Cvičení z VOAFu

První cvičení

1 Komplexní čísla

Komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ je číslo tvaru $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je komplexní jednotka s vlastností $i^2 = -1$. Sčítání a násobení těchto čísel je definováno „přirozeným způsobem“.

Komplexně sdružené číslo $\bar{z}$ je číslo $\bar{z} = a - ib$. Platí vzorec $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. Velikost komplexního čísla je definována jako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, tento výraz je možno zapsat jako $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Reálná a imaginární část. Definujeme funkce $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ a $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ zvané reálná a imaginární část pomocí předpisů

$$\mathrm{Re}\, z = a, \qquad \mathrm{Im}\, z = b$$

(pozor, imaginární část neobsahuje komplexní jednotku!). Pokud je reálná část nulová, nazveme číslo *ryze komplexním*. Funkce Re a Im jsou *reálně* lineární, tzn. platí

$$\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2, \qquad \mathrm{Re}\,(\alpha z) = \alpha\, \mathrm{Re}\, z, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

stejně pro Im. Pozor, $\mathrm{Re}\,(z_1 z_2) \neq (\mathrm{Re}\, z_1)(\mathrm{Re}\, z_2)$ (stejně pro Im). Tyto funkce lze jednoduše vyjádřit pomocí komplexního sdružení:

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Komplexní exponenciála. Uvažujme $z \in \mathbb{C}$. Uvažujme nyní číslo e^z a upravme ho:

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}.$$

První člen je obyčejná reálná exponenciální funkce. Otázkou je, co je exponenciála z ryze komplexního čísla. Odpověď dává Eulerův vzorec[1]:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$

navíc platí $|e^{i\varphi}| = 1$. Můžeme tedy psát $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$. Pro velikost tohoto čísla platí $|e^z| = e^a$.

Goniometrický tvar komplexního čísla. Každé komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ můžeme zapsat ve tvaru $z = |z| e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Číslu φ říkáme *argument* komplexního čísla (toto číslo není dané jednoznačně, lze přičíst libovolný celočíselný násobek 2π). Argument φ je řešením rovnic

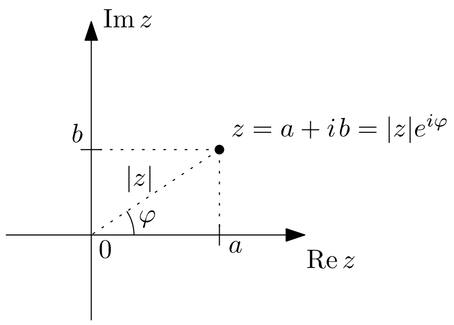
$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}.$$

[1]Jehož speciálním případem je „nejkrásnější matematická identita“ $e^{i\pi} = -1$.

Tyto rovnice se často formálně[2] sdružují do rovnice

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}.$$

Gaussova (komplexní) rovina. Komplexní čísla můžeme reprezentovat jako body (dvourozměrné) roviny, kde kartézské osy tvoří reálná a imaginární část komplexních čísel.



Obrázek 1.1: Gaussova rovina.

Sčítání komplexních čísel má pak geometrický význam sčítání dvourozměrných vektorů v Gaussově rovině. Číslo $e^{i\varphi}$ představuje číslo na jednotkové kružnici. Intuitivní představa o násobení komplexních čísel se získá z goniometrického zápisu:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Násobení číslem $e^{i\varphi}$ tedy představuje rotaci o úhel φ v komplexní rovině. Násobení číslem $|z|$ představuje škálování v této rovině.

Komplexní zápis goniometrických funkcí. Z Eulerova vzorce přímo plynou následující vztahy:

$$\cos \varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin \varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Nahradíme-li $\varphi \in \mathbb{R}$ za obecné $z \in \mathbb{C}$, můžeme předchozími vzorci definovat funkce sinus a kosinus na celé komplexní rovině.

Cvičení 1.1 Nalezněte reálnou a imaginární část čísla

$$w = \frac{a + ib}{c + id}.$$

Cvičení 1.2 Vypočítejte $\operatorname{Re}\left[(C - iD)e^{i\Omega t}\right]$, kde $C, D, \Omega t \in \mathbb{R}$.

Cvičení 1.3* Dokažte platnost vztahů

$$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z, \qquad \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z.$$

Pomocí těchto vztahů ukažte platnost identity

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

[2] V tomto zápisu ztrácíme informaci o tom, zda $\varphi \in \langle 0, \pi)$ anebo $\varphi \in \langle \pi, 2\pi)$.

Cvičení 1.4* Dokažte platnost vztahů

$$\sin ix = i \sinh x, \qquad \cos ix = \cosh x, \qquad \sinh ix = i \sin x, \qquad \cosh ix = \cos x.$$

Cvičení 1.5 Uvažujte výraz $c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ a $\omega t \in \mathbb{R}$. Jaké podmínky musí konstanty c_1 a c_2 splňovat, aby byl uvedený výraz reálný pro všechna $t \in \mathbb{R}$?

Cvičení 1.6 Řešení rovnice harmonického oscilátoru lze psát v několika ekvivalentních tvarech:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \phi) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = ce^{i\omega t} + \bar{c}e^{-i\omega t},$$

$A, a, b, \varphi, \phi, \omega t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$. Nalezněte vztahy mezi konstantami A, φ, ϕ, a, b a c.

Cvičení 1.7* „Dokažte“ Eulerův vzorec pomocí diferenciální identity

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Cvičení 1.8 Odvoďte součtové vzorce pro siny a cosiny součtu (a rozdílu) úhlů pomocí triviální identity

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Cvičení 1.9* Odvoďte součtové vzorce pro součty sinů a cosinů pomocí následující úpravy výrazu

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} \right).$$

Cvičení 1.10 *Superpozice postupných vln stejným směrem je postupná vlna.* Ukažte, že součet

$$A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$$

se dá napsat jako $A\cos(\omega t - kz + \varphi)$. Určete hodnoty konstant A a φ.

Cvičení 1.11 *Superpozice proti sobě postupných vln je stojatá vlna.* Ukažte, že součet

$$A\cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A\cos(\omega t + kz + \varphi_2)$$

je tvaru $X(z)\cos(\omega t + \varphi)$. Určete tvar funkce $X(z)$ a hodnotu konstanty φ.

Cvičení 1.12* Zapište výrazy $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, obecně** $\cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$, pouze pomocí funkcí $\cos kx$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Cvičení 1.13 Sečtěte řadu

$$\sum_{m=0}^{N} \cos(\omega t - m\delta).$$

Cvičení 1.14 Vypočítejte následující integrály:

$$\int e^{-ax} \cos bx \, dx, \qquad \int e^{-ax} \sin bx \, dx, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

2 Střední hodnoty

Mějme funkci $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Její střední hodnota v intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ je definována jako

$$\langle f\rangle_{\langle x_1,x_2\rangle} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Lze definovat střední hodnotu přes celé $\mathbb{R}$ limitním přechodem

$$\langle f\rangle \equiv \langle f\rangle_{\langle -\infty,\infty\rangle} = \lim_{x'\to\infty}\frac{1}{2x'}\int_{-x'}^{x'} f(x)\,dx.$$

Pokud je funkce f periodická s periodou L, je její střední hodnota dána jako střední hodnota přes libovolný interval délky L:

$$\langle f\rangle = \langle f\rangle_{\langle x',x'+L\rangle} = \frac{1}{L}\int_{x'}^{x'+L} f(x)\,dx, \qquad x'\in\mathbb{R}.$$

Cvičení 2.1 Vypočítejte $\langle\cos\omega t\rangle$, $\langle\sin\omega t\rangle$, $\langle\cos^2\omega t\rangle$, $\langle\sin^2\omega t\rangle$.

3 Malé kmity a metoda módů

Kuchařka metody módů

1. Zavedu souřadnice $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, které odměřují výchylku z rovnovážné polohy.
2. Napíši pohybové rovnice ve tvaru $\mathbb{T}\ddot{\vec{x}} + \mathbb{U}\vec{x} = 0$, kde $\mathbb{T}, \mathbb{U} \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou konstantní matice.
3. Předpokládám řešení ve tvaru $\vec{x}(t) = A\,\vec{a}\cos(\omega t + \varphi)$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ je konstantní vektor poměrů amplitud.
4. Dosadím do pohybových rovnic a požaduji netrivialitu řešení, tzn. $A \neq 0$ a $\vec{a} \neq 0$. Dostanu $\left(\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}\right)\vec{a} = 0$. Tyto podmínky vedou na tzv. sekulární rovnici $\left|\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}\right| = 0$.
5. Sekulární rovnice je polynom n-tého stupně v ω^2. Najdu příslušné kořeny ω_k^2. K nim najdu příslušné vlastní vektory $\vec{a}_k$ jako řešení rce $\left(\mathbb{U} - \omega_k^2\mathbb{T}\right)\vec{a}_k = 0$.
6. Obecné řešení pohybu je pak tvaru

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)\,.$$

Malé kmity

V Taylorově rozvoji je tak první nenulový člen právě druhý řád rozvoje. Označíme-li si $\mathbb{U}_{ij}$ jako

$$\mathbb{U}_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\vec{x}=0} \tag{1}$$

máme rozvoj funkce $U(\vec{x})$ ve tvaru

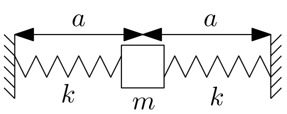
$$U(\vec{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{U}_{ij} x_i x_j + \ldots \tag{2}$$

Zanedbáním všech vyšších řádů dostaneme přibližné vyjádření

$$U_{\text{malé}}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{U}_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2}\vec{x}^T\,\mathbb{U}\,\vec{x}, \tag{3}$$

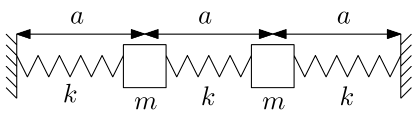
které je přesně tvaru, který potřebujeme do metody módů.

Cvičení 3.1 Sestavte potenciál pro podélné a příčné kmity závaží na pružinách jako na obrázku. Délka nenatažených pružin je a_0.



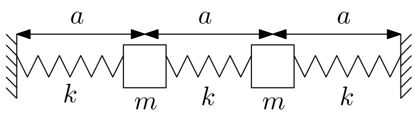
Nalezněte tvary těchto potenciálů v aproximaci malých kmitů.

Cvičení 3.2 Sestavte pohybové rovnice pro podélné kmity soustavy na obrázku. Délka nenatažených pružin je a_0.



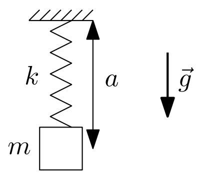
Nalezněte jejich řešení metodou módů.

Cvičení 3.3 Napište potenciál pro příčné kmity soustavy na obrázku. Délka nenatažených pružin je a_0.

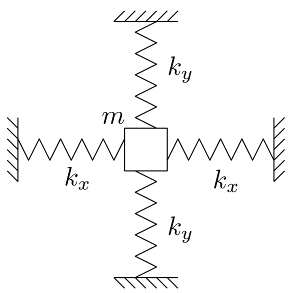


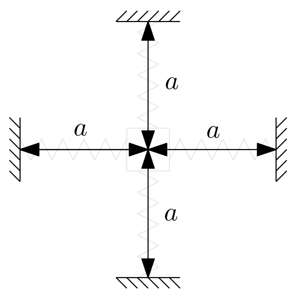
Nalezněte jeho tvar v aproximaci malých kmitů. Jak se liší od potenciálu pro podélné kmity?

Cvičení 3.4 Nalezněte potenciál pružinového kyvadla (viz obrázek) v aproximaci malých kmitů. Kyvadlo může vykonávat 2D pohyb ve svislé rovině.

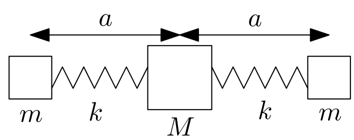


Cvičení 3.5* Nalezněte potenciál pružinového kyvadla (viz obrázek) v aproximaci malých kmitů. Kyvadlo může vykonávat 2D pohyb ve svislé rovině.





Cvičení 3.6 Nalezněte řešení pohybových rovnic následující mechanické soustavy pomocí metody módů. Povolený je pouze podélný pohyb.



Je nalezené řešení úplné? „Kde se stala chyba?“

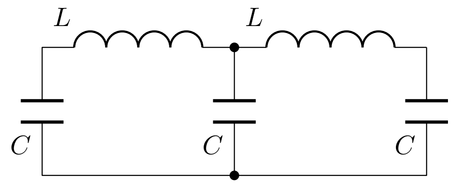
Cvičení 3.7 Uvažujte obecné řešení pohybu systému ve tvaru

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Nalezněte konkrétní řešení pro počáteční podmínky

$$x_1(0) = A \neq 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0.$$

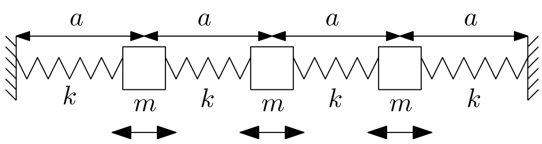
Cvičení 3.8* Nalezněte obecné řešení pro proudy v jednotlivých větvích v následujícím LC obvodu.



Další příklady na domácí procvičování:

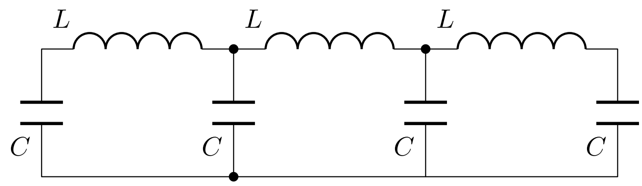
Cvičení 3.9 Pohybové rovnice. Nalezněte pohybové rovnice a k nim příslušné matice $\mathbb{T}$ a $\mathbb{U}$, definované pomocí $\mathbb{T}\ddot{\vec{x}} + \mathbb{U}\vec{x} = 0$.

a) Sestavte pohybové rovnice pro tři podélně kmitající závaží na čtyřech pružinkách.



Obrázek 3.2: Podélné kmity třech závaží na čtyřech pružinkách.

b) Sestavte rovnice pro proudy v následujícím trojitém LC obvodu.



Obrázek 3.3: Trojitý LC obvod.

Cvičení 3.10 Módy systému. Nalezněte módy a obecné řešení tvaru

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

pro systémy popsané následujícími maticemi $\mathbb{T}$ a $\mathbb{U}$:

a)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 6k \end{pmatrix};$$

b)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 3m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 5k \end{pmatrix};$$

c)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 4k \end{pmatrix};$$

d)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 6k \end{pmatrix};$$

e)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 4k & -2k \\ 0 & -2k & 5k \end{pmatrix};$$

Nápověda: Jedna z vlastních frekvencí je $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

f)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Jedna z vlastních frekvencí je $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

g)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 4k \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Jedna z vlastních frekvencí je $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

h)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 3m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 4k & -3k \\ 0 & -3k & 6k \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Jedna z vlastních frekvencí je $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

Cvičení 3.11 Malé kmity. Nalezněte matice $\mathbb{U}$ pro následující funkce potenciální energie U:

a)

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k\left[x_1^2 + 2\left(x_2 - x_1\right)^2 + 4x_2^2\right],$$

b)

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}k\left[x_1^2 + \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(x_3 - x_2\right)^2 + x_3^2\right],$$

c)

$$U(y) = k\left[\sqrt{a^2 + y^2} - a_0\right]^2$$

d)

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{\left(a + l\sin\frac{x_2}{l} - l\sin\frac{x_1}{l}\right)^2 + l^2\left(\cos\frac{x_2}{l} - \cos\frac{x_1}{l}\right)^2} - a\right]^2 - mgl\left(\cos\frac{x_1}{l} + \cos\frac{x_2}{l}\right).$$

4 Výsledky příkladů

4.3 Malé kmity

Cvičení 3.9 **Pohybové rovnice**

a)

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}$$

b)

Cvičení 3.10 **Módy systému**

a) $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (2,1)$, $\vec{a}_2 = (-1,2)$

b) $\omega_1 = \sqrt{\frac{7k}{6m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (3,4)$, $\vec{a}_2 = (-2,1)$

c) $\omega_1 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{2})k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{2})k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (1+\sqrt{2},1)$, $\vec{a}_2 = (1-\sqrt{2},1)$

d) $\omega_1 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{2})k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{2})k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (\sqrt{2},1)$, $\vec{a}_2 = (-\sqrt{2},1)$

e) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (2,2,1)$, $\vec{a}_2 = (-2,1,2)$, $\vec{a}_3 = (1,-2,2)$

f) $\omega_1 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (1,\sqrt{2},1)$, $\vec{a}_2 = (-1,0,1)$, $\vec{a}_3 = (1,-\sqrt{2},1)$

g) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{5k}{2m}}$, $\vec{a}_1 = (2,3,1)$, $\vec{a}_2 = (-1,0,1)$, $\vec{a}_3 = (2,-1,1)$

h) $\omega_1 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})k}{m}}$, $\vec{a}_1 = (1,\sqrt{5}-1,1)$, $\vec{a}_2 = (-3,0,1)$, $\vec{a}_3 = (1,-\sqrt{5}-1,1)$

Cvičení 3.11 **Malé kmity**

a)

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 6k \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}$$

c)

$$\mathbb{U} = \left(k\left(1-\frac{a_0}{a}\right)\right)$$

d)

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} k+\frac{mg}{l} & -k \\ -k & k+\frac{mg}{l} \end{pmatrix}$$