

VOAF

~~Netlumeno' malé' knižky soustav hmotných bodů~~

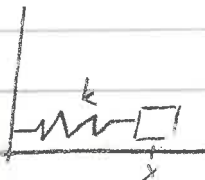
Netlumeno' malé' knižky soustav hmotných bodů
kolem stabilní rovnovážné polohy

NETLUMENÉ KMITY

1. stupeň volnosti: $m\ddot{x} = -kx - \cancel{b\dot{x}}$, řešení $x(t)$

↑
vratná
síla

↑
viskozni
tlumení



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

① předpokládáme $x(t) = e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0$$

② charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

③ fundamentální systém řešení:
 $\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}$

Princip superpozice:

$\psi_1(t), \psi_2(t)$ jsou řešení

$\Rightarrow \psi(t) = C_1 \psi_1(t) + C_2 \psi_2(t)$ je
 řešení pro libovolná C_1, C_2

Obecné řešení:

1. $x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \in \mathbb{R}$

$$C_1 = \frac{a+ib}{2}, C_2 = \frac{a-ib}{2}$$

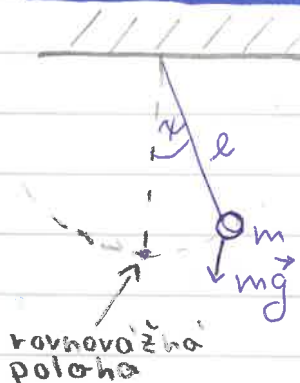
$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

2. $x(t) = \frac{a}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \frac{ib}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)$

3. $x(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\cos \varphi} \cdot \cos(\omega t) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\sin \varphi} \cdot \sin(\omega t) \right) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

Matematické kyvadlo



$$m l \ddot{\psi} = -mg \sin \psi \quad \text{nelineární}$$

$$\sin \psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \dots$$

$$\text{linearizace: } \sin \psi \approx \psi$$

$$m l \ddot{\psi} + mg \psi = 0$$

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l} \psi = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Soustava hmotných bodů

$m_i \ddot{x}_i = F_i, \quad i \in \hat{n}, \quad n = \text{počet stupňů volnosti}$ stabilní r.p.
 síly jsou konzervativní $\Leftrightarrow$ platí zákon zachování energie
 $\Leftrightarrow \boxed{F_i = - \frac{\partial U(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}}$

$$m \ddot{x} = -kx = F = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) / x$$

$$m \ddot{x} x = -kx x$$

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2}_{\text{ENERGIE}} \right) = 0 \quad \text{zákon zachování energie}$$

rovnovážné polohy: $F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \in \hat{n}$

stabilní rovnovážná poloha: lokální ostře minimum U

Linearizace:

Taylorův rozvoj U kolem $(x_{01}, \dots, x_{0n})$ do 2. řádu

$$U(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{U(x_{01}, \dots, x_{0n})}_{\text{volím 0}} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial U(x_{01}, \dots, x_{0n})}{\partial x_i}}_{\text{rovnovážná poloha, } F_i=0} (x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 U(x_{01}, \dots, x_{0n})}{\partial x_i \partial x_j}}_{U_{ij}} (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \dots$$

vyčtylky z normovažné polohy : $\xi_i = x_i - x_{0i}$

$$\tilde{U}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n U_{ij} \xi_i \xi_j$$

$$m_i \ddot{x}_i = m_i \ddot{\xi}_i$$

$$m_i \ddot{\xi}_i = - \sum_j \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i}$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_k} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[U_{ij} \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_k} \xi_j + U_{ij} \frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_k} \xi_i \right] = \frac{1}{2} \left(\sum_j U_{kj} \xi_j + \sum_i U_{ki} \xi_i \right) = *$$

$$* = \sum_j U_{jk} \xi_j$$

$$m_k \ddot{\xi}_k + \sum_j U_{jk} \xi_j = 0$$

Řešení pomocí modelu $\xi_i(t) = \xi_i \cos(\omega t + \varphi)$

ω - úhlová frekvence : radián (s^{-1})

ν - frekvence : $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$: Hz

T - perioda : $T = \frac{2\pi}{\omega}$: s

φ - fáze : radián

X - amplituda podle úlohy

přklady : n stupňů volnosti $x_1, \dots, x_n \rightarrow \xi_1 = x_1 - x_{01}, \dots, \xi_n = x_n - x_{0n}$
 , kde $\vec{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ je normovažná poloha

2. hodina

Věta

Soustava $m_i \ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^m U_{ij} \xi_j = 0$ má fundamentální systém řešení n možností.

Věta

Soustava $m_i \ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^m U_{ij} \xi_j = 0$ je ekvivalentní soustavě n nerozvěšlých oscilátorů

LINEÁRNÍ ALGEBRA

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \xi(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^m U_{ij} \xi_j &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m m_i \delta_{ij} \ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^m U_{ij} \xi_j &= 0 \end{aligned}$$

$$A := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_m \end{pmatrix}, \quad [B]_{ij} := U_{ij}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}: \sum_{j=1}^m m_i \delta_{ij} x_j (-\omega^2) \cos(\omega t + \varphi) + \sum_{j=1}^m U_{ij} x_j \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m (m_i \delta_{ij} (-\omega^2) + U_{ij}) x_j = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\omega^2 A + B) X = \vec{0}$$

zřejmě mají možností, tj. $X \neq \vec{0}$

~

$\Rightarrow$ charakteristická rovnice $\det(-\omega^2 A + B) = 0$
po vlastních kmitových frekvencích ω

$\Rightarrow$ algebraická rovnice:

$$a_n \omega^{2n} + a_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + a_1 \omega^2 + a_0 = 0$$

$\Rightarrow$ vždy existují n komplexních kořenů

Věta

Soustava $m_i \ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^n U_{ij} \xi_j = 0$ má fundamentální systém řešení m modů sklopných čísel ω_j^2

- ① Matice A je pozitivně definitní
- ② Matice B je pozitivně definitní

úloha na vlastní čísla $BX = \omega^2 AX$

Vlastní vektory příslušné různým ^{vlastním} číslům ω_k^2, ω_l^2 jsou A -ortogonální

$$(x, y)_A = x^T A y$$

$$\left. \begin{aligned} B x^{(k)} &= \omega_k^2 A x^{(k)} \quad x^{(k)T} \\ B x^{(l)} &= \omega_l^2 A x^{(l)} \rightarrow x^{(l)T} B^T = \omega_l^2 x^{(l)T} A^T \quad | x^{(k)} \end{aligned} \right\} -$$

$$0 = \underbrace{(\omega_k^2 - \omega_l^2)}_{\neq 0} \underbrace{x^{(l)T} A x^{(k)}}_{(x^{(k)}, x^{(l)})_A = 0} \quad , \quad (x^{(k)}, x^{(k)}) = 1, \forall k \in \hat{n}$$

$$\underbrace{x^{(k)T} B x^{(k)}}_{> 0} = \underbrace{\omega_k^2}_{> 0} \underbrace{x^{(k)T} A x^{(k)}}_{> 0}$$

můžeme $(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ A -ortogonální normovaná

$$C = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}), \quad [C]_{ij} = x_i^{(j)}$$

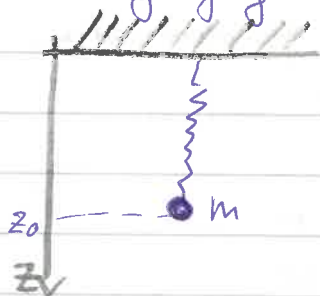
přivedu soustavu: $A \ddot{\xi} + B \xi = 0$

$$\xi(t) = C \eta(t) : AC \ddot{\eta}(t) + BC \eta(t) = 0 \quad C^T$$

$$\underbrace{C^T A C}_{I} \ddot{\eta}(t) + \underbrace{C^T B C}_{\begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_m^2 \end{pmatrix}} \eta(t) = 0$$

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = 0 \quad j \in \hat{n}$$

Proč vychýlký z rovnovážné polohy?



$$m\ddot{z} = mg - k(z - a_0)$$

$$F|_{\text{rovn}} = mg - k(z_0 - a_0) = 0$$

$$z_0 = \frac{mg}{k} + a_0$$

$$x = z - z_0 = z - \frac{mg}{k} - a_0$$

$$(z - a_0) = x + \frac{mg}{k}$$

$$\ddot{z} = \ddot{x}$$

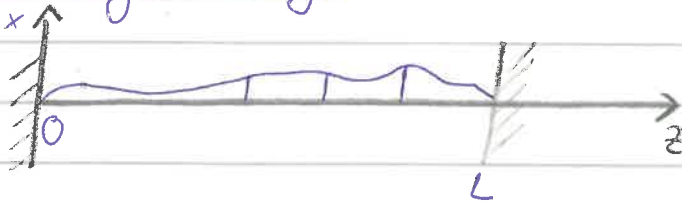
$$m\ddot{x} = mg - k\left(x + \frac{mg}{k}\right) = -kx$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$U(z) = -mgz + \frac{1}{2}k(z - a_0)^2$$

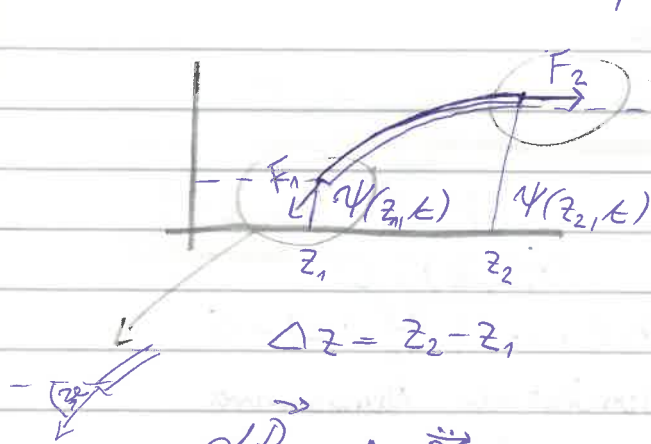
$$U(z) - U(z_0) = \frac{1}{2}kx^2$$

Kmity struny



- charakterizujeme lineární hustotou: $\rho = \text{konst}$
- síla napínající strunu: T

cíl: lineari zovaná pohybová rovnice



I. věta impulsů

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}(e)$$

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

$$\vec{v} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{v}$$

$$\rho \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z_0, t)}{\partial t^2} = F_{1x} + F_{2x} = -|\vec{F}_1| \sin \varphi_1 + |\vec{F}_2| \sin \varphi_2 =$$

$$= T(-\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2) = T \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}(z_1, t) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(z_2, t) \right) =$$

$$= T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z_0, t) \Delta z$$

↑
Lagrangeova rovnice o působení síly

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}}$$

vlnová rovnice pro strunu

W1 W0
Wels / Wolfram

3. hodina

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Metody řešení

① Fourierova metoda

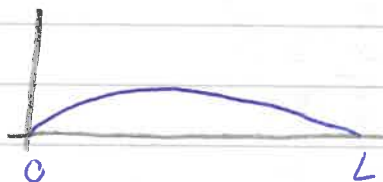
- metoda modů $\psi(z, t) = X(z) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

② d'Alembertova metoda

- metoda postupných vln

Okrajové podmínky

- první konec: $\forall t: \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$
- první a volný konec: $\forall t: \underbrace{\psi(0, t) = 0}_{\text{Dirichletova}}, \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial z}(L, t) = 0}_{\text{Neumannova}}$



metoda modů

$$\rho X(z) (-\omega^2) \cos(\omega t + \varphi_0) = T X''(z) \cos(\omega t + \varphi_0), X(0) = X(L) = 0$$

→ zkrátíme koeficienty

$$X''(z) + \underbrace{\omega^2 \frac{\rho}{T}}_{k^2} X(z) = 0$$

$$X''(z) + k^2 X(z) = 0 \Rightarrow X(z) = A \sin(kz) + B \cos(kz)$$

$$X(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X(L) = A \cdot \sin(kL) = 0$$

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow \text{nekonečně mnoho řešení tvaru } kL = m\pi$$

$$k > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{N}$$

$$x^{(m)}(x) = \sin(k_m x), \quad \psi^{(m)}(x, t) = \sin(k_m x) \cdot \cos(\omega_m t + \varphi_m), m \in \mathbb{N}$$

$$k_m^2 = \omega_m^2 \frac{\rho}{T} \Rightarrow \begin{cases} \omega_m = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k_m \\ k_m = m \frac{\pi}{L} \end{cases} \quad \begin{aligned} k_m &= m k_1 \\ \omega_m &= m \omega_1 \\ \nu_m &= m \nu_1 \end{aligned}$$

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = \frac{2\pi}{m \frac{\pi}{L}} = \frac{2L}{m} = \frac{\lambda_1}{m}$$

$$\frac{2\pi}{T_m} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{2\pi}{\lambda_m} \Rightarrow \frac{\lambda_m}{T_m} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad \lambda_m \nu_m = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Obecné řešení rovnice s prvními konci:

$$\psi(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \sin(k_m x) \cdot \cos(\omega_m t + \varphi_m)$$

libovolné konstanty

• počáteční podmínky

$$\psi(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

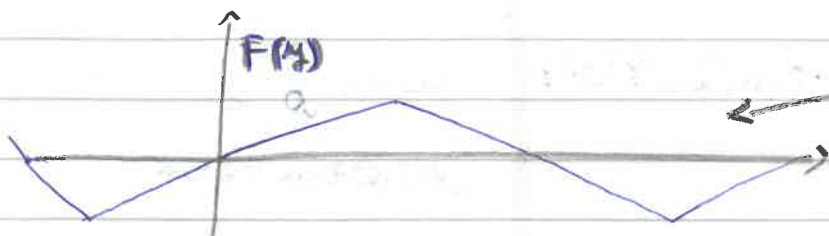
$$\psi(x, 0) = \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \sin(k_m x) \cdot \cos \varphi_m = f(x)$$

Fourierova řada funkce $F(x)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \sin(k_m x) \cdot (-\omega_m) \sin \varphi_m = g(x)$$

$$\text{Pozn: } g(x) = 0 \Rightarrow -\omega_m A_m \cdot \sin \varphi_m = 0, \forall m \in \mathbb{N}$$

• periodické prodloužení $f(x)$ podle funkce $\sin$



Obecná Fourierova řada

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x))$$

Orthogonalita funkcí

$$\bullet \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \cos(k_m x) \cos(k_n x) dx = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} [\cos(k_m+k_n)x + \cos(k_m-k_n)x] dx =$$
$$= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\lambda_1}{2}, & m = n \end{cases}$$

$$\bullet \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \sin(k_m x) \sin(k_n x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\lambda_1}{2}, & m = n \end{cases}$$

$$\bullet \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \sin(k_m x) \cdot \cos(k_n x) dx = 0$$

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(x) \cdot \cos(k_m x) dx = a_m \frac{\lambda_1}{2}$$

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(x) \cdot \sin(k_m x) dx = b_m \frac{\lambda_1}{2}$$

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(x) \cdot 1 \cdot dx = \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \frac{a_0}{2} dx = \frac{\lambda_1}{2} a_0$$

Fourierovy
koeficienty

$$a_m = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(x) \cdot \cos(k_m x) dx$$

$$b_m = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(x) \cdot \sin(k_m x) dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(x) dx$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

vlnová délka

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k$$

disperzní vztah

4. hodina

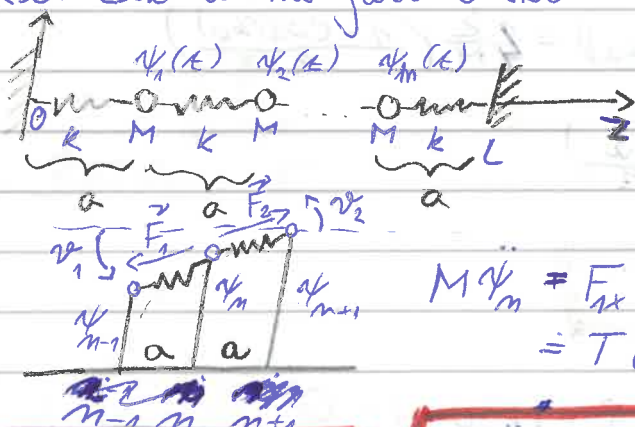
Struna: $\lambda v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = v$ fázová rychlost
 $\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot k = vk$ disperzní vztah

$\omega = \omega(k)$ definujeme fázovou rychlost

$$v = \frac{\omega(k)}{k} = v(k)$$

$$\lambda v = c, \text{ pro elektromag. vlnění}$$

Řetěz atomů jako diskretizace struny



$$M\ddot{\psi}_m = F_{1x} + F_{2x} = T(-\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) = \\ = T(\tan \varphi_2 - \tan \varphi_1) = T\left[\frac{\psi_{m+1} - \psi_m}{a} - \frac{\psi_m - \psi_{m-1}}{a}\right] =$$

$$T = ka, L = (m+1)a$$

$$M\ddot{\psi}_m = k(\psi_{m+1} - 2\psi_m + \psi_{m-1}), \forall m \in \mathbb{N} \\ \psi_0 = \psi_{m+1} = 0, \forall k$$

Metoda mode: $\psi_m(x) = x_m \cos(\omega t + \phi)$

$$-\omega^2 M x_m = k(x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1})$$

$$-\omega^2 A + B = \begin{pmatrix} 2k - \omega^2 M & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & 2k - \omega^2 M \end{pmatrix} ?$$

charakteristická rovnice: $\det(-\omega^2 A + B) = 0$

• z rovnice rovnice: $\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$
 $\psi(z, t) = \underbrace{x(z)} \cos(\omega t + \phi)$
 $x(z) = \sin(kz)$

- pokusíme se rešidnovat řešení ve tvaru:

$$x_m = \sin(kna)$$

- ověříme jeho správnost

$$\begin{aligned} x_{m+1} + x_{m-1} &= \sin(k(m+1)a) + \sin(k(m-1)a) = \\ &= \sin(kna + ka) + \sin(kna - ka) = \\ &= \underbrace{2\sin(kna)}_{x_m} \cdot \cos(ka) = \left(-\omega^2 \frac{M}{K} + 2\right) x_m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \cos(ka) = -\omega^2 \frac{M}{K} + 2$$

$$\omega^2 = \frac{K}{M} (2 - 2\cos(ka)) = 4 \frac{K}{M} \left(\frac{1 - \cos(ka)}{2} \right)$$

$$\omega^2 = 4 \frac{K}{M} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

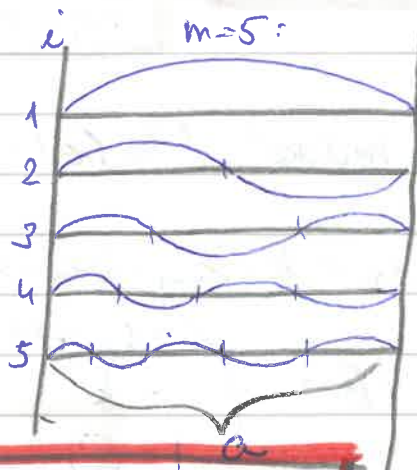
$$\boxed{\omega = 2 \sqrt{\frac{K}{M}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)}$$

okrajové podmínky: $x_0 = \sin(k \cdot 0 \cdot a) = 0$

$$x_{m+1} = \sin(k(m+1)a) = 0$$

$$k_i(m+1)a = i\pi, i \in \hat{m}$$

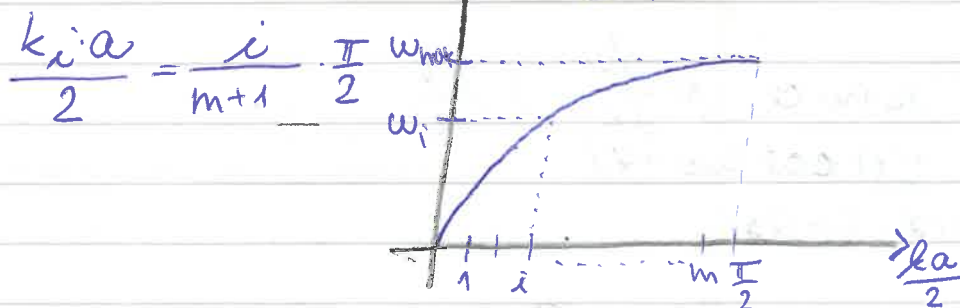
$$\boxed{k_i = \frac{i\pi}{(m+1)a}, i \in \hat{m}}$$



Obecné řešení

$$\boxed{x_m(k) = \sum_{i=1}^m A_i \sin(k_i m a) \cdot \cos(\omega_i t + \phi_i)}$$

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{K}{M}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$



V dlouhodobé limitě je řešení dobře aproximováno spojitým řešením

$$a \rightarrow 0 \quad L = (m+1)a : m \rightarrow +\infty,$$

$$\rho = \frac{M}{a} : M \rightarrow 0,$$

$$T = ka : k \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} w(k) &= 2\sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{k}{M}} \left(\frac{ka}{2!} - \frac{1}{3!} \left(\frac{ka}{2}\right)^3 + \dots \right) = \\ &= \sqrt{\frac{k}{M}} ka = \sqrt{\frac{ka}{\frac{M}{a}}} k = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k \end{aligned}$$

$$\frac{ka}{2} \ll \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \ll \frac{\pi}{2}$$

$$a \ll \frac{\lambda}{2}$$

• d'Alembertovo řešení vlnové rovnice

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\xi = z - vt$$

$$\eta = z + vt$$

$$\psi(\xi, \eta) \rightarrow \tilde{\psi}(\xi, \eta) \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \tilde{\psi}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \tilde{\psi} = \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(-v \frac{\partial}{\partial \xi} + v \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \tilde{\psi}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(-v \frac{\partial}{\partial \xi} + v \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(-v \frac{\partial}{\partial \xi} + v \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \tilde{\psi} = v^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \eta^2}$$

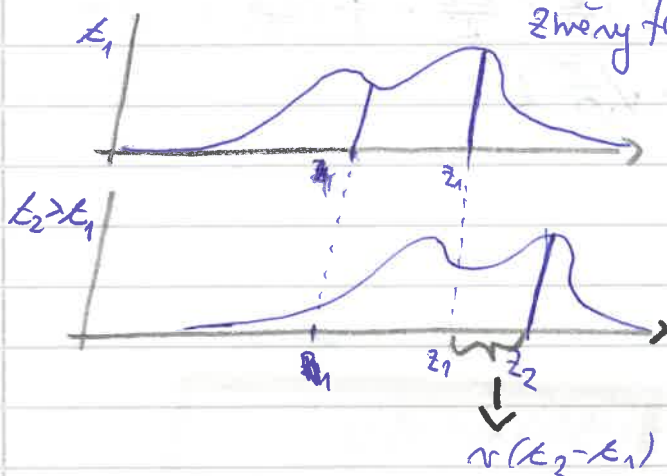
• dostaneme rovnici:

$$4v^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \rightarrow \text{řešeno'm } \tilde{\psi}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

$$\psi(z, t) = F(z - vt) + G(z + vt)$$

$\psi(z, t) = F(z - vt)$, postupná vlna, která bere

změny tvaru postupně ve směru osy z



$$z_2 - vt_2 = z_1 - vt_1$$

$$z_2 - z_1 = v(t_2 - t_1)$$

Úloha

$$\psi(z, t) = F(z - vt) + G(z + vt), \quad z \in (-\infty, +\infty)$$

$$x(t) = \psi(0, t)$$

$$\textcircled{*} = F(0 - v(t - \frac{z}{v})) = \psi(0, t - \frac{z}{v}) = x(t - \frac{z}{v})$$

retardovaný čas

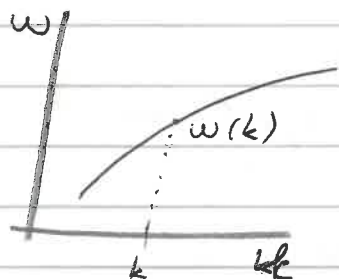
5. hodina

Harmonická postupná vlna

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\psi(z, t) = x\left(t - \frac{z}{v}\right) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi\right) \Rightarrow A \cos(\omega t - k z + \varphi)$$

$\frac{\omega}{k} = v$
fázová



$$v = \frac{\omega(k)}{k}$$

$$\omega = v k$$

$$2\pi v = v \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda v = v \quad (\lambda v = c \sim \text{optice})$$

viditelné světlo 350 - 750 nm
 $uv \leftarrow r \quad c \rightarrow r c$

$$\omega t_1 - k z_1 + \varphi = C = \omega t_2 - k z_2 + \varphi$$

$$k(z_2 - z_1) = \omega(t_2 - t_1)$$

$$z_2 - z_1 = \frac{\omega}{k}(t_2 - t_1) = v(t_2 - t_1)$$

$$\omega(t + T) - k z + \varphi = \omega t + k z + \varphi + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \quad \text{úhlová}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu \quad \text{frekvence [s}^{-1}\text{]}$$

$$\omega t - k(z + \lambda) + \varphi = \omega t - k z + \varphi + 2\pi \Rightarrow k \lambda = 2\pi \quad \text{vlnová}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{číslo [m}^{-1}\text{]}$$

Vlny v prostoru

Maxwellovy rovnice

• po vlně $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{rot } \vec{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{j}$$

předepsaná zřídla pole: $\rho(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t)$

ϵ, μ konstantní: izotropní } prostředí
homogenní }

ve vakuu:

$$\epsilon = \epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

$$\text{Weberův vztah: } \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (1850)$$

$$\text{Coul. síla: } \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\text{Mag. síla: } \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}{\frac{\mu_0}{4\pi}} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c^2$$

Kolikrát je el. síla silnější, než magnetická

Odvození vlnových rovnic pro $\vec{E}, \vec{B}$

• předpokládáme prázdný prostor: $\rho = 0$
 $\vec{j} = 0$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad / \text{rot}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$$

$$\text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{rot } \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad / \text{rot}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{rot}(\epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}$$

$$\text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$\Delta \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\epsilon\mu = \frac{1}{v^2}, \quad \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$v \leq c$$

$$\epsilon \geq \epsilon_0 \quad \sim \text{dielektrika}$$

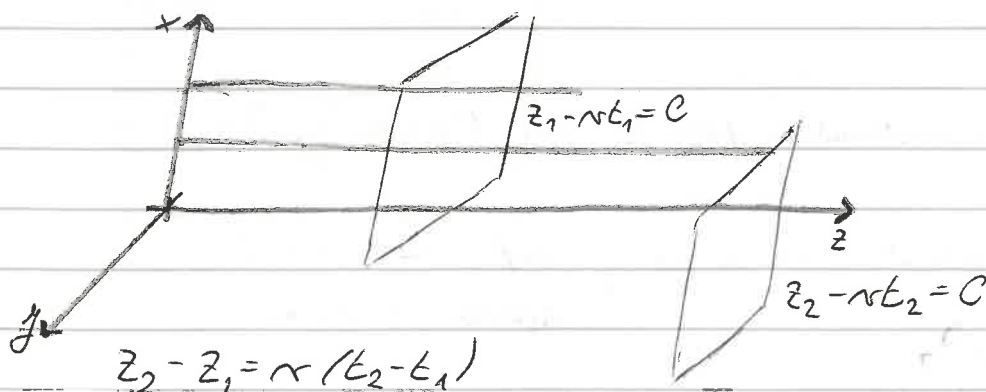
$$\mu = \mu_0 \quad \begin{matrix} \text{rozdi } 10^{-3} \text{ paramagnetika} \\ \text{rozdi } 10^{-6} \text{ diamagnetika} \end{matrix}$$

$$(\text{absolutní}) \text{ index lomu } n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r} \geq 1$$

Vlny v prostoru

1 složka $\psi(x, y, z, t)$

• Rovinná vlna: $F(z - vt)$



harmonická rovinná vlna

$$\psi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - kz + \phi)$$

• rovinná vlna šíří se ve směru $\vec{s}$, $\|\vec{s}\|=1$

$$\psi(\vec{r}, t) = F(\underbrace{\vec{s} \cdot \vec{r} - vt}_{\xi})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \Delta F$$

ověříme, že splňuje rovnici

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (-v) F' = -v \frac{dF}{d\xi}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = (-v)^2 F'' = v^2 \frac{d^2 F}{d\xi^2}$$

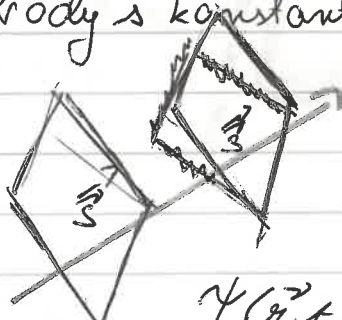
$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = s_i \frac{dF}{d\xi}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = s_i^2 \frac{d^2 F}{d\xi^2} \rightarrow \Delta F = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^3 s_i^2 \frac{d^2 F}{d\xi^2} = \frac{d^2 F}{d\xi^2}$$

body s konstantní fází: $\vec{s} \cdot \vec{r} - vt = C$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$\perp$ k rovině, $d = -vt - C$



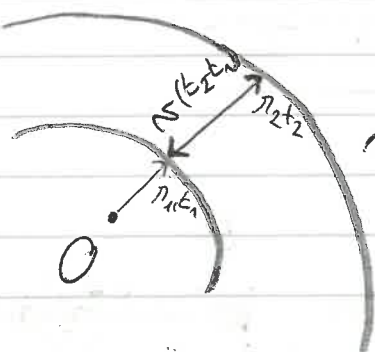
$$\vec{k} = k\vec{s}$$

$$\omega = \omega(k)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

Rovina konstantní fáze se šíří fázovou rychlostí

plocha konstantní fáze je $\omega t - k r + \varphi = C$
sféra $r = \text{konst}$



$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - k r + \varphi)$$

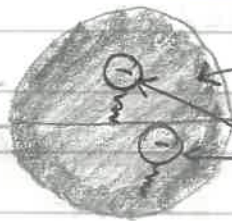
vlna klesá s rostoucí vzdáleností r počátku

6. hodina

Nejjednodušší teorie indexu lomu: elektronová teorie Thomsonova

model atomu:

reakce atomu na
dopadající EM vlnu



spojitě rozloženy
kladný náboj
kmitající elektrony

Vynucené kmity a tlumené kmity

• tlumené kmity:

soustava $m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$2\gamma = \frac{h}{m}$$

hledáme řešení ve tvaru $x(t) = e^{\lambda t}$:

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

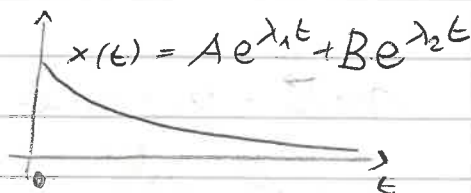
$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

charakteristická rovnice

	tlumení
$\omega_0 > \gamma$	slabé
$\omega_0 = \gamma$	kritické
$\omega_0 < \gamma$	silné

(optika: velmi slabé $\omega_0 \approx 10^{15} \text{ s}^{-1} \gg 10^8 \text{ s}^{-1}$
radiace i tlum
 $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$
(auto tlumiče)

• silné tlumení: $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0$



• (velmi) slabé tlumení:

fundamentální systém: $\{e^{-\gamma t} e^{i\omega t}, e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}\}$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} A \cos(\omega t + \varphi)$$

• vyváženej kmity

$$m \ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\Omega t)$$

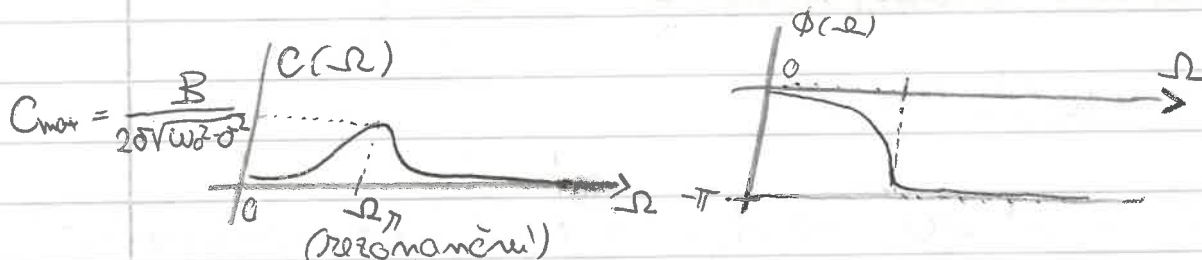
$$\ddot{x} + 2\sigma \dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos(\Omega t), B = \frac{F_0}{m}$$

$$x(t) = \underbrace{x_{part}(t)}_{\text{ustálené kmity}} + \underbrace{A e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{přechodný jev}}$$

$$x(t) = a \cdot \cos(\Omega t) + b \cdot \sin(\Omega t)$$

$$x(t) = C(\Omega) \cos(\Omega t + \phi(\Omega))$$

$$C(\Omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\sigma^2 \Omega^2}}, \arg \phi(\Omega) = \frac{-2\sigma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$



• EM monochromatická vlna $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$
 $\vec{B}(t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t)$

$(\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{s})$ tvoří OB soustavu
 $E_0 = c B_0$

$$m \ddot{\vec{r}} + 0 + m \omega_0^2 \vec{r} = e (\vec{E}(t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(t)) = e (\vec{E}_0 + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0) \cos(\omega t)$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c}, \frac{\|\dot{\vec{r}}\|}{c} \ll 1$$

nerelativistická aproximace

$$m \ddot{\vec{r}} + m \omega_0^2 \vec{r} = e \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

zajímavá má's ustálená' kmity: $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 \cdot \cos(\omega t)$

$$(-m\omega^2 \vec{x}_0 + m\omega_0^2 \vec{x}_0) \cos(\omega t) = eE_0 \cos(\omega t)$$

$$-m\omega^2 \vec{x}_0 + m\omega_0^2 \vec{x}_0 = eE_0 \rightarrow \vec{x}_0 = \frac{eE_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)m}$$

$$\boxed{\vec{x} = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)}$$

$$\vec{p}(t) = e\vec{x}(t) = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \quad / \cdot N \text{ atomů typu } u_0 \approx 1 \text{ m}^3$$

elektrický dipólový moment

definice' vz' tak: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

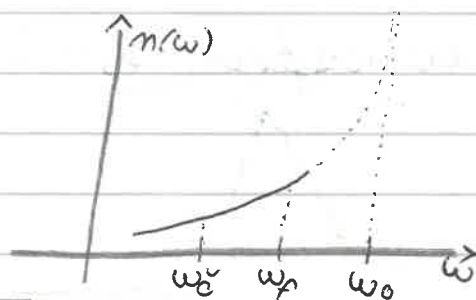
$$\vec{P}(t) = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}(t)$$

$$\vec{D}(t) = \left(\epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \vec{E}(t)$$

ϵ

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)$$

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}}$$



$$\boxed{v(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{\omega}{k(\omega)}}$$

fo'zora' rychlost monochromaticke' vlny

splnění' vlnové rovnice

pro ψ_ω :

$$\frac{\partial^2 \psi_\omega}{\partial t^2} = n(\omega)^2 \frac{\partial^2 \psi_\omega}{\partial z^2}$$

$$(-\omega^2) \psi_\omega = n(\omega)^2 (-k(\omega)^2) \psi_\omega$$

$$\boxed{\psi_\omega(z, t) = A \cos(\omega t - k(\omega)z + \varphi)}$$

dispersion' prostředí': $n = n(\omega)$

světlo je nedisperzní prostředí:

$$\frac{\omega}{k} = v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \text{ pro všechna } \omega$$

• EM vlny v plazmatu

$$m \ddot{\vec{x}} + 0 \neq e \vec{E}_0 \cos(\omega t) \rightarrow m(\omega) = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}}$$

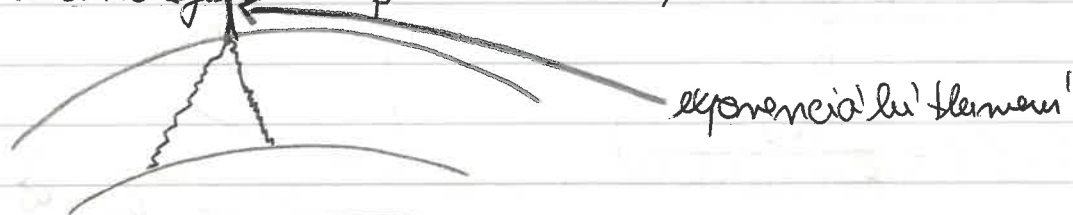
$\omega_0 = 0$

$$\underbrace{\omega^2 m^2}_{c^2 k^2} = \omega^2 - \underbrace{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}_{\omega_p^2} \text{ plazmová frekvence}$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2}, \omega \geq \omega_p, k = k(\omega)$$

disperzní vztah pro plazma

ionosféra: $\nu_p \approx 20 \text{ MHz}$, $\lambda \approx 15 \text{ m}$



$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}}{k} > c$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} < c, \text{ grupová rychlost}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\omega_p^2 \psi + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}$$

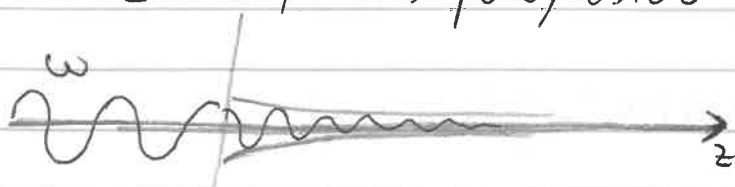
$$-\omega^2 = -\omega_p^2 - c^2 k^2$$

evanescentní vlna

hledáme řešení tvaru: $\psi(z, t) = X(z) \cdot \cos(\omega t)$, pro $\omega < \omega_p$

7. hodina

$z \in (-\infty; +\infty)$ polaprostor



vynešené kvity $\Psi_w(z, t) = X(z) \cos(\omega t)$
EM pole v plazmatu
(ustálené kvity)

$$X(z)(-\omega^2) \cos(\omega t) = -\omega_p^2 X(z) \cos(\omega t) + c^2 X''(z) \cos(\omega t), \forall t$$

$$c^2 X''(z) + (\omega^2 - \omega_p^2) X(z) = 0 \rightarrow X''(z) + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} X(z) = 0$$

• $\omega^2 - \omega_p^2 = 0$: $X(z) = A + Bz$, toto řešení vyloučíme, neboť $X(z)$ diverguje: $z \rightarrow +\infty$

• $\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = (k(\omega))^2 > 0 \rightarrow$ fundamentální systém $\{e^{ikz}, e^{-ikz}\}$

$$\Psi_w(z, t) = C_1 e^{ikz} \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) + C_2 e^{-ikz} \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right)$$

$$\Psi_w(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi) \text{ transparentní vlna pro } \omega > \omega_p$$

• $\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = (k(\omega))^2 < 0$: $X''(z) - (k(z))^2 X(z) = 0$
(realitní prostředí) fundamentální systém $\{e^{kz}, e^{-kz}\}$

$$\Psi_w(z, t) = A e^{-k(\omega)z} \cos(\omega t + \varphi) \quad \downarrow \text{diverguje (vyloučíme)}$$

evanescentní vlna

$$\text{disperzní vztah: } \boxed{\omega^2 = \omega_p^2 - c^2 (k(\omega))^2} \quad \omega < \omega_p$$

Řetězové atomů: $\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$, $\omega \leq 2\sqrt{\frac{K}{M}} = \omega_{\max}$
transparentní

$\omega \geq \omega_{\max}$: reaktivní

vynucená kmitů: $\psi_m(t) = A(-1)^m e^{-kma} \cos(\omega t)$

$$M \ddot{\psi}_m = K(\psi_{m-1} - 2\psi_m + \psi_{m+1})$$

$$M A (-1)^m e^{-kma} (-\omega^2) \cos(\omega t) = K \left[A (-1)^{m+1} e^{-k(m+1)a} + 2A (-1)^m e^{-kma} + A (-1)^{m-1} e^{-k(m-1)a} \right] \cos(\omega t)$$

$$\omega^2 M = K(e^{-ka} + 2 + e^{ka})$$

$$\omega^2 = 4 \frac{K}{M} \left(\frac{e^{-\frac{ka}{2}} + e^{\frac{ka}{2}}}{2} \right)^2 \quad \leftarrow ?$$

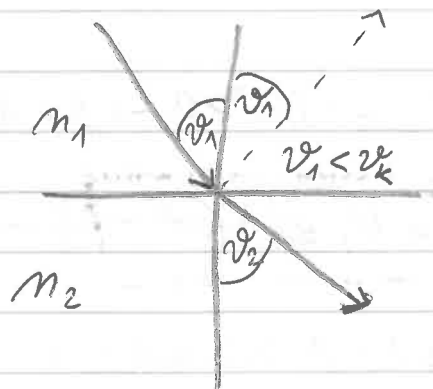
$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \cosh\left(\frac{ka}{2}\right) \geq \omega_{\max}$$

Totální odraz

$$n_1 > n_2$$

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$$

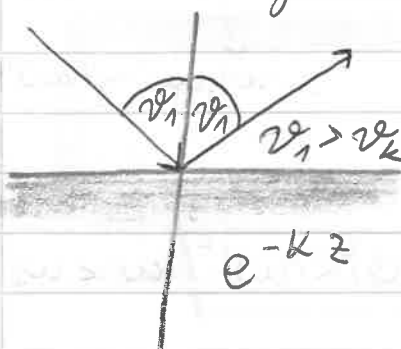
$$\text{když } \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}: \vartheta_1 = \vartheta_{1k}$$



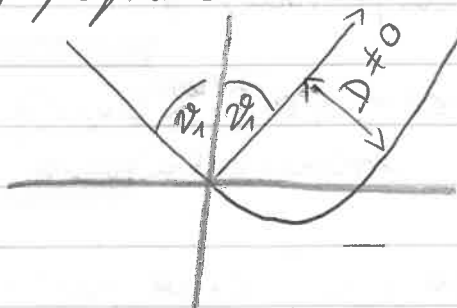
$$n_1 \sin \vartheta_k = n_2$$

$$\sin \vartheta_k = \frac{n_2}{n_1} < 1$$

$\vartheta_1 > \vartheta_k$: jen odražený paprsek



evanescentní vlna



Goos-Hänchenův jev

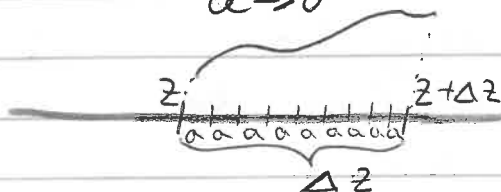
Energie vlnění na struně ρ, T

$$\psi(z, t), \quad z \in (0, L) \quad \rho = \frac{M}{a}$$

~~kin~~
~~pot~~

$$T = \kappa a$$

$$a \rightarrow 0$$



$$E_{kin} : \quad \Delta z = \sum_{z < na < z + \Delta z} \frac{1}{2} M \dot{\psi}_n^2 = \frac{\Delta z}{a} \cdot \frac{1}{2} M \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = (*)$$

lin. hustota kin. energie

$$(*) = \frac{\Delta z}{a} \cdot \frac{1}{2} M \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad \text{střední hodnota}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2} \quad ?$$

$$E_{pot} : \quad U_{n+1} = - \int_a^L (-k z') dz' = \frac{1}{2} k (L^2 - a^2) = \frac{1}{2} k (\psi_{n+1} - \psi_n)^2$$

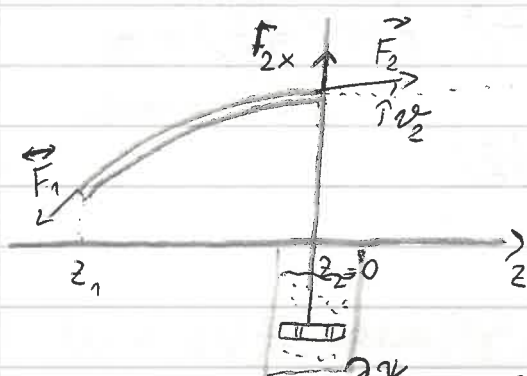
$$\mu \Delta z = \sum_{z < na < z + \Delta z} U_{n,n+1} = \frac{\Delta z}{a} \cdot \frac{1}{2} k \left(a \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2}$$

8. hodina (Norotny!)

Odrasy vln na struně

- korektní zakončení struny:
přesně napodobuje pokračování struny -
musí přijmout veškerou energii dopadající vlny
 $\Rightarrow$ tlumič působící na strunu silou F_x



$$F_{2x} = T \frac{\partial \psi}{\partial z} (0, t)$$

d'Alembertovo řešení postupně vlny:

$$\psi(z, t) = F(z - vt) + G(z + vt), (z - \infty)$$

$$F_x = 2 F_{2x} = T \frac{\partial \psi}{\partial z} = T \left(-\frac{1}{v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right) = -\frac{T}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial \psi}{\partial t} =$$

$$= -\sqrt{\frac{T\mu}{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \text{ síla viskózního tlumiče}$$

(úměrná rychlosti)

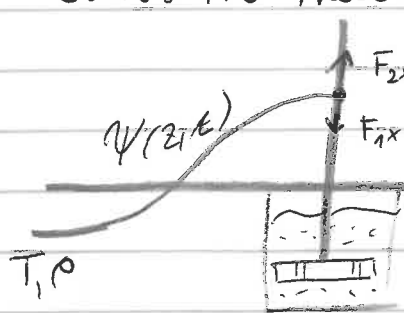
$$F_x = -Z \frac{\partial \psi}{\partial t} (0, t) = -Z \frac{dx(t)}{dt}, x(t) := \psi(0, t)$$

Definice

Charakteristická impedance struny $Z := \sqrt{T\mu}$

- Je-li struna zakončena korektně, nelze vysílatelným signálem změřit délku struny

- odraz na nekorektním zakončení



$$F_{2x} = -Z_2 \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

struna: rychlost: $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

impedance: $Z = \sqrt{T\rho}$

impedance klamice: $Z_2 \neq Z$

d'Alambertovo řešení: $\psi(z,t) = F(z+vt) + G(z-vt)$
 $z \in (-\infty, 0)$

okrajová podmínka v $z=0$: $|F_{1x}| = |F_{2x}|$
 (zakona akce a reakce)

$$F_{1x} = -T \frac{\partial \psi}{\partial z}(0,t) = -\left(Z_2 \frac{\partial \psi}{\partial z}(0,t)\right)$$

$$-T [F'(-vt) + G'(vt)] = Z_2 [-v F'(-vt) + v G'(vt)]$$

$$G'(vt) (Z_2 v + T) = (Z_2 v - T) F'(-vt)$$

$$G'(vt) = \frac{Z_2 v + T}{Z_2 v + T} F'(-vt)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v} G(vt) \right) = \frac{Z_2 v - T}{Z_2 v + T} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{v} F(-vt) \right)$$

$$G(vt) = \frac{-Z_2 v + T}{Z_2 v + T} F(-vt) + C$$

↑ poslem řešení vt x

$$G(vt) = \frac{\frac{T}{v} - Z_2}{\frac{T}{v} + Z_2} F(-vt) = \underbrace{\frac{Z - Z_2}{Z + Z_2}}_R F(-vt)$$

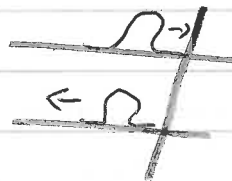
$$R = \frac{Z - Z_2}{Z + Z_2} : \text{koeficient odrazu (po amplitudě)}$$

$$\psi(z, t) = \overbrace{F(z - vt)}^{\text{dopředující}} + \overbrace{G(z + vt)}^{\text{odvrácená}} = \\ = F(z - vt) + R F(-z - vt)$$

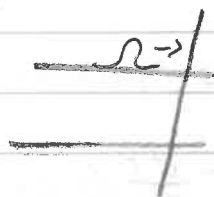
$$z_2 \in \langle 0; +\infty \rangle \Rightarrow R \in \langle -1; 1 \rangle$$

Speciální případy:

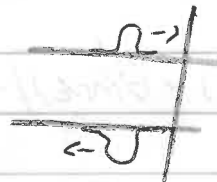
$$z_2 = 0 : R = 1 \text{ - volný konec}$$



$$z_2 = z : R = 0 \text{ - koreštrní zalamění}$$



$$z_2 = +\infty : R = -1 \text{ - pevný konec}$$



Pro harmonickou vlnu

$$F(z - vt) = A \cos(\omega t - kz) = \underline{A \cos(-k(z - \frac{\omega}{k}t))}$$

$$G(z + vt) = R F(-z - vt) = R A \cos(-k(-z - vt)) \otimes F$$

$$\otimes = R A \cos(\underbrace{k}_{\omega} vt + kz)$$

Vlna na rozhraní dvou transparentních prostředí

• dvě struny

$z_1 = \sqrt{T_1/\rho_1}$, T_1, ρ_1 , $z < 0$
 $\frac{\partial \psi_1}{\partial t^2} = \frac{T_1}{\rho_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2}$
 dopadající
 $z_2 = \sqrt{T_2/\rho_2}$, T_2, ρ_2 , $z > 0$
 $\frac{\partial \psi_2}{\partial t^2} = \frac{T_2}{\rho_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2}$
 odražená

$\psi_1(z, t) = F_1(z + v_1 t) + G_2(z + v_1 t)$, $z \in (-\infty, 0)$

$\psi_2(z, t) = F_2(z + v_2 t) + G_2(z + v_2 t)$, $z \in (0, +\infty)$

Okrajové podmínky u $z=0$:

① Spojitost strun $\psi_1(0, t) = \psi_2(0, t)$, $\forall t$

$F_1(v_1 t) + G_1(-v_1 t) = F_2(v_2 t) + G_2(v_2 t)$

② Zákony akce a reakce: $|F_{1x}| = |F_{2x}|$ síla, kterou působí struna 1 na strunu 2

$T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}(0, t) = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z}(0, t)$

$T_1 [F_1'(-v_1 t) + G_1'(v_1 t)] = T_2 [F_2'(-v_2 t) + G_2'(v_2 t)]$

$T_1 \left[\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{v_1} F_1(-v_1 t) \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v_1} G_1(v_1 t) \right) \right] = T_2 \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{v_2} F_2(-v_2 t) \right)$

$\frac{d}{dt} \left(-\frac{T_1}{v_1} F_1(-v_1 t) + \frac{T_1}{v_1} G_1(v_1 t) \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{T_2}{v_2} F_2(-v_2 t) \right)$

$F_1(-v_1 t) + G_1(v_1 t) = \frac{T_2}{T_1} \frac{v_1}{v_2} F_2(-v_2 t) + C$

$\oplus 2F_1(-v_1 t) = \left(1 + \frac{T_2}{T_1} \frac{v_1}{v_2} \right) F_2(-v_2 t) + \tilde{C}$

$F_2(-v_2 t) = \frac{2}{1 + \frac{T_2 v_1}{T_1 v_2}} F_1(-v_1 t) + \tilde{C}$

$\boxed{F_2(-v_2 t) = D_{12} F_1(-v_1 t) + \tilde{C}}$

$$P_{12} = \frac{2}{1 + \frac{\frac{T_2}{\kappa_2}}{\frac{T_1}{\kappa_1}}} = \frac{2}{1 + \frac{z_2}{z_1}} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}$$

Koeficient přechodu

$$G_1(\kappa_1 t) = F_2(-\kappa_2 t) - F_1(-\kappa_1 t) = P_{12} F_1(-\kappa_1 t) - F_1(-\kappa_1 t) + \tilde{C}$$

$$G_1(\kappa_1 t) = \underbrace{(P_{12} - 1)}_{R_{12}} F_1(-\kappa_1 t) + \tilde{C}$$

$$R_{12} = P_{12} - 1 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

Koeficient odrazu

$$G_1(\kappa_1 t) = R_{12} F_1(-\kappa_1 t) + \tilde{C}$$

$$\text{Řešení: } \psi_1(z, t) = F_1(z - \kappa_1 t) + \underbrace{R_{12} F_1(-(z + \kappa_1 t))}_{G_1(z + \kappa_1 t)} + \tilde{C}$$

$$\psi_2(z, t) = P_{12} F_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} (z - \kappa_2 t)\right) + \tilde{C}$$

Paseu řešení!
a konstanta:
volíme $\tilde{C} = 0$

Koeficienty odrazu a přechodu pro energetické veličiny

Tok energie: $S_z(z, t) = -T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$

$\psi_{\text{dop}}(z, t) = F_1(z - v_1 t)$

$S_z^{\text{dop}}(z, t) = -T_1 F_1'(z - v_1 t) (-v_1) F_1'(z - v_1 t) = T_1 v_1 (F_1'(z - v_1 t))^2$

$\psi_{\text{odr}}(z, t) = R_{12} F_1(-z - v_1 t)$

$S_z^{\text{odr}}(z, t) = -T_1 R_{12}^2 (-1) F_1'(z - v_1 t) (-v_1) F_1'(-z - v_1 t) = -T_1 v_1 R_{12}^2 (F_1'(-z - v_1 t))^2$

$\psi_{\text{prš}}(z, t) = P_{12} F_1\left(\frac{v_1}{v_2}(z - v_2 t)\right)$

$S_z^{\text{prš}}(z, t) = -T_2 P_{12}^2 \frac{v_1}{v_2} F_1'\left(\frac{v_1}{v_2}(z - v_2 t)\right) (-v_1) F_1'\left(\frac{v_1}{v_2}(z - v_2 t)\right) =$
 $= T_2 \frac{v_1^2}{v_2} P_{12}^2 (F_1'\left(\frac{v_1}{v_2}(z - v_2 t)\right))^2$

Koeficient odrazu (pro intenzitu $I = \langle S_z(z, t) \rangle$):

$R_{12} = \frac{|S_z^{\text{odr}}(0, t)|}{|S_z^{\text{dop}}(0, t)|} = \frac{T_1 v_1 (F_1'(0 - v_1 t))^2 R_{12}^2}{T_1 v_1 (F_1'(-v_1 t))^2} = R_{12}^2$

Koeficient přechodu (pro I):

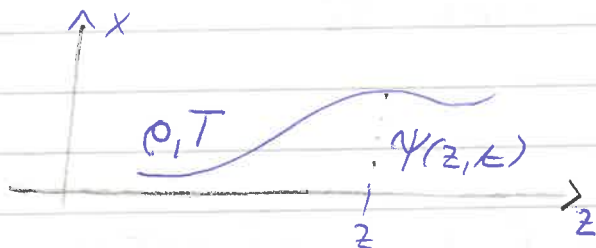
$P_{12} = \frac{|S_z^{\text{prš}}(z, t)|}{|S_z^{\text{dop}}(z, t)|} = \frac{T_2 \frac{v_1^2}{v_2} P_{12}^2 (F_1'(\frac{v_1}{v_2} v_2 t))^2}{T_1 v_1 (F_1'(-v_1 t))^2} = \frac{T_2}{T_1} \frac{v_1}{v_2} P_{12}^2 = \frac{z_2}{z_1} P_{12}^2$

$R_{12} = R_{12}^2 = \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2}$ Odrazivost

$P_{12} = \frac{z_2 (z_1 + z_2)^2}{z_1 (z_1 + z_2)^2} = \frac{4 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}$ Transmisivita

9. hodina (masový)

Energetické veličiny na struně



$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\omega^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{vlnová rovnice}$$

- lineární hustota kinetické energie $\mathcal{K} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2$
- lineární hustota potenciální energie $\mathcal{U} = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2$
- Totéž energie $S_z = -T \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}$ } Js⁻¹ = W

Zákon zachování energie

- mapy: hmotný bod v poli konzervativní síly $\vec{F} = -\text{grad } U(\vec{r})$
 $m \ddot{\vec{r}} = -\text{grad } U(\vec{r})$
 $m \ddot{x}_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}$

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r})$$

trajektorie: $x_i = x_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$

E se zachovává, jestliže $E = \text{konst.}$ na každé trajektorii

kritériem: $\frac{dE}{dt} = 0$ v důsledku poh. rovnice

$$\frac{dE(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial E}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_i} \frac{d\dot{x}_i}{dt} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial E}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) + \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i(t) \right) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i + m \dot{x}_i \ddot{x}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + m \ddot{x}_i \right)}_0 \dot{x}_i = 0$$

zákon zachování náboje $\rho(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t)$



$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{f} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V \text{div} \vec{j} dV$$

$$\Rightarrow - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \text{div} \vec{j} dV$$

limitní přechod: $-\frac{\partial \rho}{\partial t} V_m = \text{div} \vec{j} V_m$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

Zákon zachování energie po struně

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial S_z}{\partial z} = 0 \quad \text{v důsledku pohybových rovnic}$$

$$\mathcal{H}(z, t) = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} \right)^2 \quad \text{řídící poh. rovnice}$$

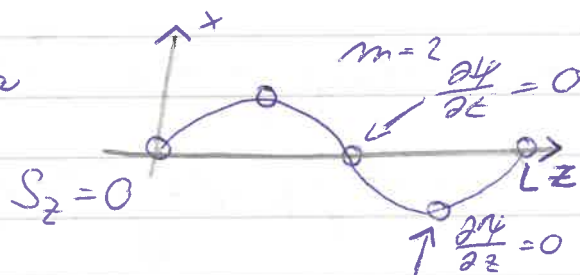
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-T \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) =$$

$$= \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + T \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} - T \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} =$$

zhrnutí
komplexy

$$\downarrow \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

12) stojatá vlna



Postupná vlna

$$\psi(z, t) = F(z - vt): \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = F'(z - vt) \cdot 1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = F'(z - vt) \cdot (-v) \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho (-v)^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \mathcal{H}_z$$

$$S_z = -T \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -T \frac{\partial \psi}{\partial z} (-v \frac{\partial \psi}{\partial z}) = T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 v = 2\mathcal{H}v$$

Speciální případ: Harmonická postupná vlna

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad \omega = vk$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz + \varphi)$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} T k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz + \varphi)$$

$$S_z = T \omega k A^2 \sin^2(\omega t - kz + \varphi)$$

výslovné frekvence: střední hodnoty < časové / prostorové

$$\langle t_1, t_2 \rangle, f(t)$$

$$\langle f(t) \rangle = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt}{t_2 - t_1}$$

periodické funkce: $F(t+T) = F(t)$

$$\langle F(t) \rangle_T = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} F(t) dt}{T}$$

intenzita $I = \langle |S_z| \rangle_T = \frac{1}{2} T \omega k A^2$

$\psi = \psi_1 + \psi_2$ ale $I \neq I_1 + I_2$

$I_{\#} = I_1 + I_2 + I_{\text{int}}$
interferenční člen

Fourierovy řady: funkce $F(z)$ je periodická: $F(z + \lambda_1) = F(z)$

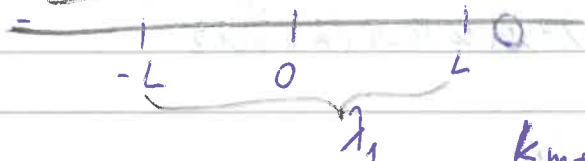
$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_n z) + B_n \sin(k_n z)$$

$k_n = n k_1 = n \frac{2\pi}{\lambda_1}$, $A_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{u_0}^{u_0 + \lambda_1} F(u) \cos(k_n u) du$

$B_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{u_0}^{u_0 + \lambda_1} F(u) \sin(k_n u) du$

$$F_z = \frac{1}{\lambda_1} \int_{u_0}^{u_0 + \lambda_1} F(u) du + \frac{2}{\lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{u_0}^{u_0 + \lambda_1} F(u) (\cos(k_n z) \cos(k_n u) + \sin(k_n z) \sin(k_n u)) du$$

ale $\cos(k_n(z-u))$



$k_{m+1} - k_m = \Delta k = (m+1 - m) \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$

Náda funkce $f(z) \in L^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)| dz < +\infty$

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du < +\infty$
 $\longrightarrow 0$

$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} F(u) \cos(k(z-u)) dk du =$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) (\underbrace{\cos(ku)}_{A(k)} \cdot \cos(kz) + \underbrace{\sin(ku)}_{B(k)} \sin(kz)) dk du$

$A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(ku) du$

$B(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin(ku) du$

$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(k) \cos(kz) + B(k) \sin(kz)) dk$

10. hodina

Fourierova řada: periodické funkce $F(z+2\pi) = F(z)$, $z \in \mathbb{R}$

Fourierova transformace: neuplňuje periodičnosti $f(z)$, $z \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)| dz < +\infty, f \in L^1(\mathbb{R})$$

signál přeneslý
konečnou energii

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2 dz < +\infty, f \in L^2(\mathbb{R})$$

$$f(z) = \int_0^{+\infty} (a(k) \sin(kz) + b(k) \cos(kz)) dk$$

$$a(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos(kz) dz$$

$$b(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \sin(kz) dz$$

Časová závislost:

$$x(t) = \int_0^{+\infty} (a(\omega) \sin(\omega t) + b(\omega) \cos(\omega t)) d\omega$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega$$

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$$

$$\cos \phi(\omega) = \frac{a(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}, \quad \sin \phi(\omega) = \frac{b(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}$$

$$\begin{aligned} C(\omega) &:= \frac{a(\omega) - i b(\omega)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^{+\infty} \left(a(\omega) \frac{e^{+i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + b(\omega) \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) d\omega = \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{a(\omega) - ib(\omega)}{2} e^{i\omega t} + \frac{a(\omega) + ib(\omega)}{2} e^{-i\omega t} \right) d\omega = \\
 &= \int_0^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \underbrace{\int_0^{+\infty} \overline{c(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega}_{\text{dodefinujme: } \overline{c(\omega)} = c(-\omega), \quad \omega' = -\omega} = \int_0^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{-\infty} c(\omega') e^{i\omega' t} (-d\omega') = \\
 &\quad \omega' = -\omega \\
 &\quad d\omega' = -d\omega
 \end{aligned}$$

$$\boxed{- \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega}$$

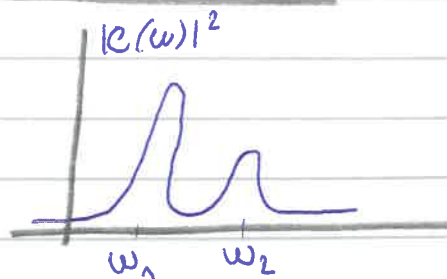
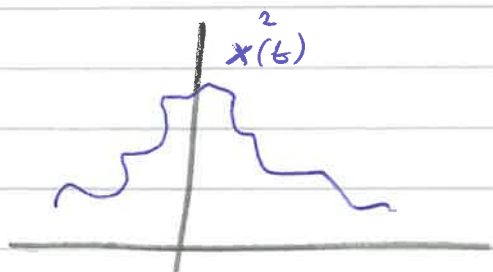
Parsevalova věta:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) c(\omega) e^{i\omega t} d\omega dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{i\omega t} dt}_{2\pi c(-\omega)} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) c(\bar{\omega}) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |c(\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c(\omega) \in L^2(\mathbb{R}) \quad c(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt : \text{spektrum signálu} \\
 x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} dt : \text{spektrální rozklad signálu}
 \end{aligned}$$

Důsledkem Fourierovy transformace je vztah mezi šířkou signálu a šířkou jeho spektra:

$$\boxed{\Delta\omega \Delta t \geq \frac{1}{2}}$$

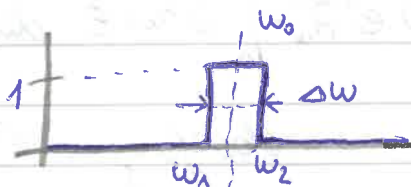


Příklad: $x(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \delta(\omega)) d\omega$

$$\psi(z, t) = x(t') = x\left(t - \frac{z}{v}\right) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t' + \delta(\omega)) d\omega =$$

$$= \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t - kz + \delta(\omega)) d\omega$$

Předpoklady: $\delta(\omega) = 0$



$$\psi(z, t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(\omega t') \omega \frac{1}{t'} \left[\sin(\omega t') \right]_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} d\omega =$$

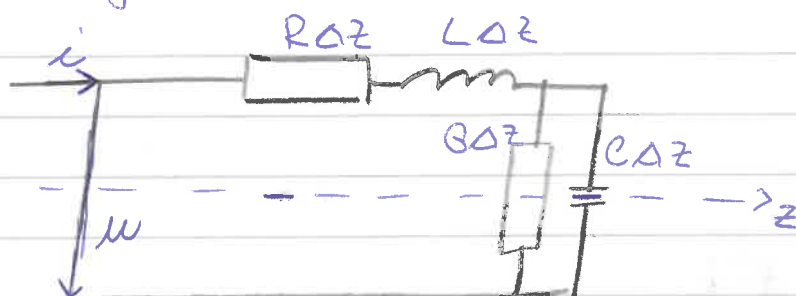
$$= \frac{\sin(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}) - \sin(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2})}{t'}$$

$$= \Delta\omega \underbrace{\frac{\sin(\frac{\Delta\omega}{2} t')}{\frac{\Delta\omega}{2} t'}}_{\text{amplifaktor modulace}} \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{nosná vlna}}$$

Odnození grupové rychlosti $v_g = \omega'(k_0)$:

11. hodina

Homogenní rození



$$u(z + \Delta z, t) = u(z, t) + \Delta u(z, t)$$

$$i(z + \Delta z, t) = i(z, t) + \Delta i(z, t)$$

$$\Delta u = -(R \Delta z i + L \Delta z \frac{\partial i}{\partial t}) \quad , \Delta z \rightarrow 0$$

$$\Delta i = -(G \Delta z u + C \Delta z \frac{\partial u}{\partial t})$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial z} &= Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial z} &= Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

Telegrafní rovnice

Fourierova metoda řešení

$$u(z, t) = U(z) e^{j\omega t}$$

$$i(z, t) = I(z) e^{j\omega t}$$

$$-U'(z) e^{j\omega t} = R I(z) e^{j\omega t} + j\omega L I(z) e^{j\omega t}$$

$$-I'(z) e^{j\omega t} = G U(z) e^{j\omega t} + j\omega C U(z) e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} -U'(z) &= (R + j\omega L) I(z) \\ -I'(z) &= (G + j\omega C) U(z) \end{aligned} \quad \begin{matrix} R \ll \omega L \\ G \ll \omega C \end{matrix} \Rightarrow \begin{aligned} -U'(z) &= j\omega L I(z) \\ -I'(z) &= j\omega C U(z) \end{aligned}$$



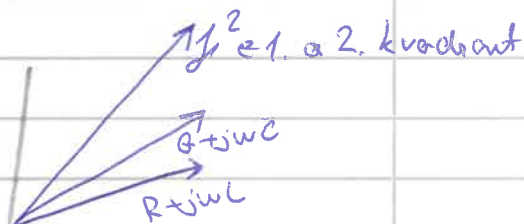
Vlnová rovnice:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial z} \right) = L \frac{\partial}{\partial t} \left(C \frac{\partial u}{\partial t} \right) = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = C \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = C \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = C \frac{\partial}{\partial t} \left(L \frac{\partial i}{\partial t} \right) = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$



$$-U''(z) = -(R + j\omega L)(G + j\omega C)U(z)$$

$$j_1 = \beta + jk, \quad \beta \geq 0, \quad k > 0$$

$$-U''(z) = j^2 U(z)$$

$$U''(z) - j^2 U(z) = 0, \text{ fundamentální systém: } \{e^{jz}, e^{-jz}\}$$

$$\begin{aligned} u(z, t) &= (A_1 e^{jz} + A_2 e^{-jz}) e^{j\omega t} = \\ &= A_1 e^{\beta z} e^{jkz} e^{j\omega t} + A_2 e^{-\beta z} e^{-jkz} e^{j\omega t} = \\ &= A_1 e^{\beta z} e^{j(\omega t + kz)} + A_2 e^{-\beta z} e^{j(\omega t - kz)} \end{aligned}$$

$$I(z) \neq \frac{U'(z)}{R + j\omega L}$$

$$i(z, t) = \frac{1}{R + j\omega L} j (A_1 e^{jz} + A_2 e^{-jz}) e^{j\omega t} =$$

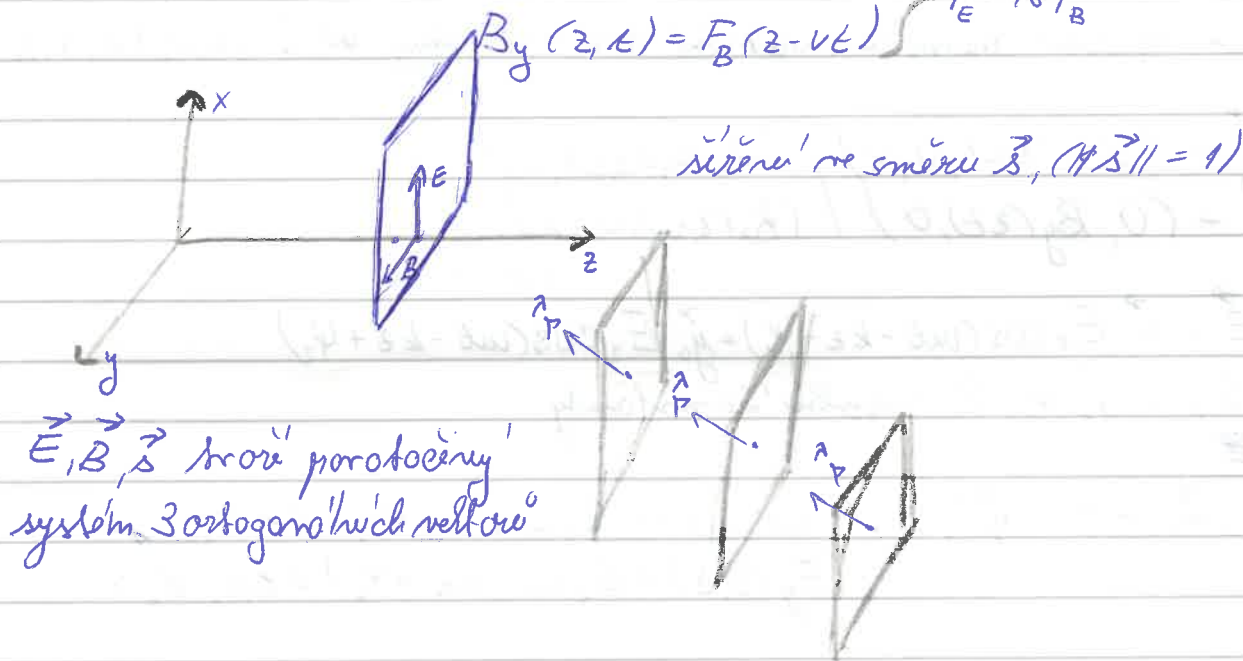
$$= \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} (A_1 e^{\beta z} e^{j(\omega t + kz)} + A_2 e^{-\beta z} e^{j(\omega t - kz)})$$

13. hodina

Monochromatické EM vlny v prostředí ϵ, μ

• poznámka: Každá monochromatická rovinná EM vlna je polarizovaná

• rovinná EM vlna:
$$\left. \begin{aligned} E_x(z,t) &= E_E(z-vt) \\ B_y(z,t) &= B_B(z-vt) \end{aligned} \right\} E_E = \nu B_B$$



$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \leftarrow t' = t - \frac{z}{v} & k &= \frac{\omega}{v} \\ B_y(z,t) &= B_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) & t' &= t - \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{v} & \vec{k} &= k\vec{s} \\ E_0 &= \nu B_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \\ E_0 &= \nu B_0 \end{aligned}$$

Energetické veličiny: $w = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2) = \epsilon E^2 = \epsilon E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(\vec{s} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \vec{s} - 0 =$$

$$= w \nu \vec{s} = \epsilon_0 E_0 \nu \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \vec{s}$$

neboli

$$\vec{q} = \vec{S} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{S} = \frac{w}{c} \vec{s} = \frac{1}{c} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \vec{s}$$

střední hodnoty: $\langle w \rangle_T = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2$
 $\langle \vec{S} \rangle_T = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \vec{n} \Delta$
 $\langle \vec{g} \rangle_T = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} \vec{\Delta}$

intenzita záření: $I = \langle |\vec{S}| \rangle_T = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c$

Obecný tvar monochromatické rovinné vlny $\omega, \vec{S} = (0, 0, 1), \epsilon, \mu$

$$\vec{E} = (E_x(z, t), 0, 0) \quad | \quad (0, E_y(z, t), 0)$$

$$\vec{B} = (0, B_y(z, t), 0) \quad | \quad (B_x(z, t), 0, 0)$$

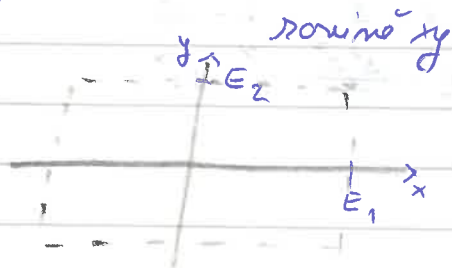
$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{y}_0 E_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$$

$E_1, E_2, \varphi_1, \varphi_2$ - valno' konstanty

$$\|\vec{x}_0\| = 1 = \|\vec{y}_0\|, z=0: E_x(0, t) = E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \in \langle -E_1, E_1 \rangle$$

$$E_y(0, t) = E_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \in \langle -E_2, E_2 \rangle$$

polarizace $\leftrightarrow$ kvinta, kterou opisuje vektor $(E_x(0, t), E_y(0, t))$ v



• lineární polarizace: $\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \pi$
 kruhová: $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$

Množina polarizačních stavů: komplexní vyjádření:

$$\vec{E}(0, t) = \text{Re} (E_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} E_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} \vec{0}) =$$

$$= \text{Re} (\underbrace{E_1 e^{i\varphi_1}}_{\vec{E}_0 e^{i\varphi_1}} \underbrace{E_2 e^{i\varphi_2}}_{\vec{E}_0 e^{i\varphi_2}} \vec{0}) e^{i\omega t}$$

Poincarého sféra
 $CP^1 = \mathbb{C}^2 / \sim$

$$E_1 \rightarrow \eta E_1, \eta > 0, \varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + \alpha$$

$$E_2 \rightarrow \eta E_2, \varphi_2 \rightarrow \varphi_2 + \alpha \quad (\eta E_1 e^{i(\varphi_1 + \alpha)}, \eta E_2 e^{i(\varphi_2 + \alpha)}) = \eta e^{i\alpha} (E_1, E_2)$$

Určeni os x', y' : $\hat{E}_0 \cdot \hat{E}_0 = D e^{2i\sigma}, D > 0$
 $\vec{E}_0 e^{i\sigma} \cdot \vec{E}_0 e^{i\sigma} = D > 0$

$$(\vec{d}_1 + i\vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 + i\vec{d}_2) = \vec{d}_1^2 - \vec{d}_2^2 + 2i\vec{d}_1\vec{d}_2 = D > 0$$

$0: \vec{d}_1 \perp \vec{d}_2$

$$\hat{E}_0 e^{i\sigma} = \vec{d}_1 + i\vec{d}_2 \Leftrightarrow \hat{E}_0 = (\vec{d}_1 + i\vec{d}_2) e^{-i\sigma}$$

$$\vec{E}(0, t) = \text{Re}(\hat{E}_0 e^{i\omega t}) = \text{Re}((\vec{d}_1 + i\vec{d}_2) e^{i(\omega t - \sigma)})$$

$$E_{x'}(0, t) = d_1 \cos(\omega t - \sigma)$$

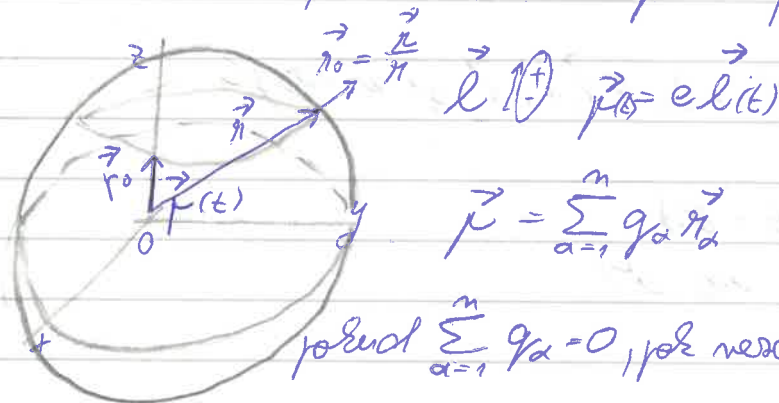
$$E_{y'}(0, t) = \mp d_2 \sin(\omega t - \sigma)$$

14. hodina

Polarizovaná EM vlna:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{x}_0 E_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{y}_0 E_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$$

- Elektrické dipólové záření $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$



$$\vec{p} = \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

protože $\sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha} = 0$, lze přeskočit na volné počátku:

$$\vec{p} = \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} - 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\vec{p}_0 \left(t - \frac{r}{c} \right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ retardovaný čas, sferické vlny, platí pro } r \gg \lambda$$

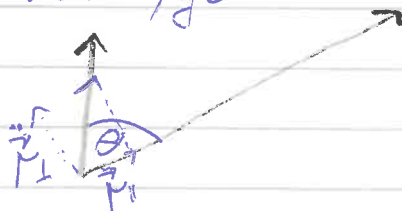
$$\vec{S} \sim \frac{1}{r^2}, \text{ takže energie: } \int_{S_r} \vec{S} \cdot d\vec{f}$$

$$d\vec{f} = \vec{r}_0 \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

záření emise energie nenulové rych

$$\ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{p}_0 \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\vec{p}} = \ddot{\vec{p}}_{\parallel} (\vec{p}_0 \cdot \vec{r}_0) + \ddot{\vec{p}}_{\perp}$$

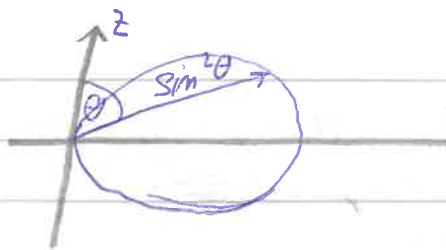


$$\|\ddot{\vec{p}}_{\perp}\| = \|\ddot{\vec{p}}\| \sin\theta$$

$$\vec{S} = \omega r \vec{p}_0 = \epsilon E^2 r \vec{p}_0 = \epsilon_0 \left(\frac{\omega^2 \vec{p}_0 \sin\theta \cos(\omega(t - \frac{r}{c}))}{4\pi r^2 \epsilon r} \right)^2 \vec{r}_0 =$$

$$= C \frac{\sin^2\theta}{r^2} \cos^2(\omega t - kr) \vec{r}_0$$

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle_T = C \frac{\sin^2 \theta}{n^2} \cdot \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned} \text{Taž energie} &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{2\pi} C \frac{\sin^2 \theta}{n^2} \cos^2(\omega t - kz) \underbrace{\vec{\pi}_0 \cdot \vec{\pi}_0}_{=1} n^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{2\pi} C \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kz) \sin \theta d\theta d\varphi = \end{aligned}$$

TV signál ČT1: kanál 53, $\nu = 730 \text{ MHz}$ (šířka PMHz) žížkov
Cubok

$$\vec{E}_z + \vec{E}_c : I = \langle (\vec{E}_z + \vec{E}_c)^2 \rangle_T = \langle \underbrace{\vec{E}_z^2}_{\text{nenulová}} + \underbrace{2\vec{E}_z \cdot \vec{E}_c}_{\text{nenulová}} + \vec{E}_c^2 \rangle_T$$

vertikální polarizace
horizontální polarizace

Polarizace světla: 1808 Etienne-Louis Malus

CaCO_3 - kalcit: opticky anizotropní

- izotropie: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (normální vlna je lineárně elipticky polarizovaná)
- anizotropie: $D_i = \sum \epsilon_{ij} E_j$ (pouze lineární polarizace)
tenzor permitivity: $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$

$$\text{Fresnelův elipsoid: } \sum_{ij} \epsilon_{ij} x_i x_j = 1$$

- 3 typy symetrických tenzorů: ① sférický } izotropní
② jednový elipsoid } anizotropní
③ dvouvý elipsoid }

polarizační vektor
osa paprsku

$$E_{vst} = \vec{e} (\vec{E}_{vst} \cdot \vec{e}) / 2$$

Edwin H. Land
(1909-1991)

POLAROID

$$I_{vst} = I_{ist} \cos^2 \theta \text{ Malusův zákon}$$

Určít' polarizačního stavu pomocí časových středních hodnot
 $\langle \cdot \rangle_T$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\textcircled{1} \langle E_x^2 \rangle_T = E_1^2 \langle \cos^2(\omega t - kz + \varphi_1) \rangle_T = \frac{1}{2} E_1^2$$

$$\textcircled{2} \langle E_y^2 \rangle_T = E_2^2 \langle \cos^2(\omega t - kz + \varphi_2) \rangle_T = \frac{1}{2} E_2^2$$

$$\textcircled{3} \langle 2E_x E_y \rangle_T = E_1 E_2 \langle 2\cos(\omega t - kz + \varphi_1) \cos(\omega t - kz + \varphi_2) \rangle_T =$$

$$\textcircled{3} = E_1 E_2 \langle \cos(2\omega t - 2kz + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \rangle_T =$$

$$= E_1 E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\textcircled{4} \langle 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2}) E_y(\omega t) \rangle_T = E_1 E_2 \langle 2\cos(\omega t - kz + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}) \cos(\omega t - kz + \varphi_2) \rangle_T =$$

$$= E_1 E_2 \langle \sin(2\omega t - 2kz + \varphi_1 + \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle_T =$$

$$= E_1 E_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

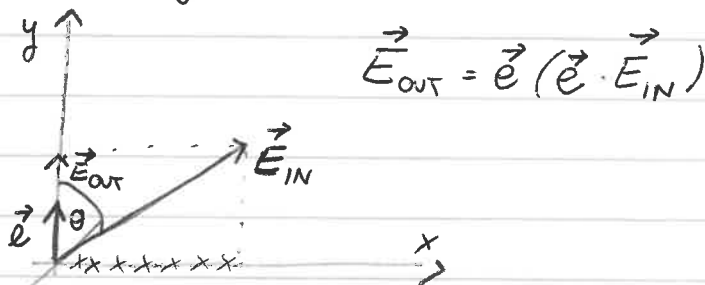
~~16. listopadu~~

16. hodina (Novotný)

Polarizované EM vlny v látkách

Polarizační filtry

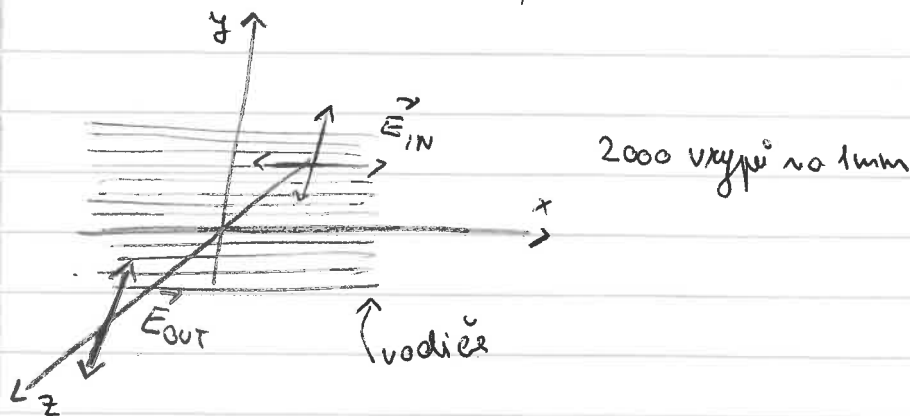
- propouští jen část světla polarizovaného lineárně ve směru osy propustnosti filtru (směr $\vec{e}$, $\|\vec{e}\|=1$)



$$\vec{E}_{out} = \vec{e} (\vec{e} \cdot \vec{E}_{in})$$

Pro intenzity platí Malusův zákon:

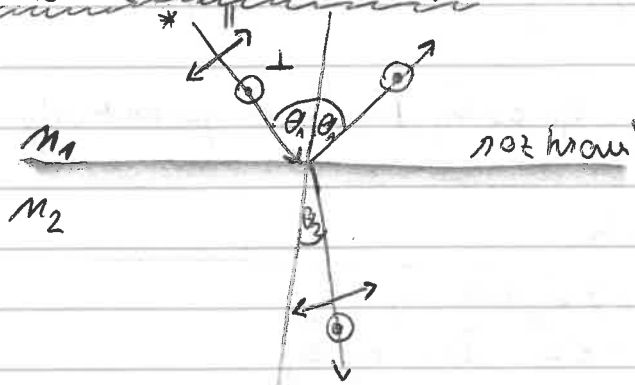
$$I_{out} = I_{in} \cos^2 \theta, \quad \theta = \angle \vec{e} \text{ a } \vec{E}_{in}$$



Polaroid (Edwin H. Land)
(30. léta 20. století)

- uhlíkové makromolekuly

Polarizace světla odrazem



Fresnelovy vzorce: $R_E^+ = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$

$$R_E'' = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

Snellův zákon: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

Kdy bude $R_E'' = 0$? když $\tan(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow +\infty$
 $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) = n_2 \cos(\theta_1)$$

$\tan \theta_{1B} = \frac{n_2}{n_1}$ | Brewsterův úhel θ_{1B}

$\Rightarrow$ odražená světla je polarizované (lineární)
 ve směru kolmém na rovinu dopadu
 učenou dříve dřívejším paprskem

Dráglom (transparentu opticky anizotropu) ^{prostrědu} ~~lathy~~

elektrická anizotropie: $\epsilon_{ij} = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_{ij}$, Tenzor el. permittivity

- homogenní: ϵ_{ij} konstanty
- pokud nedochází k absorpci, tak $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$
- lineární prostředí: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $D_i = \epsilon_{ij} E_j$

Maxwell: $\text{div } \vec{D} = \rho$ $\rightarrow \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$
 $\text{div } \vec{B} = 0$ $\rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

pro nás: $\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0}$

• lineární prostředí (homogenní): $\vec{B} = \underbrace{\mu}_{\text{konst. čísla}} \vec{H}$, $\vec{D} = \underbrace{\epsilon}_{\text{konst. tenzor}} \vec{E}$

$\text{div } \vec{D} = 0 \Leftrightarrow \text{div}(\epsilon \vec{E}) = 0$

$\rightarrow \text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ rot } \vec{B} =$
 $= -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\mu \vec{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \vec{E})$

$\rightarrow \text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \vec{E})$

$\boxed{\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \vec{E})}$

• Rovinná vlna: $\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{\lambda} \cdot \vec{r} - \vec{r} t)$

Když: $\vec{E}_0$ vlastní vektor (ϵ_{ij}) k vlastním číslům ϵ_λ

$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu \epsilon_\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E})$, $v_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_\lambda}}$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \Rightarrow \text{diagonalizovatelný} \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}$$

$\tilde{\epsilon}$ - diag $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$, vlastní čísla $\tilde{\epsilon}$

① $\tilde{\epsilon}_x = \tilde{\epsilon}_y = \tilde{\epsilon}_z = n^2$... izotropní médium

② $\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_x & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\epsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$, jednovosé anizotropní médium s optickou osou z

③ $\tilde{\epsilon}_x \neq \tilde{\epsilon}_y, \tilde{\epsilon}_y \neq \tilde{\epsilon}_z, \tilde{\epsilon}_x \neq \tilde{\epsilon}_z$, dvouvosé anizotropní médium

Fresnelův elipsoid: $\sum_{i,j} \epsilon_{ij} x_i x_j = 1$

V jednovosých a dvouvosých krystalech jsou všechny monochromatické vlny lineárně polarizované ve směrech svých optických osami.

Jednovosé krystaly

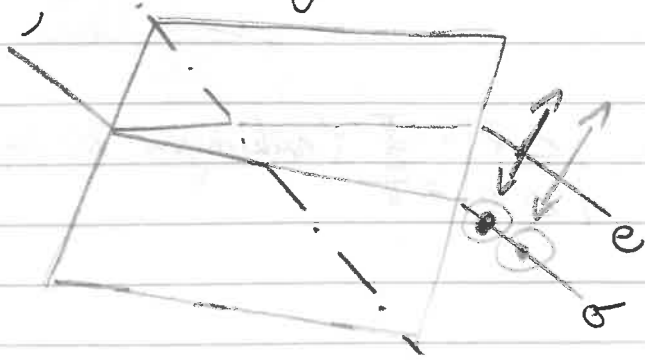
$\epsilon_r = \tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$, optická osa je z, např.: CaCO_3 / islandský vápánek

Dvojlom

- dopadající paprsek se rozdělí na dva svazky lineárně polarizované ležící v rovinném řezu (tj. v rovině určené dopadajícím paprskem a optickou osou)

① Paprsek mimo rovinu $\vec{E}_e$ v rovinném řezu

② Paprsek rovinu $\vec{E}_o$ kolmo k rovinnému řezu



Drájom (transparentu opticky anizotropu) ^{prostředí} ~~tedy~~

elektrická anizotropie: $\epsilon_{ij} = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_{ij}$, Tenzor el. permittivity

- homogenní: ϵ_{ij} konstanty
- pokud nedochází k absorpci, tak $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$
- lineární prostředí: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $D_i = \epsilon_{ij} E_j$

Maxwell: $\text{div } \vec{D} = \rho$ $\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$
 $\text{div } \vec{B} = 0$ $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

pro nás: $\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0}$

• lineární, homogenní prostředí: $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
 (homogenní) konst. číslo konst. tenzor

$\text{div } \vec{D} = 0 \Leftrightarrow \text{div}(\epsilon \vec{E}) = 0$

$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} =$

$= -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\mu \vec{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \vec{E})$

$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \vec{E})$

$\boxed{\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \vec{E})}$

• Rovinná vlna: $\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

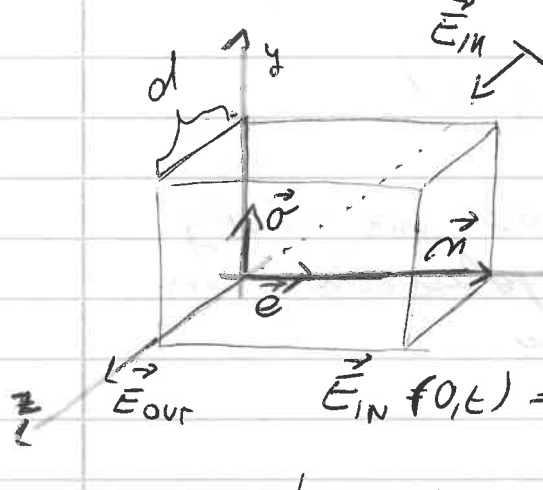
Když: $\vec{E}_0$ vlastní vektor (ϵ_{ij}) k vlastnímu číslu ϵ_λ

$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu \epsilon_\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E}), \quad v_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_\lambda}}$

Vlnová deska (zpožďovací)

- optická osa $\vec{n}$ v rovině desky
- při kolmém dopadu se paprsek rozdělí na
přímý (o) a mimosřadý (e),
postupují stejným směrem, ale různými rychlostmi
 $v_o = \frac{c}{n_o}, v_e = \frac{c}{n_e}$

$\Rightarrow$ dochozí vlny se rozdělí na dva paprsky



$\vec{E}_{in} \leftarrow$ světlo (monochromatická rovinná vlna)

$$\vec{E}_{in}(0,t) = \underbrace{\vec{x}_0 E_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\substack{\parallel \vec{x} \\ E_x(t)}} + \underbrace{\vec{y}_0 E_2 \cos(\omega t + \varphi_2)}_{\substack{\parallel \vec{y} \\ E_y(t)}}$$

Rozdíl fází: $\Delta f = f_2 - f_1 = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\vec{E}_{out}(d,t) = \underbrace{\vec{x}_0 E_1 \cos(\omega t - k_e d + \varphi_1)}_{\substack{\parallel \vec{x} \\ f_1'}} + \underbrace{\vec{y}_0 E_2 \cos(\omega t - k_o d + \varphi_2)}_{\substack{\parallel \vec{y} \\ f_2'}}$$

$$\Delta f' = f_2' - f_1' = -k_o d + \varphi_2 + k_e d - \varphi_1 = \underbrace{\varphi_2 - \varphi_1}_{\Delta f} + (k_e - k_o)d = \textcircled{*}$$

$$k_o = \frac{\omega}{v_o} = \frac{\omega \cdot n_o}{c} = n_o \frac{2\pi}{\lambda_c} = n_o \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\textcircled{*} = \underbrace{\Delta f + \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d}_{\Delta \varphi} = \Delta f'$$

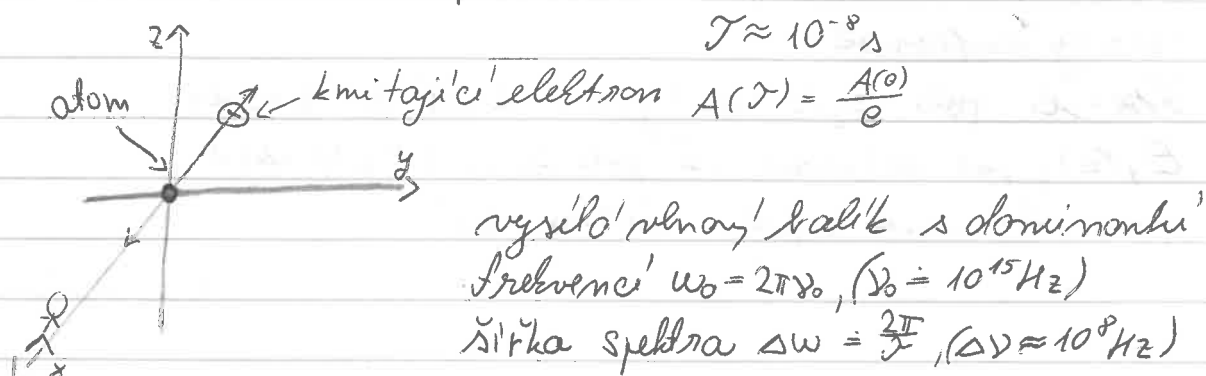
$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d$$

čtvrtvlnová deska $|\Delta \varphi| = \frac{\pi}{2}$ (mikingová, 3D kyle)

půlvlnová deska $|\Delta \varphi| = \pi$

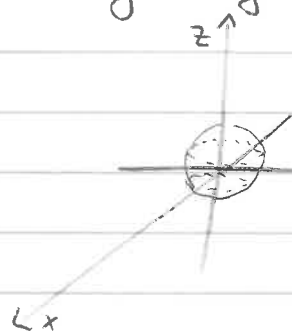
17. hadina (Novotný)

Časová koherence a polarizace



polarizovaná kvazimonochromatická vlna jejíž polarizace se mění s časovou délkou T

"Reálný zdroj světla"



$$T_0 \ll \text{okamžik} \ll T$$

→ Rozšíření spektrální šířky:

- ① Dopplerův jev
- ② vzájemné vzdálenosti atomů a časových úsecích trvání, než T

$$\Delta\omega > \Delta\tilde{\omega}$$

$$\Delta\omega < \tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \text{ koherenční čas}$$

Kvazimonochromatické rozšíření

je rozšíření, jehož šířka spektra $\Delta\omega \ll \omega_0$, kde ω_0 je jeho střední (dominantní) vlnová frekvence

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

kde $\vec{E}_0(t)$, $\varphi(t)$ je se náhodně měnící časovými konstantami
 $T \gg T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, tj. během jeho periody T_0 nebo malého počtu period lze $\vec{E}_0(t)$ a $\varphi(t)$ považovat za konstantu

Časová koherence

Necht $\vec{E}_1(t)$ a $\vec{E}_2(t)$ jsou náhodná pole a Δt časový interval.

Ukážeme-li pole $\vec{E}_2(t + \Delta t)$ přesně určit za znalosti $\vec{E}_1(t)$, pak řekneme, že pole $\vec{E}_1(t)$ a $\vec{E}_2(t + \Delta t)$ jsou dočasně (úplně) koherentní.