

Vlnění, optika a atomová fyzika

Rychlokurz

Niels

24. září 2019

Obsah

1	Malé kmity	1
1.1	Linearizace pohybových rovnic	1
1.2	Kmity struny	2
1.3	Řetízek jakožto aproximace struny	4
2	Postupné vlny	5
3	Vlny v disperzním prostředí	7
3.1	Elektronová teorie Thomsonova	8
3.2	EM vlny v plazmatu	9
3.3	Řetízek atomů jakožto reaktivní prostředí	10
3.4	Fourierova transformace	10
3.5	Vlnový balík	11
3.6	Vlnový balík v disperzním prostředí	12
4	Energie vlnění	13
4.1	Energie vlnění na struně	13
4.2	Energetické veličiny na postupné vlně	14
5	Odrazy vln	15
5.1	Korektní zakončení	15
5.2	Odraz na nekorektním zakončení	16
5.3	Vlna na rozhraní dvou transparentních prostředí	16
5.4	Telegrafní vedení	17

6	Elektromagnetické vlny	19
6.1	Rovinné EM vlny	19
6.2	Energetické veličiny v rovinné EM vlně	20
6.3	EM vlny na rozhraní	21
7	Polarizace	21
7.1	Polarizační stavy EM vlny	21
7.2	Polarizované EM vlny v látkách	22
7.3	Polarizace světla odrazem	22
7.4	Dvojlom	22
7.5	Časová koherence	24
8	Interference, difrakce	25
8.1	Difrakční mřížka	26
8.2	Difrakce na šterbině šířky D	26
9	Geometrická optika	27
9.1	Rovnice eikonálu	27
9.2	Fermatův princip	28
10	Atomová fyzika	30
10.1	Záření černých těles	30
10.2	Fotoefekt	34
10.3	Fotony jako částice	35
10.4	Comptonův rozptyl	35
10.5	Vzorce a konstanty atomové fyziky	36

Úvod

Tento text je, jak název napovídá, pouhý rychlokurz. Je tedy určen ke zběžnému pročtení nad ranní kávou, před spaním či v metru těsně před zkouškou. Bohužel v něm nenajdou vykoupení ti čtenáři, kteří se shánějí po odvození všech vzorců a identit. Kdybych je sem měl zahrnout, mohl jsem rovnou opsat celá skripta prof. Tolara. Snad tedy bude tato mikrosbírka alespoň trochu nápomocna při učení na zkoušku.

1 Malé kmity

Definice 1.1 (Rovnovážná poloha). Umístíme-li hmotný bod do rovnovážné polohy a udělíme mu *nulovou* rychlost, jeho trajektorii je právě tento bod.

Definice 1.2 (Stabilní rovnovážná poloha). *Stabilní* rovnovážná poloha (dále jen SRP) je taková rovnovážná poloha, do níž se bod po vychýlení vrátí. Ve stabilní rovnovážné poloze nabývá potenciální energie ostrého lokálního minima.

Pro soustavu hmotných bodů budeme II. Newtonův zákon psát ve tvaru

$$m_i \ddot{x}_i = F_i,$$

$i \in \hat{n}$, kde n je počet stupňů volnosti. DŮLEŽITÝ PŘEDPOKLAD: Soustava je *konzervativní*, tj.

$$(\exists U(x_i)) \left(F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \right).$$

1.1 Linearizace pohybových rovnic

- Snažíme se linearizovat pohybové rovnice kmitání soustavy hmotných bodů kolem SRP $= (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \stackrel{\text{ozn.}}{=} \vec{x}_0$. Po rozvoji U do druhého řádu (první člen je konstantní, a můžeme ho položit roven nule, druhý je též nula z nutné podmínky existence extrému funkce U) a zavedení souřadnic $\xi_i := x_i - x_i^0$ řešíme soustavu

$$m_i \ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^n U_{ij} \xi_j = 0. \quad (1.1)$$

- Ansatz¹:

$$\xi_i(t) = X_i \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.2)$$

což je jeden *mód* – stav, v němž všechny části soustavy kmitají se stejnou úhlovou frekvencí a jsou ve fázi. X_i jsou složky konstantního „vektoru poměrů amplitud“ $\vec{X}$.

- Po zavedení matic

$$\mathbb{T} = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$$

¹Něm. *předpoklad*.

a

$$\mathbb{U} = (U_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 U(\vec{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

řešíme soustavu²

$$\mathbb{T}\ddot{\xi} + \mathbb{U}\xi = 0. \quad (1.3)$$

- Do (1.3) dosadíme (1.2) a jako u malých kmitů v TEF1 řešíme sekulární rovnici pro ω_i^2 , což je *kladné* vlastní číslo (plyne z pozitivní definitnosti matic $\mathbb{U}$ a $\mathbb{T}$):

$$\det(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}) \stackrel{!}{=} 0.$$

- Spočteme příslušné vlastní vektory $\vec{X}^{(i)} \in \ker(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T})$.
- Řešením je superpozice $\vec{\xi}(t) = \sum_{i=1}^n A_i \vec{X}^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$, kde A_i a φ_i najdeme z počátečních podmínek.

1.2 Kmity struny

- Mějme strunu o délce L a lineární hustotě ρ , která je napjata silou T .
- Chceme najít *lineární* pohybovou rovnici.
- Vlnovou rovnici dostaneme z rozepsání obou stran 1. věty impulsové³

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$$

a pomocí následujících aproximací:

- $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = T$
- Výchyly jsou malé: $\vartheta_1 \approx 0 \approx \vartheta_2 \Rightarrow \sin \vartheta \approx \text{tg } \vartheta$.
- Provedeme limitu $(z_2 \rightarrow z_1) \Rightarrow (z_{CM} \rightarrow z_1 \wedge z_0 \rightarrow z_1)$.
- Dostáváme vlnovou rovnici pro strunu, kde $z \in (0, L)$.

$$\rho \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}. \quad (1.4)$$

² ξ je vektor o n složkách.

³Levou stranu napíšeme jako $\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \rho \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(z_{CM}, t)$, kde $\vec{R}$ je polohový vektor hmotného středu soustavy, CM je z angl. *center of mass*. Co se týče pravé strany, uvažujeme pouze F_x , neboť výchylky jsou příčné. $F_x = F_{1x} + F_{2x}$ a dále už pomocí zmíněných aproximací a Lagrangeovy věty dojdeme k (1.4).

- Krajní body musíme ošetřit okrajovými podmínkami $\forall t$

- pro pevné konce (Dirichletova podmínka):

$$\psi(0, t) = 0 = \psi(L, t)$$

- pro volný konec v místě $z = L$ (Neumannova podmínka), která říká, že struna musí v místě volného konce být rovnoběžná s osou z :

$$T \frac{\partial \psi(L, t)}{\partial z} = 0.$$

- Řešení vlnové rovnice je u struny obecně tvaru *stojaté vlny*.

$$\psi(z, t) = X(z) \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.5)$$

jejíž fundamentální systém vyjde

$$\{\sin(k_m z) \cos(\omega_m t + \varphi_m)\}_{m=1}^{+\infty}.$$

- Víme, že i superpozice je řešením, a tedy

$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \sin(k_m z) \cos(\omega_m t + \varphi_m).$$

- Řešením této rovnice jsme dospěli k důležitým poznatkům:

- **Úhlové vlnové číslo**⁴ $[k] = \text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$

$$k_m = m k_1 = m \frac{\pi}{L} = \sqrt{\frac{\rho}{T}} \omega_m$$

- **Úhlová frekvence** $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\omega_m = m \omega_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k_m = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{m \pi}{L}$$

- **Vlnová délka** $[\lambda] = \text{m}$

$$\lambda_m = \frac{\lambda_1}{m} = \frac{2L}{m} = \frac{2\pi}{k_m}$$

⁴Neplést s vlnočetem σ !

- **Frekvence**⁵ $[\nu] = \text{Hz}$

$$\nu_m = m\nu_1$$

- **Fázová rychlost** $[v_\varphi] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\lambda_m \nu_m = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

- **Kmitočet** $[\nu] = \text{Hz}$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

- **Vlnočet** $[\sigma] = \text{m}^{-1}$

$$\sigma = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\lambda}$$

1.3 Řetízek jakožto aproximace struny

Mějme řetízek složený z N hmotných bodů o hmotnostech M , mezi nimiž je vzdálenost a . Tyto hmotné body jsou spojené pružinkami s tuhostí K . Polohu n -tého bodu již nebudeme zachycovat pomocí spojitě proměnné z , ale podle na . Pro sílu napětí tedy platí $T = Ka$, pro lineární hustotu $\rho = \frac{M}{a}$ a pro celkovou délku řetízku $L = (N + 1)a$.

- Opět zlinealizujeme pohybovou rovnici pomocí podobné aproximace jako u struny.

$$M\ddot{\psi}_n(t) = F_x = F_{1x} + F_{2x} = \dots = K(\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1}) \quad (1.6)$$

Dodejme okrajové podmínky pro první a poslední atom:

$$(\forall t)(\psi_0(t) = 0 \wedge \psi_{N+1}(t) = 0).$$

- Ansatz:

$$\psi_n(t) = X_n(t) \cos(\omega t + \varphi)$$

- Po dosazení předpokládaného řešení do (1.6) můžeme buď řešit determinant tridiagonální matice, nebo opět předpokládat (hádat), že

$$X_n(t) = \sin(kna). \quad (1.7)$$

(Srovnej s $X(z) = \sin(kz)$ u struny: na nyní nahrazuje z .)

⁵Pro $m \geq 2$ u ω_m, ν_m a λ_m mluvíme o tzv. *vyšších harmonických*.

- Pomozte si vyjádřením $X_{n+1} + X_n$ z (1.6), do níž dosadíme Ansatz, a následně srovnáme koeficienty u X_n . Po vyjádření ω dostáváme *nelineární* disperzní vztah

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \sin \frac{ka}{2}, \quad (1.8)$$

kde $\frac{ka}{2} \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. (Na tomto intervalu je sinus kladný a prostý, a mohli jsme tedy odmocňovat.)

- Dosazením (1.7) do okrajových podmínek získáme vlnové číslo

$$k_m = \frac{m\pi}{(N+1)a} = \frac{m\pi}{L}$$

a obecné řešení

$$\psi_n(t) = \sum_{m=1}^N A_m \sin(k_m na) \cos(\omega_m t + \varphi_m).$$

- Od řetízku ke struně lze přejít limitním přechodem $a \rightarrow 0$, a tedy nutně (aby nezdivergovaly vzorce na začátku sekce) $K \rightarrow +\infty$ a $M \rightarrow 0$. Pak lze pro $2a \ll \lambda$ („dlouhovlnná limita“) pomocí Taylora rozvinout sinus v (1.8) a dostaneme již známý strunový disperzní vztah

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k.$$

2 Postupné vlny

Dosud jsme uvažovali pouze $z \in \langle 0, L \rangle$. Nyní už dovolíme $z \in \mathbb{R}$ – tzv. otevřená soustava.

- Ve vlnové rovnici (1.4) položíme $v^2 = \frac{T}{\rho}$ a provedme transformaci $\psi(z, t) \rightarrow \tilde{\psi}(\xi, \eta)$, kde

$$\begin{aligned} \xi &= z - vt \\ \eta &= z + vt. \end{aligned}$$

Dosadíme do vlnové rovnice (derivace složené funkce!) a po provedení derivací a opětovném porovnání LHS a RHS⁶ nám zbyde jen

$$4v^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.1)$$

⁶ *Left hand side*, resp. *right hand side*.

D'Alembert řekl, že řešením (2.1) je každá⁷ vlna ve tvaru

$$\tilde{\psi}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

- **Retardovaný čas.** Nechť $G \equiv 0, F = F(z - vt)$. Mějme strunu na kladné poloze z a v počátku mašinku, která strunu vychyluje ve směru svislé osy x dle nějakého předpisu $x(t) = \psi(0, t)$. V místě z kdesi opodál měříme výchylku $\psi(z, t) = F(z - vt) = F(0 - v(t - \frac{z}{v})) = \psi(0, t - \frac{z}{v}) = x(t - \frac{z}{v}) = x(t')$. Čas t' nazýváme *retardovaným*. V místě z v čase t totiž pozorujeme stejnou výchylku jako v počátku, jen v čase $t - \frac{z}{v}$, který uběhl, než k nám vlna došla.

- **Harmonická postupná vlna.** Nechť mašinka jako nahoře tentokrát vykonává *harmonické* kmity podle předpisu $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Stejným postupem jako výše dojdeme k tomu, že se po struně v kladném směru osy z šíří *harmonická postupná vlna* (dále jen HPV), jež je vždy tvaru

$$\psi(z, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}z + \varphi\right) = A \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad (2.2)$$

kde $k = \frac{\omega}{v}$ je vlnové číslo.

- **Rovinná vlna.** Postupnou vlnu lze zobecnit i do 3D. Nechť

$$\psi(x, y, z, t) = F(z - vt). \quad (2.3)$$

Plochou konstantní fáze $z - vt_1 = C$ je **rovina** kolmá na osu z . Ukazuje se (dosad' si) že vlna (2.3) plní 3D vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi. \quad (2.4)$$

Řešením je dokonce každá rovinná vlna šířící se ve směru $\vec{s}$, $\|\vec{s}\| = 1$, a to

$$\psi(\vec{r}, t) = F(\vec{s} \cdot \vec{r} - vt).$$

Plochou konstantní fáze je nyní rovina

$$xs_x + ys_y + zs_z - vt_1 = C,$$

jíž je $\vec{s}$ normálovým vektorem.

⁷A je to pravda, zkus si dosadit.

- **Harmonickou postupnou vlnu** dostaneme opět stejnou úvahou: Nechť mašinka vykonává harmonický kmitavý pohyb $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Pak rovinná HPV je ve tvaru

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi), \quad (2.5)$$

kde $\vec{k} = k\vec{s}$ je tzv. vlnový vektor.

- **Rozlišuj!** Nepleťme si rovinnou HPV a **sférickou** HPV, jejíž rovnice je

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - k|\vec{r}| + \varphi). \quad (2.6)$$

Plochou konstantní fáze je zde kulová plocha. To zjistíme tak, že argument kosinu (tj. fázi) zafixujeme v čase t_1 a položíme ho roven konstantě $C \in \mathbb{R}$. Nezapomeňme, že $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\begin{aligned} \omega t_1 - k|\vec{r}| + \varphi &= C \\ (\omega t_1 + \varphi - C)^2 &= k^2 \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2. \end{aligned}$$

3 Vlny v disperzním prostředí

- Později bude odvozena fázová rychlost EM vln ve vakuu, resp. v dielektrickém prostředí

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c,$$

resp.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}},$$

kde $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, $\mu = \mu_0 \mu_r$.

- **Index lomu.** V průhledném prostředí je $\mu_r \approx 1$, a tedy

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}.$$

Index lomu skla je závislý na vakuové vlnové délce (a tedy na úhlové frekvenci) světla:

$$n(\omega) = \frac{c}{v(\omega)},$$

takže dostáváme **nelineární** disperzní vztah

$$\omega = v(\omega)k = \frac{c}{n(\omega)}k.$$

3.1 Elektronová teorie Thomsonova

- Mějme elektron v obalu atomu, který kmitá s vlastní frekvencí ω_0 . Na elektron dopadne EM vlna s frekvencí ω ve tvaru $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$.⁸ Dostáváme pohybovou rovnici **vynucených kmitů**

$$m\ddot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} = e\vec{E}_0 \cos \omega t. \quad (3.1)$$

Z MECH víme, že řešení má dvě složky: $\vec{r}(t) = \vec{r}_{\text{hom}}(t) + \vec{r}_{\text{part}}(t)$. Homogenní složce říkáme *přechodný jev* (je to tlumená vlna, která vymizí), složce partikulární *ustálený jev* (vlna, která přetrvává).

Řešme pouze ustálený jev. Předpokládáme tvar řešení $\vec{r}_{\text{part}}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega t$. Po dosazení do (3.1) a vyjádření $\vec{r}_0$ máme

$$\vec{r}_{\text{part}}(t) = \frac{e\vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

- **Opakování z ELMY**

- Elektrický dipólový moment

$$\vec{p}(t) = e\vec{r}_{\text{part}}(t) \quad (3.2)$$

- Vektor polarizace (N je počet elektronů na kubík)

$$\vec{P}(t) = N\vec{p}(t) \quad (3.3)$$

- Vektor elektrické indukce

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0\vec{E}(t) + \vec{P}(t) = \varepsilon\vec{E}(t) \quad (3.4)$$

- Dosadíme partikulární řešení do (3.2), pak do (3.3) a do (3.4), vyjádříme ε_r a dostáváme **index lomu v disperzním prostředí**

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}}. \quad (3.5)$$

Vidíme, že jde o rostoucí funkci se singularitou v bodě $\omega = \omega_0$. Vlny s vyšší frekvencí mají tedy vyšší index lomu (fialové světlo se láme více než červené).

- Disperzní vztah pro **monochromatické** vlny $\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi)$ je

$$\omega^2 = v^2 k^2.$$

⁸Magnetickou složku EM vlny šlo zanedbat.

3.2 EM vlny v plazmatu

- V (3.1) položíme $\omega_0 = 0$ (pohybová rovnice elektronu). Pro tuto volbu lze použít (3.5):

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}}.$$

Umocněním a vynásobením ω^2

$$n^2 \omega^2 = \omega^2 - \underbrace{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}_{\omega_p^2}.$$

Použitím $\omega^2 n^2 = c^2 k^2$ získáme pro $\omega \geq \omega_p$ (aby RHS zůstala nezáporná) **disperzní vztah pro plazma:**

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (3.6)$$

Pro $\omega \geq \omega_p$ je plazma pro vlny **transparentním** prostředím (procházejí skrz).

- Co když $\omega < \omega_p$? Z (3.6) lze odvodit vlnovou rovnici postupné vlny v plazmatu

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \psi + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (3.7)$$

která má řešení i pro vlny s $\omega < \omega_p$; ta už ale nebudou monochromatická.

- Řešme (3.7) ve smyslu ustálených kmitů. Ansatz:

$$\psi(z, t) = X(z) \cos(\omega t + \varphi).$$

Dosazením máme rovnici

$$X''(z) + \underbrace{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}_{\star} X(z) = 0. \quad (3.8)$$

$\star$ má tři možnosti:

- $\star = 0 \Rightarrow X(z) = Az + b$, které diverguje – zahodit.
- $\star > 0 \Rightarrow X''(z) + k^2 X(z) = 0$, což dává HPV, jak ji známe.

- $\star < 0 \Rightarrow X''(z) - \star^2 X(z) = 0$, z toho charakteristická rovnice $\lambda^2 - \star^2 = 0$ a fundamentální systém $\{e^{\star z}, e^{-\star z}\}$, kde první řešení zahodíme, protože také diverguje. Dostáváme exponenciálně tlumenou, tzv. **evanescentní vlnu**

$$\psi(z, t) = Ae^{-\star z} \cos(\omega t + \varphi).$$

Pro takovou vlnu (tzn. $\omega < \omega_p$) je prostředí *reaktivní*. Útlum vln není způsoben disipací energie, ale neschopností reaktivního prostředí přenášet vlny s $\omega < \omega_p$.

3.3 Řetízek atomů jakožto reaktivní prostředí

- Již známe disperzní vztah pro řetízek:

$$\omega = \omega_{\max} \sin \frac{ka}{2},$$

kde $\omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{K}{M}}$. Pro vlnění s $\omega < \omega_{\max}$ je řetízek transparentním prostředím.

- Co když je ale $\omega > \omega_{\max}$? Pak řešíme vynucené kmity řetízku – při vysokých frekvencích nestíhají atomy sledovat pohyb svých sousedů. Předpokládáme řešení

$$\psi_n(t) = A(-1)^n e^{-\star na} \cos(\omega t + \varphi).$$

- Dosazením do pohybové rovnice (1.6) získáme **disperzní vztah v reaktivní oblasti** (dolní propust):

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \cosh \frac{\star a}{2} \geq \omega_{\max}. \quad (3.9)$$

3.4 Fourierova transformace

- **Přímá FT.** Pomocí přímé FT jsme schopni rozložit signál na jeho spektrální složky. Mějme signál $x(t)$, jehož integrál přes reálnou osu absolutně konverguje: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$. Přejdeme k jeho spektrálním složkám je dáno těmito vzorci:

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt \quad (3.10)$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt \quad (3.11)$$

- **Inverzní FT** naopak umožňuje ze spektrálních složek složit původní signál, a to následovně

$$x(t) = \int_0^{+\infty} (a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (3.12)$$

Ekvivalentně lze transformaci (3.12) po rozšíření výrazem $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a po použití součtových vzorců psát ve tvaru⁹

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega, \quad (3.13)$$

kde $A(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2}$ obsahuje informaci o rozložení jednotlivých frekvencí v rámci spektra a ve $\varphi(\omega)$ je obsažen přechod součtovými vzorci.

- FT lze psát v pohodlnějším exponenciálním tvaru. Položme

$$C(\omega) := \frac{a(\omega) - ib(\omega)}{2}.$$

Pak lze pomocí (3.10) a (3.11) přímou FT napsat jako

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.14)$$

a po dlouhých úpravách¹⁰ dostaneme inverzní FT

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.15)$$

3.5 Vlnový balík

Elektron, do něhož v jistém okamžiku narazí cizí částice, začne vyzařovat EM vlny a konat tlumené kmity. To lze přiblížit na struně, jejíž konec rozkmitáme způsobem

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{2\tau}} \cos \omega_0 t.$$

Vzniká tedy postupná vlna

$$\psi(z, t) = Ae^{-\frac{1}{2\tau}(t - \frac{z}{v})} \cos(\omega_0 t - k_0 z),$$

⁹Ještě záleží na tom, jak si nakreslíme „pomocný trojúhelník“ se stranami a, b a $\sqrt{a^2 + b^2}$. Podle umístění úhlu $\varphi(\omega)$ dostaneme v (3.13) sinus či kosinus. Obě vyjádření jsou samozřejmě ekvivalentní.

¹⁰Viz přednáška.

kde konstanta $\tau \approx 10^{-8}$ s je tzv. radiační útlum energie. Již po krátkém čase ($t \approx 10^{-7}$ s) exponenciála způsobí, že je vlna utlumena na zanedbatelné hodnoty. To znamená, že veškerá energie vlny je obsažena na velmi krátkém úseku – je prostorově ohraničena. Mluvíme o **vlnovém balíku**.

Vlnový balík lze získat jako superpozici monochromatických vln:

- Mějme opět mašinku v počátku: $x(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega$. Opoďál na ose z pozorujeme postupnou vlnu (v retardovaném čase) $\psi(z, t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t - kz + \varphi(\omega)) d\omega$.
- Zvolme $\varphi(\omega) := 0$ a necht' má spektrum signálu následující průběh:

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{když } \omega \in \langle \omega_0 - \frac{\Delta\omega_0}{2}; \omega_0 + \frac{\Delta\omega_0}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Dosadíme toto $A(\omega)$ do integrálu výše. Po jeho spočtení dostaneme následující signál (t' je retardovaný čas):

$$x\left(t - \frac{z}{v}\right) = \psi(z, t) = \Delta\omega \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t'\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}t'}}_{\text{modulace}} \underbrace{\cos(\omega_0 t - kz)}_{\text{nosná}}.$$

- Vlnu zamrzneme v místě $z = 0$. „První nulou“ určíme šířku signálu, kde se předá největší množství informace, a dojdeme k důležitému vztahu

$$\Delta\omega\Delta t = 2\pi. \quad (3.16)$$

3.6 Vlnový balík v disperzním prostředí

V disperzním prostředí, ($\omega = \omega(k)$) se vlnový balík šíří **grupovou rychlostí**

$$v_g = \omega'(k_0) = \frac{d\omega}{dk}(k_0). \quad (3.17)$$

Fázová rychlost $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ může překročit rychlost světla (např. v plazmatu, zkus si to na (3.6)), protože to je rychlost nosné vlny, jež jako taková žádnou informaci nenese. Grupová rychlost (to je rychlost modulační obálky) však rychlost světla překročit nesmí!

Věta 3.1. *Grupová a fázová rychlost se rovnají, právě když jde o nedisperzní prostředí, tj.*

$$\omega = \alpha k,$$

kde α (tj. fázová rychlost) je konstanta.

4 Energie vlnění

4.1 Energie vlnění na struně

Vezměme nejdříve řetízek atomů a jeho spojitou limitu ($a \rightarrow 0$). Víme, že v *konzervativní* soustavě se energie zachovává, tedy platí $E = E_k + E_p$. Odvodili jsme

- **Hustotu kinetické energie** ze vzorce pro celkovou kinetickou energii $E_k = \sum_{z \leq na \leq z + \Delta z} \frac{1}{2} M \dot{\psi}_n^2$ za pomoci aproximace: Sumu $\sum_{z \leq na \leq z + \Delta z}$ jsme odhadli počtem členů $\frac{\Delta z}{a}$. LHS je možné vyjádřit jako $\kappa \Delta z$. Je tedy

$$\varkappa = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2. \quad (4.1)$$

- **Hustotu potenciální energie** jsme určili z potenciální energie pružiny mezi n . a $(n+1)$. atomem: $U_{n,n+1} = \frac{1}{2} K (l^2 - a^2) = \frac{1}{2} K (\psi_{n+1} - \psi_n)^2$. Celková potenciální energie bude opět dána sumou jako výše. Odhadneme výraz $\psi_{n+1} - \psi_n \approx a \frac{\partial \psi}{\partial z}$, jakož i sumu. Nakonec díky $T = Ka$ dostáváme

$$u = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2. \quad (4.2)$$

- Z konzervativnosti soustavy můžeme na jednotku délky psát **hustotu energie**

$$\varepsilon = \varkappa + u = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2. \quad (4.3)$$

- **Celkovou energii struny** na $\langle a, b \rangle$ dostaneme integrací přes z :

$$E(t) = \int_a^b \varepsilon(z, t) dz. \quad (4.4)$$

- **Tok enegie**, která je přenesena z místa n na místo $n + 1$. Je dán výkonem, jenž síla F_{2x} koná na $(n + 1)$. bod¹¹. Má vektorový charakter, a tedy

$$\vec{S}(z, t) = -T \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} \vec{z}_0. \quad (4.5)$$

¹¹Po aproximaci $|\vec{F}_2| \approx T$ a $\sin \vartheta_2 \approx \operatorname{tg} \vartheta_2$ a použití vzorce pro výkon $P = F_{2x} v$ dostáváme (4.5).

- Diferenciální tvar ZZE

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S_z}{\partial z} = 0. \quad (4.6)$$

- Integrální tvar ZZE

$$-\frac{dE_{\langle a,b \rangle}}{dt} = S_z(b) - S_z(a). \quad (4.7)$$

4.2 Energetické veličiny na postupné vlně

- Pro **postupnou** vlnu ve směru $+z$: $\psi(z, t) = F(z - vt)$ určíme vztah mezi $\varkappa$, ε a u . Pro tuto vlnu si potřebujeme napočítat $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ a $\frac{\partial \psi}{\partial z}$. Po dosazení do (4.1) a použití $v^2 = \frac{T}{\rho}$ zjistíme, že

$$\varkappa = u,$$

a tedy ze ZZE

$$\varepsilon = 2\varkappa = 2u.$$

- Po dosazení napočítaných derivací do

$$S_z = -T \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

se ukáže, že

$$S_z = \varepsilon v.$$

- Je-li tato postupná vlna navíc **harmonická**: $\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi)$ a spočítáme pro ni $\varkappa$, u a S_z , zjistíme, že jsou přímo úměrné **kvadrátu** $A^2 \sin^2(\omega t - kz + \varphi)$!

- Časová střední hodnota funkce $f(t)$ ¹²

$$\langle f(t) \rangle_T := \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt.$$

- Časová střední hodnota T -periodické funkce $f(t)$

$$\langle f(t) \rangle_T := \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt.$$

¹²Funkce f by samozřejmě měla být integrabilní. Pokud nás zajímá časová střední hodnota na omezeném intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, pak stačí počítat $\langle f(t) \rangle := \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$.

- **Důležitost:**

$$\langle \cos(\omega t - kz + \varphi) \rangle_T = 0 = \langle \sin(\omega t - kz + \varphi) \rangle_T$$

$$\langle \cos^2(\omega t - kz + \varphi) \rangle_T = \frac{1}{2} = \langle \sin^2(\omega t - kz + \varphi) \rangle_T.$$

- **Intenzita záření** je definována jako

$$I := \langle |S_z| \rangle_T \stackrel{\text{HPV}}{=} \frac{1}{2} T \omega k A^2.$$

- POZOR! Jsou-li ψ_1 a ψ_2 řešení vlnové rovnice, pak pro výchylku $\psi(z, t)$ sice platí princip superpozice $\psi = \psi_1 + \psi_2$, nikoli však pro **kvadratické veličiny**, jako jsou $\varkappa$, u a S_z (intenzity)!

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right)^2 + \underbrace{2 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \frac{\partial \psi_2}{\partial t}}_{\text{interferenční člen}} + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right)^2 \neq \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right)^2.$$

5 Odrazy vln

Na nekonečné struně k odrazům nedochází. Na struně *konečné* délky k odrazu dojde, pokud ji korektně nezakončíme.

5.1 Korektní zakončení

Toto zakončení¹³ musí

- presně napodobovat pokračování struny.
- pohltnout veškerou energii dopadající vlny.

Je-li struna zakončena korektně, nelze vysíláním impulsů určit její délku, protože k žádným odrazům nedochází.

Uvažovali jsme, že na zakončení v počátku dopadá z $-\infty$ vlna $\psi(z, t) = F(z - vt)$.

Z požadavku $F_x = F_{2x}$ jsme odvodili **charakteristickou impedanci**

$$Z = \sqrt{T\rho} \quad (5.1)$$

a poukázali na skutečnost, že síla viskózního tlumení F_x na strunu je úměrná rychlosti: $F_x = -Z \frac{\partial \psi}{\partial t}$.

¹³Dr. Novotný nám ho kreslil jako jakýsi píst.

5.2 Odraz na nekorektním zakončení

Mějme strunu na $z \in (-\infty, 0)$, která je v počátku zakončena tlumičem se *zatěžovací impedancí* $Z_2 \neq Z$. Protože už bude docházet k odrazu, musíme uvažovat $\psi(z, t) = \underbrace{F(z - vt)}_{\text{dopadající}} + \underbrace{G(z + vt)}_{\text{odražená - chci}}$. Odvodili jsme, že

$$G(z + vt) = RF(-z - vt),$$

kde R je tzv. **koeficient odrazu**

$$R = \frac{Z - Z_2}{Z + Z_2}. \quad (5.2)$$

Je-li vlna navíc *harmonická*, tj.

$$F(z - vt) = A \cos(\omega t - kz) = A \cos\left(-k\left(z - \frac{\omega}{k}t\right)\right) = A \cos(-k(z - vt)),$$

pak

$$G(z + vt) = RF(-z - vt) = RA \cos(-k(-z - vt)) = RA \cos(\omega t + kz).$$

Limitní hodnoty R :

- $Z_2 = 0 \Rightarrow R = 1 \Leftrightarrow$ Žádná zatěžovací impedance (volný konec).
- $Z_2 = Z \Rightarrow R = 0 \Leftrightarrow$ Korektní zakončení.
- $Z_2 \rightarrow +\infty \Rightarrow R = -1 \Leftrightarrow$ Pevný konec – veškerou energii odnese odražená vlna.

Pro harmonickou vlnu pak platí:

- $R = 1 \Rightarrow G = A \cos(\omega t + kz) \Leftrightarrow$ Stejná fáze.
- $R = 0 \Rightarrow G \equiv 0$.
- $R = -1 \Rightarrow G = -A \cos(\omega t + kz) = A \cos(\omega t + kz + \pi)$ – odražená vlna má opačnou fázi (je vzhůru nohama).

5.3 Vlna na rozhraní dvou transparentních prostředí

Transparentním prostředím myslíme prostředí, jež umožňuje šíření vln. Mějme dvě struny, každou na záporné, resp. kladné poloose s různými parametry $T_1, T_2, \rho_1, \rho_2, Z_1, Z_2$. Požadujeme

(a) spojitost navázání: $\psi_1(0, t) = \psi_2(0, t)$.

(b) III. NZ: $|\vec{F}_{1x}| = |\vec{F}_{2x}|$.

Řešíme tedy

$$T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}(0, t) = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z}(0, t),$$

do níž dosadíme d'Alembertovo řešení

$$\begin{aligned}\psi_1(z, t) &= \underbrace{F_1(z - vt)}_{\text{dopadající}} + \underbrace{G_1(z + vt)}_{\text{odražená}} \\ \psi_2(z, t) &= \underbrace{F_2(z - vt)}_{\text{prošlá}},\end{aligned}$$

kde G_2 jsme zahodili, protože nechceme, aby nám někdo z $+\infty$ posílal vlny. Po různých úpravách dojdeme ke **koefficientu průchodu**

$$P_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (5.3)$$

a k jeho vztahu s koefficientem odrazu

$$R_{12} = P_{12} - 1 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (5.4)$$

Pro tok energie ve směru osy z

$$S_z = -T \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

lze také zavést speciální koefficienty pro intenzity, a to

- **Odrazivost**

$$\mathcal{R}_{12} = R_{12}^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2. \quad (5.5)$$

- **Transmisivitu**

$$\mathcal{P}_{12} = \frac{Z_2}{Z_1} P_{12}^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (5.6)$$

5.4 Telegrafní vedení

Jde o transmisní linku, což jsou dva dlouhé přímé vodiče určené k přenosu střídavého proudu s frekvencemi v rádiovém spektru, jež jsou dost vysoké na to, aby bylo třeba počítat s vlnovou povahou tohoto proudu. Chceme odvodit charakteristickou impedanci homogenního vedení.

Vezměme dva nekonečné dráty, které nejsou dokonale izolované – do hry vstupuje kapacita a svod. Nekonečnost drátů lze zjednodušit na model, který bere nekonečné vedení jako sled elementárních elektronických součástek (rezistorů (R), kondenzátorů (C), cívek (L) a svodů (G) mezi kabely) na infinitesimálních úsecích vedení.

Telegrafní rovnice svazují střídavý proud a napětí. Jejich řešením jsou proudové a napěťové vlny.

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (5.7)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.8)$$

Řešme tuto úlohu Fourierovou metodou. Nechť

$$\begin{aligned} u(z, t) &= U(z)e^{j\omega t} \\ i(z, t) &= I(z)e^{j\omega t}, \end{aligned}$$

kde $j = \sqrt{-1}$. Takto dojdeme k charakteristické impedanci

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}. \quad (5.9)$$

Zanedbáme-li v telegrafních rovnicích pro vysoké frekvence R a G , lze odvodit **vlnové rovnice** pro napětí a proud:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial z^2}. \quad (5.11)$$

Fázová rychlost takové vlny je tedy $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Koeficienty odrazu na telegrafním vedení:

$$R_U = \frac{Z_2 - Z}{Z_2 + Z} \quad (5.12)$$

$$R_I = -\frac{Z_2 - Z}{Z_2 + Z} = -R_U \quad (5.13)$$

Srovnej s (5.2)!

6 Elektromagnetické vlny

6.1 Rovinné EM vlny

Elektromagnetické (dále jen EM) interakce se řídí Maxwellovými rovnicemi a rovnicí kontinuity. Ve vakuu platí:

$$\text{Gaussův zákon} \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.1)$$

$$\text{Faradayův zákon} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$\text{Neexistence mg. monopólu} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (6.3)$$

$$\text{Ampèrův zákon} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.4)$$

$$\text{Rovnice kontinuity} \quad \operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (6.5)$$

Důležitý je též **Weberův vztah**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (6.6)$$

V prázdném prostoru (tj. $\rho = 0 = \vec{j}$) lze odvodit vlnové rovnice pro $\vec{E}$, resp. $\vec{B}$ aplikací rotace na rovnice (6.2), resp. (6.4). Jelikož stále platí Gaussův zákon (6.1), dostáváme

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6.7)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (6.8)$$

Podle Weberova vztahu (6.6) se tedy ve vakuu musí EM vlny šířit fázovou rychlostí c .

Vlastnosti rovinných EM vln šířících se ve směru $\vec{s}$, $|\vec{s}| = 1$:

1. (a) $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{F}_E(\vec{s} \cdot \vec{r} - vt)$
(b) $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{F}_B(\vec{s} \cdot \vec{r} - vt)$
2. $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{s})$ tvoří pravotočivý OG systém.
3. $\vec{B}(\vec{r}, t)$ je plně určeno $\vec{E}(\vec{r}, t)$, neboť $E = vB$.

4. EM vlnění je **příčné** – jeho výchylky jsou kolmé na směr šíření.

5. Jsou-li EM vlny monochromatické a harmonické:

$$(a) \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

$$(b) \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi),$$

kde $\vec{k} = k\vec{s}$.

6.2 Energetické veličiny v rovinné EM vlně

- **Hustota energie** v nevodivém prostředí, $[w] = \text{J s}^{-1}$

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}). \quad (6.9)$$

- **Hustota toku energie (Poyntingův vektor)**. Udává množství energie prošlé za 1 sekundu jednotkovou plochou, která je orientována kolmo na směr šíření. $[\vec{S}] = \text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) := \vec{E} \times \vec{H}. \quad (6.10)$$

- **Hustota hybnosti.**

$$\vec{g}(\vec{r}, t) := \vec{D} \times \vec{B} \stackrel{\text{vakuum}}{=} \varepsilon_0 \vec{E} + \mu_0 \vec{H} = \frac{1}{c^2} \vec{S}. \quad (6.11)$$

- Je-li EM vlna rovinná: $\vec{E} = (E_x(z, t), 0, 0)$, $\vec{B} = (0, B_y(z, t), 0)$:

– $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$ a po dosazení do (6.9) je

$$w = \varepsilon E^2. \quad (6.12)$$

– Poyntingův vektor (6.10) má pouze z -ovou složku

$$S_z = EH = \varepsilon E^2 v = vw$$

V rovinné EM vlně se tedy energie šíří ve směru osy z .

- **Intenzita monochromatické EM vlny** $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 v.$$

6.3 EM vlny na rozhraní

Pro EM vlny můžeme též zavést **charakteristickou impedanci**, a to s pomocí vztahu $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$:

$$Z := \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \stackrel{\text{vakuum}}{=} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377 \, \Omega.$$

Vztah mezi koeficientem odrazu pro elektrické pole a indexem lomu dvou prostředí:

$$R_E = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}.$$

7 Polarizace

7.1 Polarizační stavy EM vlny

Postupnou rovinnou monochromatickou EM vlnu lze zapsat ve tvaru $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$. Tato vlna kmitá v rovině *kolmé* na směr šíření. Nechť je směrem šíření osa z . Vlnu lze v rovině xy navíc rozložit do superpozice dvou směrů daných jednotkovými vektory $\vec{x}_0$ a $\vec{y}_0$.

$$\vec{E}(z, t) = \vec{x}_0 \underbrace{E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)}_{E_x(z, t)} + \vec{y}_0 \underbrace{E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)}_{E_y(z, t)}.$$

Zamrzneme vlnu v počátku $\vec{E}(0, t)$ a dívejme na ni čelem (s osou z mířící do oka).

$$\vec{E}(0, t) = \begin{cases} E_x(0, t) = E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ E_y(0, t) = E_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \end{cases}$$

což jsou parametrické rovnice **elipsy**, kterou opisuje vektor $\vec{E}(0, t)$. Pro $E_1 \neq E_2$ jde o tzv. **eliptickou polarizaci**. Speciální případy:

- **Kruhová polarizace.** $E_1 = E_2$
 - **Levotočivá** $\odot$. $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$
 - **Pravotočivá** $\odot$. $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$
- **Lineární polarizace.** $\varphi_1 - \varphi_2 \in \{0, \pi\}$. Zde vektor $\vec{E}(\vec{r}, t)$ opisuje úsečku (kosiny se v podílu pokráčí a máme $\frac{E_y}{E_x} = \pm \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{const.}$).

Každá monochromatická EM vlna je polarizovaná!

7.2 Polarizované EM vlny v látkách

Lineárně polarizované *světlo* (tj. 390–760 nm) neumíme budit pomocí dipólové antény (musela by být atomárních rozměrů). Lze toho docílit např. selektivní absorpcí pomocí polarizačních filtrů. Ty propouštějí z dopadajícího světla jen tu část, která je polarizovaná *lineárně* ve směsu tzv. osy propustnosti $\vec{e}$. Zbyde jen projekce ve směru $\vec{e}$, tj.

$$\vec{E}_{\text{out}} = (\vec{e} \cdot \vec{E}_{\text{in}}) \cdot \vec{e}. \quad (7.1)$$

Malusův zákon intenzity. Necht $\vartheta = \angle(\vec{e}, \vec{E}_{\text{in}})$, $|\vec{e}| = 1$. Pak dle (7.1)

$$|\vec{E}_{\text{out}}| = |(\vec{e} \cdot \vec{E}_{\text{in}})| \cdot |\vec{e}| = E_{\text{in}} \cos \vartheta$$

a pro intenzity platí

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} \cos^2 \vartheta. \quad (7.2)$$

7.3 Polarizace světla odrazem

Existuje úhel dopadu, při němž je odražená vlna polarizovaná pouze ve směru kolmém na rovinu dopadu – takový úhel nazýváme **Brewsterův** (odvozený z Fresnelových vzorců)¹⁴

$$\text{tg } \vartheta_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

Navíc pak platí, že úhel mezi prošlým a odraženým paprskem je *pravý*.

7.4 Dvojlom

V přírodě existují tzv. opticky anizotropní látky, jejichž elektrická permitivita není skalár, ale tenzor $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \underbrace{\tilde{\varepsilon}_{ij}}_{\text{rel.}}$

¹⁴Fresnelovy vzorce budou odvozeny až v TEF2. Popisují koeficienty odrazu pro rovnoběžnou, resp. kolmou složku elektrického vektoru $\vec{E}$. Vypadají tako: $R_E^{\parallel} = \frac{\text{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\text{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$, resp. $R_E^{\perp} = \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$. Má-li být odražený paprsek polarizovaný *kolmo* na rovinu dopadu, musí rovnoběžná složka $R_E^{\parallel}$ vymizet. Musí však být $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$, jinak (dosad' si do Snellova zákona) by prostředí musela mít stejný index lomu, což je spor. Nulu tedy zařídíme zdivergováním jmenovatele pro $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$ a dosazením do Snellova zákona už ϑ_B snadno odvodíme.

Maxwellovy rovnice v prostředí.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (7.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (7.5)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (7.6)$$

POZOR! Teď už obecně neplatí, že $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, takže po aplikaci rotace na (7.4) nezmizí člen $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}$! Tyto rovnice však stále můžeme řešit. Předpokládejme, že řešením je rovinná vlna $\vec{E} = \vec{E}_0 F(\vec{s} \cdot \vec{r} - vt)$, kde F je libovolná funkce dané proměnné. Tento Ansatz je skutečně řešením „orotované“ (7.4), právě když je vektor $\vec{E}_0$ *vlastním vektorem* matice (ε_{ij}) příslušným vlastnímu číslu ε_λ . Pak totiž dle definice vlastního čísla platí

$$\varepsilon \vec{E}_0 = \varepsilon_\lambda \vec{E}_0$$

Díky tomu můžeme toto vlastní číslo vytknout z členu $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}$, který se hned stává nulovým díky divergenční rovnici pro $\vec{E}$. Pak už máme známou rovnici

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v_\lambda^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Fázová rychlost je však obecně jiná pro každý vlastní vektor!

Nedochází-li k absorpci, je tenzor ε symetrický ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$), a tedy diagonalizovatelný. Podle vlastností jeho vlastních čísel dělíme látky na

1. **Izotropní** (NaCl, KCl, CaF₂)
2. **Jednoosé** (islandský vápenec CaCO₃)
3. **Dvojosé**

V jednoosých látkách dochází ke *dvojlomu*. Příchozí paprsek se v látce rozdělí na řádný (*ordinarius*) a mimořádný (*extraordinarius*), který vzniká v důsledku anizotropie krystalu. Oba paprsky jsou lineárně polarizované, ale jejich vektory $\vec{E}$ kmitají v rovinách vzájemně kolmých. Jejich rychlosti jsou různé, a to

$$v_o = \frac{c}{n_o}$$

$$v_e = \frac{c}{n_e}.$$

Této anizotropie se využívá u tzv. **vlnových destiček**. Jsou vybroušeny tak, aby optická osa krystalu $\vec{n}$ ležela přesně v jedné z vybroušených stěn. Ordinární osa $\vec{n}_o$ je na $\vec{n}$ kolmá, extraordinární $\vec{n}_e$ je s ní rovnoběžná. Ven z destičky o tloušťce d vyjdou rovnoběžně, ale fázově posunuté o

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d.$$

Podle tohoto fázového rozdílu rozlišujeme

- **Čtvrtvlnné**¹⁵ destičky: $|\Delta\varphi| = \frac{\pi}{2}$.
- **Půlvlnné** destičky: $|\Delta\varphi| = \pi$.

7.5 Časová koherence

Doteď jsme uvažovali pouze monochromatické vlny. Ve skutečnosti se ale v přírodě s ničím takovým nesetkáme (nejblíže jsou lasery). Jistý tepelný zdroj si můžeme představit jako velké množství oscilátorů, které tlumeně kmitají s časovou konstantou $\tau \approx 10^{-8}$ s. Tyto oscilátory vysílají vlnové balíky se středem kolem ω_0 a šířkou $\Delta\omega$. Je-li $\Delta\omega \ll \omega_0$, jde o zdroj **kvazimonochromatického** záření. I pro kvazimonochromatické vlny pak platí vztah podobný (3.16):

$$\Delta\omega\tau \approx 2\pi.$$

Kvazimonochromaticnost EM vlny

$$E(t) = E_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

si můžeme zadefinovat tak, že „ $E_0(t)$ a $\varphi(t)$ se pomalu, ale náhodně mění s časovou konstantou $\tau \gg T_0$ “, kde T_0 je perioda.

Definice 7.1. Mějme náhodná pole $E_1(t)$, $E_2(t)$ a časový interval délky Δt . Lze-li pole $E_2(t + \Delta t)$ přesně určit jen ze znalosti $E_1(t)$, pak tato pole nazýváme **dokonale koherentní**, jinak jsou nekoherentní.

Definice 7.2. Koherenční čas τ_{koh} odděluje dokonale koherentní a nekoherentní události. Definovali jsme ho jako

$$\tau_{\text{koh}} \approx \tau \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega} \approx 10^{-8} \text{ s.}$$

Definice 7.3. Koherenční délka je délka vlny vyslané za koherenční čas:

$$l_{\text{koh}} = c\tau_{\text{koh}} \approx 3 \text{ m.}$$

¹⁵Devět souhlásek za sebou!

8 Interference, difrakce

Kapitola o ničem¹⁶, jen vypíšu ty nejdůležitější poznatky.

Babinetův princip. Mějme zdroj, jenž vysílá paprsky. Do cesty jim vkládáme vzájemně doplňková stínítka A a B . Babinet říká: *To, co vidím bez stínítek, je stejné jako to, co vidím jen se stínítkem A , plus to, co vidím jen se stínítkem B .*

$$\begin{aligned}E_{\emptyset}(P) &= E_A(P) + E_B(P) \\ E_B(P) &= -E_A^{\text{ind}}(P).\end{aligned}$$

Druhá rovnice znamená, že pozorovatel vnímá přes stínítka B stejnou intenzitu jako $I_A^{\text{ind}}(P)$, kterou pole zdroje $E_{\emptyset}$ vyvolává (indukuje) na druhé straně stínítka A . Díru ve stínítku B si tedy lze představit zaplněnou bodovými zdroji, které vysílají paprsky o intenzitě $I_A^{\text{ind}}(P)$, místo abychom se zabývali tím, co vysílá zdroj.

Rozlišujeme dva druhy difrakce (ohybu):

- Fraunhoferovu, kdy vzdálenosti zdroje od stínítka a pozorovatele od stínítka jsou asymptotické. Paprsky lze pak považovat za rovnoběžné.
- Fresnelovu, kdy je asymptotická jen jedna ze vzdáleností.

U **Youngova pokusu** se dvěma štěrbinami vzdálenými d jsme po sáhodlouhém odvození došli ke vztahu pro intenzitu pozorovanou v bodě Q :

$$I(Q) = 2I_1(1 + \cos(kd \sin \vartheta)).$$

$I(Q)$ je maximální pro $kd \sin \vartheta = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Dochází k tzv. konstruktivní superpozici.

$$\sin \vartheta_m = \frac{2m\pi}{kd} = \left\| k = \frac{2\pi}{\lambda} \right\| = m \frac{\lambda}{d}.$$

$I(Q)$ je minimální pro $kd \sin \vartheta = (2m + 1)\pi$, tedy dochází k destruktivní superpozici.

$$\sin \vartheta_m = \frac{2m + 1}{2} \frac{\lambda}{d}.$$

Vzdálenost světlých proužků (interferenčních maxim) na stínítku je

$$\Delta y = L_Q \frac{\lambda}{d},$$

kde L_Q je vzdálenost stínítka od štěrbin.

¹⁶Čti: Nebavila mě.

8.1 Difrakční mřížka

Jde o skleněnou destičku s vysokým počtem vrypů, jež jsou stejně široké a vzdálené. Je schopna rozložit dopadající bílé světlo do různých směrů podle vlnové délky – dostáváme spektrální čáry.

Vzdálenost vrypů d označujeme jako **mřížkovou konstantu**. Dle Huygensova principu je každá štěrbina zdrojem další sférické vlny. Zde jsme též odvodili polohy maxim

$$\sin \vartheta_m = m \frac{\lambda}{d},$$

ale tato maxima jsou mnohem užší. Jejich úhlová šířka je

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{Nd}.$$

U mřížky větším počtem vrypů N jsou maxima ostřejší.

Spektrální maxima (čáry) mohou být velmi blízká. Kdy je ještě rozlišíme? To nám říká **Rayleighovo kritérium**: *Dvě spektrální čáry příslušné λ_1 a λ_2 jsou rozlišitelné v prvním řádu, když úhlová vzdálenost středů těchto maxim je větší než jejich úhlová šířka.*

$$\left| \frac{\lambda_1}{d} - \frac{\lambda_2}{d} \right| \geq \frac{1}{Nd} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) = \frac{1}{Nd} \lambda_{\text{stř.}}$$

Po vykrácení d a úpravě dostáváme spektrální rozlišení mřížky

$$\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\lambda_{\text{stř.}}} \geq \frac{1}{N}.$$

Slovy: *Čím větší je počet vrypů, tím je rozlišení mřížky lepší.*

8.2 Difrakce na štěrbině šířky D

Na štěrbinu konečné šířky dopadá svazek kvazimonochromatické světla. Dle Huygense opět platí, že si štěrbinu můžeme představit jako soustavu *spojitě* rozložených zdrojů. Na stínítku bude dominantní první maximum o úhlové šířce

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{D}. \quad (8.1)$$

Další maxima už kvůli rozbíhavosti budou velmi slabá. Jelikož je $\lambda \ll D$, lze vztah výše aproximovat:

$$\Delta \vartheta \approx \frac{\lambda}{D},$$

což nám dává **úhlovou rozbíhavost** – v oblasti takovéto šířky bude soustředěna většina intenzity.

Příklad 8.1. Jedinci s nejostřejším zrakem dokáží rozlišit dvě značky 3 mm od sebe na vzdálenost 10 m. Panenka má průměr D přibližně 2 mm. Dosadíme-li do (8.1) žluté světlo ($\lambda \approx 600$ nm), máme

$$\Delta\vartheta \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

Je-li oblouková vzdálenost menší než $\Delta\vartheta$, už kvůli difrakci na štěrbíně (naší panence) značky nerozlišíme.

9 Geometrická optika

9.1 Rovnice eikonálu

Doteď jsme pracovali s EM vlnami, jejichž

1. směr šíření je všude stejný
2. amplituda je konstantní na plochách konstantní fáze.

Geometrická optika pracuje s následujícími předpoklady:

1. Amplituda a směr šíření se jen „velmi málo“ mění na vzdálenostech řádu λ . Z toho plyne, že vlnoplochy jsou *hladké*.
2. Difrakce je zanedbána.

Zapišme naši vlnu:

$$\psi(\vec{r}, t) = a(\vec{r}, t) e^{i\varphi(\vec{r}, t)}, \quad (9.1)$$

kde $a(\vec{r}, t)$ je pomalu se měnící amplituda a $\varphi(\vec{r}, t)$ je fázová funkce zvaná **eikonál**. Rozvineme-li eikonál do Taylora kolem $\vec{r}_0$ a t_0

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}_0, t_0) + \sum_{i=1}^3 \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{r}_0, t_0)}_{\star} (x_i - x_i^0) + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\vec{r}_0, t_0)}_{\spadesuit} (t - t_0)$$

a srovnáme-li tento rozvoj s fází rovinné postupné vlny

$$\varphi_{\text{rov}} = \alpha + \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t,$$

musí nutně $\vec{k} = \star$ a $\omega = \spadesuit$, neboli

$$\begin{aligned} \vec{k}(\vec{r}, t) &= \text{grad } \varphi(\vec{r}, t) \\ \omega(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme definovat paprsky:

Definice 9.1. Paprsky jsou křivky, které jsou v každém bodě *tečné* k vlnovému vektoru $\vec{k}$, a tedy *kolmé* na vlnoplochy.

Aplikační oblastí geometrické optiky je $\lambda \rightarrow 0$. GO je tedy limitou nulové vlnové délky. S tímto v hlavě budeme chtít odvodit rovnici pro eikonál z 3D vlnové rovnice (2.4):

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (9.2)$$

Na (9.1) provedeme potřebné derivace. Jelikož $\lambda \rightarrow 0$, a tedy $k, \omega \rightarrow +\infty$, můžeme v těchto derivacích zanedbat členy, v nichž se nevyskytuje druhá mocnina $k_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, a dostáváme (nelineární) **rovnici eikonálu**

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right)^2. \quad (9.3)$$

Pro monochromatickou vlnu je $\omega(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \omega_0 = \text{const.}$, takže po zintegrování dle času máme

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\omega_0 t + \varphi(\vec{r}, 0) = -\omega_0 t + \underbrace{\varphi_0(\vec{r})}_{\text{integr. konst.}}$$

a po dosazení do (9.3) dostáváme rovnici eikonálu monochromatické vlny:

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_0(\vec{r})}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{1}{v^2} \omega_0^2 = \frac{n^2(\vec{r})}{c^2} \omega_0^2. \quad (9.4)$$

9.2 Fermatův princip

Na přednášce jsme ukázali, že rovnice eikonálu platí i v prostředí s proměnným indexem lomu: $n(\vec{r}) \approx \sqrt{\varepsilon_r(\vec{r})}$. Vzali jsme Maxwellovy rovnice v prostředí (7.3)–(7.6), kde opět nastal problém, že po rotaci (7.4) nezmizí $\text{grad div } \vec{E}$, protože permitivita $\varepsilon(\vec{r})$ už není konstantní. To lze však ošetřit tím, že řekneme: „ $\varepsilon(\vec{r})$ se mění velmi pomalu, takže tento nadbytečný člen zanedbáme.“ Máme tedy vlnovou rovnici

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{c^2}{n^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Tuto rovnici si můžeme vzít do parády stejně jako (9.2), takže dostaneme stejnou rovnici eikonálu, ale bude v ní index lomu vystupovat závislý na $\vec{r}$!

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{n^2(\vec{r})}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right)^2. \quad (9.5)$$

Můžeme ji řešit, i když nás zajímá jen tvar trajektorie, nikoli její časový průběh. K tomu známe z TEF1 Jacobiho princip.

Věta 9.2 (Jacobi). *Skutečný pohyb konzervativní mechanické soustavy se děje podél takových trajektorií, které minimalizují či stacionarizují funkcionál*

$$S_0[q] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(E - U)} \, dl = \int_{x_1}^{x_2} p \, dl.$$

Analogem v geometrické optice je **Fermatův princip**

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} k \, dl, \quad (9.6)$$

v nehomogenním prostředí psán jako

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} n \, dl. \quad (9.7)$$

Integrál (9.2) se nazývá **optickou dráhou** paprsku. Fermat tedy říká: *Světlo se šíří podél takového paprsku, jenž minimalizuje (stacionarizuje) optickou dráhu.*

Pět pravidel chodu paprsků:

(1) **Světlo se v homogenním prostředí šíří přímočaře.**

Důkaz. V homogenním prostředí je n konstantní a $\int_{x_1}^{x_2} dl$ tedy představuje délku křivky. My ale víme, že nejkratší křivkou mezi dvěma body je úsečka. $\square$

(2) **Zákon nezávislosti paprsků.** Mám-li paprsek mezi body 1 a 2, pak tvar paprsku mezi body 3 a 4 nijak nezávisí na prvním paprsku.

(3) **Zákon záměnnosti chodu paprsků.** Světlo se z bodu 1 do bodu 2 šíří po stejné křivce jako z bodu 2 do bodu 1.

(4) **Zákon odrazu.** Úhel odrazu je stejný jako úhel dopadu.

(5) **Snellův zákon lomu.**

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2. \quad (9.8)$$

Při přechodu světla z opticky řidšího do opticky hustšího prostředí nastává lom *ke* kolmici. Při přechodu z opticky hustšího do opticky řidšího prostředí pozorujeme lom *od* kolmice.

Poznámka 9.3. Ke Snellovu zákonu se sluší zmínit tzv. *totální (úplný) odraz*. Přechází-li paprsek z opticky hustšího do opticky řidšího prostředí (např. z vody na vzduch), existuje *kritický úhel* ϑ_{1K} , při němž je úhel lomu $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$. To je největší úhel, při němž ještě k lomu dochází. Snellův zákon pak má tvar

$$\sin \vartheta_{1K} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Pro úhly větší než mezní úhel už dochází pouze k odrazu. Na principu totálního odrazu fungují např. optická vlákna.

Poznámka 9.4. Uveďme nejdůležitější hodnoty indexu lomu (budou se hodit v příkladech).

Vakuum	$n = 1$
Vzduch	$n = 1,00026 \approx 1$
Voda	$n = 1,33$
Sklo	$n = 1,5 - 1,9.$

10 Atomová fyzika

10.1 Záření černých těles

Kirchhoffův vyzařovací zákon. Mějme dutinu zahřátou na teplotu T a v ní těleso o stejné teplotě. Vše je v tepelné rovnováze. Ze ZZE se celková intenzita záření z dutiny musí rovnat intenzitě záření, které dopadá na těleso, a záření, jež je odraženo:

$$I = I_R + I_A = (R + A)I \Leftrightarrow R + A = 1.$$

Jelikož i samo těleso emituje záření o intenzitě I_E , pak z termodynamické rovnáhy nutně plyne

$$\begin{aligned} I_A &= I_E \\ AI &= I_E \\ I &= \frac{1}{A} I_E \end{aligned}$$

a odsud **integrální tvar Kirchhoffova zákona**

$$I(T) = \frac{1}{A} I_E(T). \quad (10.1)$$

Kirchhoff postuloval, že intenzity záření nezávisí na vlastnostech tělesa ani dutiny, ale jen na jejich teplotě a frekvenci.

Můžeme zkoumat, jaká část celkové intenzity přísluší konkrétní frekvenci ν .

Definice 10.1. Spektrální hustota $i(\nu)$ říká, kolik wattů prochází jednotkovou plochou v rozsahu jednoho hertzu. $[i(\nu)] = \text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$. Celkovou intenzitu záření ve všech frekvencích lze tedy rozložit

$$I = \int_0^{+\infty} dI(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} i(\nu) d\nu.$$

Nyní lze Kirchhoffův zákon (10.1) psát ve spektrálním tvaru:

$$i(\nu, T) = \frac{1}{A(\nu)} i_E(\nu, T).$$

Říká nám

$$i_E(\nu, T) = A(\nu) i(\nu, T). \quad (10.2)$$

Když najdeš funkci $i(\nu, T)$, budeš schopen určit emisní spektrum i energii tělesa.

Definice 10.2. Absolutně černé těleso (dále jen AČT) je takové těleso, pro jehož koeficient absorpce platí $A(\nu) \equiv 1$. Pohlcuje tedy veškeré dopadající záření a zároveň je ideálním zářičem.

Poznámka 10.3. Například Slunce je velmi dobrým přiblížením AČT. Otvor do vhodně vytvarované dutiny, z níž se záření nedostane, lze též považovat za AČT.

Funkci $i(\nu, T)$ v (10.2) pro AČT našel Max Planck. Je vyjádřena **Planckovým vyzařovacím zákonem**:

$$i(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (10.3)$$

Zde je $i(\nu, T)$ v jednotkách $\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$.¹⁷

Schéma odvození Planckova zákona (umět aspoň trochu):

¹⁷Závislosti na steradiánech se lze zbavit integrací přes půlkouli. Dostaneme celkovou intenzitu záření i_C , které prochází půlkoulí, jež obklopuje elementární plošku dS . Je tedy $i_C(\nu, T) = \pi i(\nu, T)$.

- (1) Vezmeme krabici $L \times L \times L$ s dokonale vodivými stěnami (tečná složka elektrického pole $\vec{E}_t = 0$). Netriviálním způsobem odvodíme celkové pole $\vec{E}$ uvnitř krabice.
- (2) Ukáže se, že z matematického hlediska je pole uvnitř dutiny ekvivalentní soustavě nekonečně mnoha harmonických oscilátorů.
- (3) Kolik oscilátorů vyzařuje v konkrétním spektru EM záření? Spočítáme, že je to

$$dN = L^3 \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (10.4)$$

- (4) Použijeme TSFA. Jelikož je EM záření v termodynamické rovnováze se stěnami o teplotě T , vezmeme harmonické oscilátory „o stejné teplotě“ a spočteme střední hodnotu energie. Zde jsou dvě možnosti.
 - (a) *Klasický přístup* předpokládá, že energetické stavy jsou spojitě rozloženy na intervalu $E_\alpha \in \langle 0, +\infty \rangle$. Tedy

$$\langle E \rangle = k_B T. \quad (10.5)$$

- (b) *Planckova úvaha*. Planck zkusil *ad hoc*¹⁸ předpokládat, že oscilátory mají *diskrétně* rozložené energetické stavy, tj

$$E = nE_0 = nh\nu,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $h\nu$ je jakési základní kvantum energie, v jehož násobcích oscilátory vyzařují. Pro takovou volbu se dá spočítat střední energie oscilátoru jako

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (10.6)$$

- (5) Spočteme celkovou energii pole v dutině v rozsahu frekvencí $\langle \nu, \nu + d\nu \rangle$.

$$dE = L^3 \rho(\nu, T) d\nu = dN \langle E \rangle.$$

kde $\rho(\nu, T)$ je střední spektrální hustota energie. Odsud

$$\rho(\nu, T) = \frac{1}{L^3} \langle E \rangle \frac{dN}{d\nu}.$$

Sem dosadíme z (10.4). Teď máme dvě možnosti pro střední hodnoty energie.

¹⁸Čti: na koleni.

- (a) Za $\langle E \rangle$ dosadíme (10.5). Tato volba vede na **Rayleighův–Jeansův zákon**, také známý jako „ultrafialová katastrofa“:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3}, \quad (10.7)$$

protože kdybychom počítali celkovou energii E , vyjde

$$E = V \int_0^{+\infty} \rho(\nu, T) d\nu = +\infty.$$

- (b) Dosazení střední energie (10.6) konečně vede na Planckův zákon

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \quad (10.8)$$

což je (10.3), neboť $i = \frac{c}{4\pi} \rho$.

Důsledky Planckova zákona

- Pro nízké frekvence je $h\nu \ll k_B T$, takže po rozvoji exponenciály dostaneme

$$i(\nu, T) \approx \frac{2k_B T \nu^2}{c^2} = \frac{c}{4\pi} \rho,$$

což je Rayleighův–Jeansův zákon (10.7). RJZ je tedy nízkofrekvenční limitou Planckova zákona.

- Pro vysoké frekvence ($h\nu \gg k_B T$) dospějeme aproximací k **Wienovu zákonu**¹⁹

$$i(\nu, T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}. \quad (10.9)$$

Wienův zákon je vysokofrekvenční limitou zákona Planckova.

- Intenzitu $dI(\nu, T) = i(\nu, T)d\nu$ lze vyjádřit i v řeči vlnových délek. Nemůžeme však jen tak dosadit vlnovou délku z $\nu = \frac{c}{\lambda}$, protože je třeba vyjádřit i diferenciál $|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$. Poté máme

$$i(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}. \quad (10.10)$$

¹⁹Původně Wien navrhnul tento zákon ve formě $i(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ a postuloval, že neznámá funkce f bude ve tvaru $f(x) = e^{-Bx}$. Tato funkce byla nalezena až později.

- Kde se nachází maximum spektrální hustoty? To vyjadřuje **Wienův posunovací zákon**

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

kde b je konstanta, který říká, že vlnová délka odpovídající záření s největší intenzitou je nepřímo úměrná teplotě T . Hledejme tedy $\lambda_{\max}$. Derivací (10.10) podle λ dojdeme k výrazu

$$5 = \frac{x e^x}{e^x - 1},$$

z něhož lze $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ získat speciální, Lambertovou funkcí W ($x \approx 4,97$). Dostáváme $\lambda_{\max} T = b \approx 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ K m}$.

Poznámka 10.4. Wienův posunovací zákon říká, že vrcholy grafů intenzit příslušných určité teplotě T leží na rovnosé hyperbole. Tyto vrcholy se s rostoucí teplotou *sunou* směrem ke kratším vlnovým délkám, tj. k ultrafialové části spektra.

Vrchol křivky příslušné teplotě $T = 5000 \text{ K}$ (povrch našeho Slunce) leží v oblasti viditelného světla.

Stefanův–Boltzmannův zákon. Popisuje *celkovou* intenzitu záření AČT. Tato intenzita roste se čtvrtou mocninou teploty T .

$$I = \sigma T^4, \quad (10.11)$$

kde σ je Stefanova–Boltzmannova konstanta. Tento zákon dostaneme naintegrovaním (10.3) přes všechny frekvence.

$$I(T) = \int_0^{+\infty} i_C(\nu, T) d\nu = \pi \int_0^{+\infty} i(\nu, T) d\nu = \dots = \underbrace{\frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\sigma} T^4,$$

substituce $x = \frac{h\nu}{k_B T}$. Hodnota integrálu je $\frac{\pi^4}{15}$, takže

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

10.2 Fotoefekt

Fotoefekt je jev, při němž jsou z osvětlené elektrody uvolňovány elektrony a emitovány jako „fotoelektrony“. Měříme procházející proud v závislosti na přivedeném napětí. Světlo vyráží elektrony, které se uvolní s jistou kinetickou energií $= \frac{1}{2}mv^2$. Pro $E_k < eU$ proud neteče, protože vyražený elektron už nepřekoná napětí, aby přeletěl na druhou elektrodu.

- *Klasické vysvětlení* očekávalo, že elektron je vyražen EM vlnou. Mělo se za to, že energie předaná elektronu musela překročit vazebnou energii W a že závisela pouze na amplitudě EM vlny (světla).

Klasické vysvětlení však bylo v rozporu s experimenty, neboť se zjistilo, že uvolnění elektronu

- nezávisí na amplitudě světla.
- závisí pouze na frekvenci. Je-li $\nu < \nu_0$, k žádnému vyražení elektronu nedojde.

Toto nelze vysvětlit vlnovou podstatou světla!

- *Einstein (1905)* vzal v úvahu, že světlo je tvořeno *částicemi* s energií $E = h\nu$. Přišel s rovnicí fotoelektrického děje. Je-li kmitočet světla ν_0 dostatečně vysoký, aby překonal vazebnou (ionizační) energii $W = h\nu_0$, je elektron vyražen s kinetickou energií

$$E_k = h\nu - W.$$

Přesnou hodnotu Planckovy konstanty h změřil až Millikan (1916).

10.3 Fotony jako částice

Energie relativistické částice.

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2. \quad (10.12)$$

Hybnost fotonu.

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c}. \quad (10.13)$$

10.4 Comptonův rozptyl

Dochází při něm k interakci EM vln s elektrony v látce. EM vlna předá část své energie (ne všechnu jako u fotoefektu) a v důsledku se změní její frekvence. Uvažujme elektron v klidu a v počátku. Narazí do něj foton s frekvencí ν , odráží se s frekvencí ν' pod úhlem ϑ . Po použití ZZE, resp. ZZH,

$$\begin{aligned} E_e + E_f &= E'_e + E'_f \\ p_f + 0 &= p'_f + p'_e, \end{aligned}$$

rovnice pro energii a hybnost fotonu a elektronu a vztahů (10.12), (10.13) jsme odvodili frekvenci fotonu po srážce s elektronem:

$$\nu'(\vartheta) = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu(1-\cos\vartheta)}{m_e c^2}}. \quad (10.14)$$

Tento experiment zásadním způsobem změnil pohled tehdejší fyziky na vlnění. Bylo tím dokázáno, že se foton (do té doby považovaný za vlnění) chová i jako částice. Později přišel Louis de Broglie s odvážnou myšlenkou: Když se může foton chovat jako částice, proč by se nemohly i ostatní částice chovat jako vlny?

De Broglieho hypotéza byla později experimentálně potvrzena a Nobelova cena za objev dualismu částic ho neminula.

10.5 Vzorce a konstanty atomové fyziky

Rychlost světla	$c = 299\,792\,458\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Planckova konstanta	$h = 6,626\,070\,150 \cdot 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s}$
Boltzmannova konstanta	$k_B = 1,380\,649\,035 \cdot 10^{-23}\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
Elementární náboj	$e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$
Hmotnost protonu	$m_p = 1,672\,621\,898 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$
Hmotnost elektronu	$m_e = 9,109\,383\,561 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$
Hmotnost neutronu	$m_n = 1,674\,927\,471 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$
Elektronvolt	$1\,\text{eV} = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$
de Broglieho veličiny	$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E}$ $\nu = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}$ $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = mv$
Energie relat. částice	$E^2 = m_0^2 c^4 + m^2 p^2 = (E_0 + E_K)^2$
Energie fotonu	$E = h\nu$
Rovnice fotoefektu	$h\nu = h\nu_0 + E_k$

Poznámka 10.5. Na podzim 2018 byly v rámci redefinice kilogramu konstanty h , k_B a e stanoveny *přesně* na hodnoty uvedené výše.

Poznámka 10.6. Kdy je třeba počítat kinetickou energii relativistickou cestou a kdy postačí newtonovská $E = \frac{1}{2}mv^2$? Dobré je porovnat hodnoty kinetické energie a klidové energie. Je-li $E_K \ll E_0$, není relativistický efekt

tak silný a bohatě si vystačíme s klasickým vzorcem. Pokud už E_K není zanedbatelná, musíme počítat energii následovně (nebo podle (10.12)):

$$E = E_0 + E_K = m_0c^2 + mc^2 = m_0c^2 + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (1 + \gamma)m_0c^2 = (1 + \gamma)E_0.$$