'_{\nu'} = \vec f_\nu \frac{\partial \hat\mu^\nu}{\partial \nu'} \longrightarrow \vec f'_{\nu'} = \vec f_\nu \frac{\partial \hat\mu^\nu}{\partial \mu^{\nu'}}$$

$$g'_{\mu'\nu'} = \left(\vec f_\mu \frac{\partial \mu^\mu}{\partial \mu^{\mu'}}\right) \cdot \left(\vec f_\nu \frac{\partial \mu^\nu}{\partial \mu^{\nu'}}\right) = \frac{\partial \mu^\mu}{\partial \mu^{\mu'}} \frac{\partial \mu^\nu}{\partial \mu^{\nu'}} g_{\mu\nu}(\mu(\mu',\nu'), \nu(\mu',\nu'))$$

Úhel mezi křivkami



$$\gamma_1(t_1) = \vec{f}(\alpha_1(t_1)) = \vec{f}(u(t_1), v(t_1))$$
$$\gamma_2(t_2) = \vec{f}(\alpha_2(t_2)) = \vec{f}(\tilde{u}(t_2), \tilde{v}(t_2))$$

$$\cos\theta = \frac{\dot{\vec{\gamma}}_1(t_1)\cdot\dot{\vec{\gamma}}_2(t_2)}{\|\dot{\vec{\gamma}}_1(t_1)\|\,\|\dot{\vec{\gamma}}_2(t_2)\|} =$$

$$\dot{\vec{\gamma}}_1(t_1) = \vec{f}_u \cdot \dot{u}(t_1) + \vec{f}_v \dot{v}(t_1)$$
$$\dot{\vec{\gamma}}_2(t_2) = \vec{f}_{\tilde{u}}\, \dot{\tilde{u}}(t_2) + \vec{f}_{\tilde{v}} \cdot \dot{\tilde{v}}(t_2)$$

$$\dot{\vec{\gamma}}_1(t_1)\cdot\dot{\vec{\gamma}}_2(t_2) = (\vec{f}_u \dot{u} + \vec{f}_v \dot{v})(\vec{f}_u \dot{\tilde{u}} + \vec{f}_v \dot{\tilde{v}}) =$$
$$= \underbrace{\vec{f}_u \cdot \vec{f}_u}_{E} \dot{u}\dot{\tilde{u}} + \underbrace{\vec{f}_u \vec{f}_v}_{F} (\dot{u}\dot{\tilde{v}} + \dot{\tilde{u}}\dot{v}) + \underbrace{\vec{f}_v \cdot \vec{f}_v}_{G} \dot{v}\dot{\tilde{v}}$$

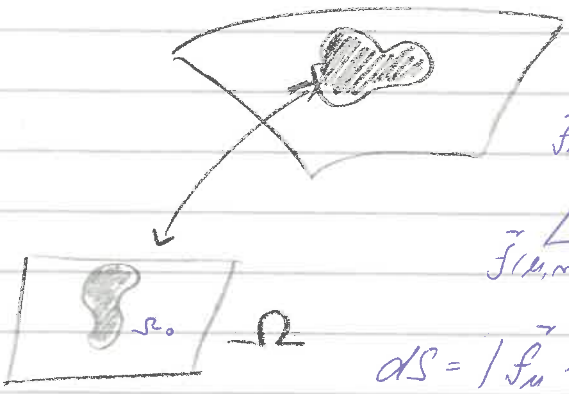
$$\|\dot{\vec{\gamma}}_1(t_1)\|^2 = \dot{\gamma}_1(t_1)\cdot\dot{\gamma}_1(t_1) = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

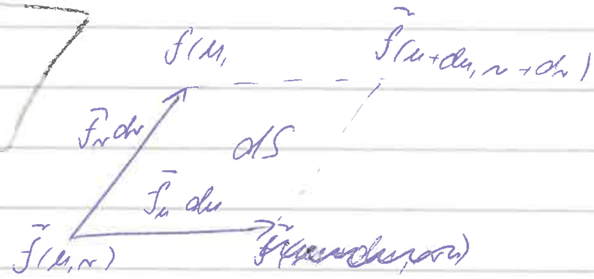
$$\cos\theta = \frac{E\dot{u}\dot{\tilde{u}} + F(\dot{u}\dot{\tilde{v}} + \dot{\tilde{u}}\dot{v}) + G\dot{v}\dot{\tilde{v}}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\sqrt{E\dot{\tilde{u}}^2 + 2F\dot{\tilde{u}}\dot{\tilde{v}} + G\dot{\tilde{v}}^2}} =$$

$$= \frac{\dot{\vec{\alpha}}_1^T g \dot{\vec{\alpha}}_2}{\sqrt{\dot{\vec{\alpha}}_1^T g \dot{\vec{\alpha}}_1}\sqrt{\dot{\vec{\alpha}}_2^T g \dot{\vec{\alpha}}_2}}$$

Je-li $F = 0$, pak se zachovává ortogonalita.

Plocha na ploše:





$$dS = |\vec{f}_u \times \vec{f}_v| \, du \, dv$$

$$S = \int_{\Omega_0} |\vec{f}_u \times \vec{f}_v| \, du \, dv = \int_{\Omega_0} \sqrt{\det g} \, du \, dv$$

$$|\vec{f}_u \times \vec{f}_v|^2 = (\vec{f}_u \times \vec{f}_v) \cdot (\vec{f}_u \times \vec{f}_v) = \ldots = \det g$$

II. Fundamentální forma