

Útržky z VOAFu

Josef Schmidt¹

23. září 2019

¹schmijos@fjfi.cvut.cz

Tento materiál slouží jako podklad pro sledování přednášky z předmětu 02VOAF na FJFI ČVUT v Praze.

Obsah

1	Kmity soustav s konečným počtem stupňů volnosti	5
1.1	Harmonický oscilátor	5
1.2	Matematická vsuvka: Komplexní čísla a exponenciála	5
1.3	Matematická vsuvka: Obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty	7
1.4	Matematická vsuvka: Střední hodnoty	8
1.5	Tlumený harmonický oscilátor	9
1.6	Buzený harmonický oscilátor	9
1.7	Kmity soustav s n stupni volnosti	12
1.7.1	Aproximace malých kmitů	13
1.7.2	Metoda módů	14
1.7.3	Kuchařka	15
1.8	Normální souřadnice	16
1.9	Malé kmity teoreticky	18
1.10	Tlumené malé kmity	20
1.11	Buzené malé kmity	21

Kapitola 1

Kmity soustav s konečným počtem stupňů volnosti

1.1 Harmonický oscilátor

Systém popsaný rovnicí harmonického oscilátoru,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.1)$$

je nejjednodušším systémem vykazující kmitavý pohyb. Tento matematický model slouží k více či méně přesnému popisu řady fyzikálních systémů. Například pro popis kmitání závaží hmotnosti m na pružině tuhosti k ,

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.2)$$

anebo pro popis pohybu matematického kyvadla v blízkosti rovnovážné polohy,

$$ml\ddot{\varphi} + mg\varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (1.3)$$

či pro popis průběhu proudu v LC obvodu,

$$L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1.4)$$

Různé fyzikální systémy tedy vedou na stejný matematický popis jejich chování. To je charakteristické pro celou řadu vlnových jevů, kterými se budeme zabývat. Typicky budeme uvažovat nějaký konkrétní fyzikální systém, často mechanický, vytvoříme jeho matematický model a budeme zkoumat vlnové jevy, které z něho plynou. Získané poznatky pak budou mít obecnou platnost pro jakýkoliv systém chovající se dle stejného matematického modelu.

1.2 Matematická vsuvka: Komplexní čísla a exponenciála

Komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ je číslo tvaru $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je komplexní jednotka s vlastností $i^2 = -1$. Sčítání a násobení těchto čísel je definováno „přirozeným způsobem“.

Komplexně sdružené číslo $\bar{z}$ je číslo $\bar{z} = a - ib$. Platí vzorec $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. Velikost komplexního čísla je definována jako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, tento výraz je možno zapsat jako $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Reálná a imaginární část. Definujeme funkce $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ zvané reálná a imaginární část pomocí předpisů

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b$$

(pozor, imaginární část neobsahuje komplexní jednotku!). Pokud je reálná část nulová, nazveme číslo *ryze komplexním*. Funkce Re a Im jsou *reálně* lineární, tzn. platí

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2, \quad \operatorname{Re}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Re} z, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

stejně pro Im . Pozor, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) \neq (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2)$ (stejně pro Im). Tyto funkce lze jednoduše vyjádřit pomocí komplexního sdružení:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2}.$$

Komplexní exponenciála. Uvažujme $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Definujeme komplexní exponenciálu následující vztahem:

$$e^z := e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Speciální případ pro $a = 0$,

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b, \quad b \in \mathbb{R},$$

se nazývá Eulerův vzorec¹. Platí $|e^{ib}| = 1$ a můžeme tedy psát $|e^z| = e^a$.

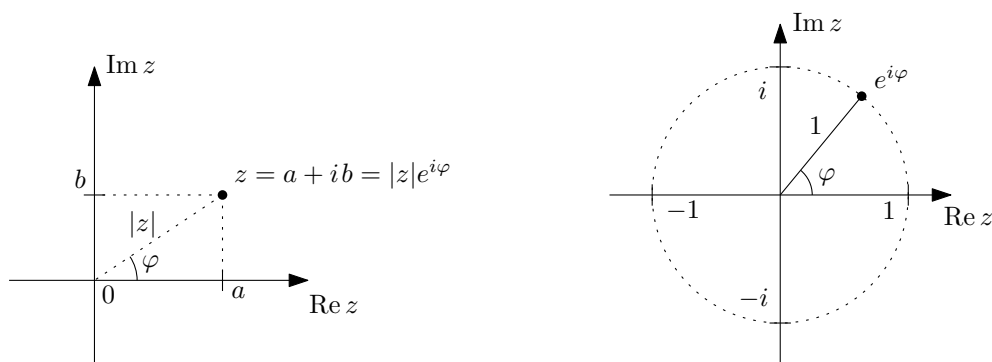
Goniometrický tvar komplexního čísla. Každé komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ můžeme zapsat ve tvaru $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Číslo φ říkáme *argument* komplexního čísla (toto číslo není dané jednoznačně, lze přičíst libovolný celočíselný násobek 2π). Argument φ je řešením rovnic

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Tyto rovnice se často formálně² sdružují do rovnice

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}.$$

Gaussova (komplexní) rovina. Komplexní čísla můžeme reprezentovat jako body (dvourozměrné) roviny, kde kartézské osy tvoří reálná a imaginární část komplexních čísel, viz obrázek 1.1.



(a) Kartézská a goniometrická reprezentace komplexního čísla z znázorněná v Gaussově rovině.

(b) Jednotková kružnice v Gaussově rovině tvořená komplexními čísly tvaru $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Obrázek 1.1: Gaussova rovina slouží ke grafickému znázornění komplexních čísel, kde na vodorovnou osu vynášíme reálnou část a na svislou osu imaginární část.

¹Jehož speciálním případem je „nejkrásnější matematická identita“ $e^{i\pi} = -1$.

²V tomto zápisu ztrácíme informaci o tom, zda $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ anebo $\varphi \in \langle \pi, 2\pi \rangle$.

Sčítání komplexních čísel má pak geometrický význam sčítání dvourozměrných vektorů v Gaussově rovině. Číslo $e^{i\varphi}$ představuje číslo na jednotkové kružnici. Intuitivní představa o násobení komplexních čísel se získá z goniometrického zápisu:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Násobení číslem $e^{i\varphi}$ tedy představuje rotaci o úhel φ v komplexní rovině. Násobení číslem $|z|$ představuje škálování v této rovině.

Komplexní zápis goniometrických funkcí. Z Eulerova vzorce přímo plynou následující vztahy:

$$\cos \varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

1.3 Matematická vsuvka: Obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme následující diferenciální rovnici pro funkci $x(t)$

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0, \quad (1.5)$$

kde koeficienty $a_i \in \mathbb{R}$ jsou reálné konstanty, $a_n \neq 0$. Řešení hledějme ve tvaru $x(t) = e^{\lambda t}$. Po dosazení do (1.5) (a vykrácení $e^{\lambda t}$) obdržíme tzv. *charakteristický polynom* této rovnice

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda_{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (1.6)$$

Nechť λ je kořen tohoto polynomu s *reálnými koeficienty*, pak i $\bar{\lambda}$ je kořen. Tzn. buď je $\lambda \in \mathbb{R}$ anebo jsou kořeny komplexně sdružená dvojice $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$.

Pokud jsou všechny kořeny navzájem různé (mají násobnost jedna) dostáváme tzv. *fundamentální systém řešení*

$$\left\{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \right\}, \quad (1.7)$$

jelikož je polynom (1.6) stupně n , máme n fundamentálních řešení³.

Princip superpozice. Je-li $x_1(t)$, $x_2(t)$ řešení rovnice (1.5), pak je řešením i $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$, kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty (obecně komplexní).

Obecné řešení rovnice (1.5) je obecná komplexní lineární kombinace fundamentálních řešení:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}. \quad (1.8)$$

Komplexní a reálná řešení. Je-li $x(t)$ řešení rovnice (1.5), pak je řešením i $\bar{x}(t)$, $\operatorname{Re} x(t)$ a $\operatorname{Im} x(t)$. Pokud tedy máme komplexní fundamentální řešení (příslušné komplexně sdruženým kořenům $\lambda = a + ib, \bar{\lambda} = a - ib$) $e^{\lambda t}$ a $e^{\bar{\lambda} t}$, můžeme přejít k reálným fundamentálním řešením:

$$\operatorname{Re} e^{\lambda t} = \frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}}{2} = e^{at} \cos bt, \quad \operatorname{Im} e^{\lambda t} = \frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}}{2i} = e^{at} \sin bt. \quad (1.9)$$

Toto je ekvivalentní restrikcí komplexních integračních konstant podmínkou $c_2 = \bar{c}_1$ v lineární kombinaci $c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\bar{\lambda} t}$.

Obecné reálné řešení je pak reálnou lineární kombinací reálných fundamentálních řešení.

³Pokud je λ kořen s násobností k , pak tomuto kořenu přísluší k fundamentálních řešení tvaru

$$\{e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}\}.$$

Počáteční podmínky. Obecné řešení obyčejné diferenciální rovnice n -tého řádu (tzn. nejvyšší obsažená derivace je n -tého řádu) je závislé na n integračních konstantách. Tyto se určují z počátečních podmínek. Typicky zadáním hodnot nulté až $n - 1$ derivace v daném čase t_0 :

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.10)$$

Nehomogenní rovnice. Obecné řešení, které jsme napsali, bylo řešení tzv. *homogenní rovnice* – rovnice s nulovou pravou stranou. Pokud na pravou stranu přidáme zadanou funkci $f(t)$,

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(t), \quad (1.11)$$

hovoříme o tzv. *nehomogenní rovnici*. Řešení nehomogenní rovnice se z linearity dá rozdělit na dvě části:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t). \quad (1.12)$$

Část $x_{\text{hom}}(t)$ je řešení původní rovnice s nulovou pravou stranou. Část $x_{\text{part}}(t)$ je libovolné (konkrétní) řešení splňující rovnici s pravou stranou (1.11), funkci $x_{\text{part}}(t)$ nazýváme *partikulární řešení*.

Harmonický oscilátor. Pro rovnici harmonického oscilátoru (1.1) je charakteristický polynom tvaru

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (1.13)$$

s kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ a fundamentálním systémem řešení

$$\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}. \quad (1.14)$$

Obecné komplexní řešení je tedy tvaru

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}. \quad (1.15)$$

K reálnému řešení přejdeme aplikací Re a Im na jedno z řešení (např. $e^{i\omega t}$) anebo restrikcí konstant c_1 a c_2 podmínkou $c_1 = \bar{c}_2 = \frac{a-ib}{2}$:

$$x(t) = a \text{Re} e^{i\omega t} + b \text{Im} e^{i\omega t} = a \cos \omega t + b \sin \omega t = \frac{1}{2}(a - ib)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(a + ib)e^{-i\omega t}. \quad (1.16)$$

Počáteční podmínky vedoucí na konkrétní řešení jsou obvykle počáteční poloha a počáteční rychlost v čase $t = 0$:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (1.17)$$

1.4 Matematická vsuvka: Střední hodnoty

Mějme funkci $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Její střední hodnota v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ je definována jako

$$\langle f \rangle_{\langle x_1, x_2 \rangle} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Lze definovat střední hodnotu přes celé $\mathbb{R}$ limitním přechodem

$$\langle f \rangle \equiv \langle f \rangle_{\langle -\infty, \infty \rangle} = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{1}{2x'} \int_{-x'}^{x'} f(x) dx.$$

Pokud je funkce f periodická s periodou L , je její střední hodnota dána jako střední hodnota přes libovolný interval délky L :

$$\langle f \rangle = \langle f \rangle_{\langle x, x+L \rangle} = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} f(x') dx', \quad \text{kde } x \in \mathbb{R} \text{ je libovolné.}$$

Platí

$$\langle \sin \omega t \rangle = \langle \cos \omega t \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}. \quad (1.18)$$

1.5 Tlumený harmonický oscilátor

Rovnice harmonického oscilátoru s tlumením je

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.19)$$

Někdy se zavádí označení $\Gamma = 2\delta$, kde δ je tzv. *dekrement útlumu*. Předpokládáme řešení tvaru $x(t) = e^{\lambda t}$, charakteristický polynom je pak tvaru

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.20)$$

Uvažujeme-li malé (tzv. *podkritické*) tlumení $\delta < \omega_0$, potom řešením (1.20) je dvojice komplexně sdružených kořenů

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (1.21)$$

Výsledné komplexní a reálné řešení tedy je

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}), \quad x(t) = e^{-\delta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t), \quad (1.22)$$

kde jsme definovali $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

1.6 Buzený harmonický oscilátor

Rovnici buzeného harmonického oscilátoru získáme přidáním budící síly na pravou stranu rovnice tlumeného oscilátoru:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B(t) \quad (1.23)$$

Uvažujeme harmonickou budící „sílu“⁴ $B(t) = B \cos(\Omega t)$, resp. její komplexní tvar

$$\hat{B}(t) = B e^{i\Omega t}, \quad B \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

Hledejme pouze partikulární řešení této rovnice, které bude představovat ustálený stav kmitání buzeného harmonického oscilátoru. Vzhledem ke komplexifikaci budící síly bude toto řešení také komplexní. Pokud vezmeme jeho reálnou část, dostaneme řešení pro původní reálnou budící sílu. Předpokládejme řešení ve tvaru

$$\hat{x}(t) = A e^{i\Omega t}, \quad (1.25)$$

kde $A \in \mathbb{C}$. Můžeme psát číslo A v goniometrickém tvaru, $A = |A|e^{-i\varphi}$, a tedy

$$\hat{x}(t) = |A|e^{i(\Omega t - \varphi)}, \quad (1.26)$$

kde $|A|$ představuje amplitudu vynucených kmitů a φ je fázové zpoždění kmitů za budící silou.

Po dosazení našeho *ansatzu* (1.25) do rovnice (1.23) dostaneme

$$A(i\Omega)^2 + 2\delta A(i\Omega) + \omega_0^2 A = B, \quad (1.27)$$

z tohoto vztahu triviálně vyjádříme komplexní amplitudu A :

$$A = \frac{B}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\delta\Omega}. \quad (1.28)$$

⁴Slovo síla je v uvozovkách, jelikož veličina $B(t)$ má rozměr zrychlení, jelikož v diferenciální rovnici máme osamostatněn člen $\ddot{x}$.

Amplituda vynucených kmitů $|A|$ je

$$|A| = \sqrt{A\bar{A}} = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}. \quad (1.29)$$

Dále označíme C a $-D$ jako reálnou a imaginární část A , $A = C - iD$. Výraz pro A rozšíříme komplexně sdruženým jmenovatelem a obdržíme

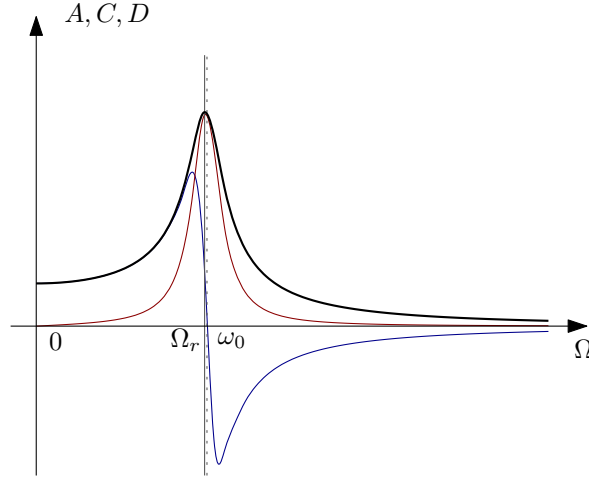
$$A = B \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} = C - iD. \quad (1.30)$$

Nyní snadno zapíšeme koeficienty C a D :

$$C = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} B, \quad D = \frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} B. \quad (1.31)$$

Koeficient C se nazývá *elastická amplituda* a koeficient D *absorpční amplituda*. Reálné řešení je pak tvaru

$$x(t) = \text{Re} [\hat{x}(t)] = \text{Re} [(C - iD)e^{i\Omega t}] = |A| \cos(\Omega t - \varphi) = C \cos \Omega t + D \sin \Omega t. \quad (1.32)$$



Obrázek 1.2: Na obrázku jsou znázorněny rezonanční křivky harmonického oscilátoru buzeného harmonickou budící silou. Černě je zobrazena celková amplituda A , červeně absorpční amplituda D , modře elastická amplituda C . Maximum amplitudy A je označeno $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega_0$.

Pro fázové zpoždění vybuzených kmitů máme vztah

$$\text{tg}(-\varphi) = \frac{-D}{C} \quad \rightarrow \quad \text{tg} \varphi = \frac{D}{C} = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1.33)$$

Výkon dodávaný budící silou. Proč mají koeficienty C a D název elastická a absorpční amplituda? Studujme výkon, který do systému dodává budící síla. Nechť je uvažovaný fyzikální systém kmitajícího závaží na pružině s tlumením. Okamžitá hodnota mechanického výkonu je $P(t) = F(t)v(t)$, kde $F(t) = mB(t)$. Po dosazení výrazů pro $B(t)$ a $v(t)$ máme

$$P(t) = F(t)v(t) = mB \cos \Omega t (-C\Omega \sin \Omega t + D\Omega \cos \Omega t). \quad (1.34)$$

Pokud nyní spočteme časovou střední hodnotu tohoto výkonu (přes jednu periodu) dostaneme výsledek

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m B \Omega D. \quad (1.35)$$

Časová střední hodnota dodávaného výkonu je tedy úměrná pouze absorpční amplitudě D . Výkon odpovídající elastické amplitudě C se pouze přelévá ze zdroje budící síly do buzeného systému a zpět tak, že v průměru nedochází k přenosu energie. Chceme-li do systému dodávat co nejvíce energie, budíme systém na frekvenci, která odpovídá maximu absorpční amplitudy C .

Celková energie oscilátoru. Okamžitá hodnota energie oscilátoru je dána součtem jeho kinetické a potenciální energie:

$$E(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x(t)^2 = \frac{1}{2}m|A|^2 (\Omega^2 \sin^2(\Omega t - \alpha) + \omega_0^2 \cos^2(\Omega t - \alpha)). \quad (1.36)$$

Pokud opět vypočteme časovou střední hodnotu přes jednu periodu získáme

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4}m|A|^2 (\Omega^2 + \omega_0^2). \quad (1.37)$$

Vidíme tedy, že celková energie je úměrná celkové amplitudě kmitání. Chceme-li naakumulovat co největší energii v oscilátoru (jev rezonance), budíme systém na frekvenci, která odpovídá maximu celkové amplitudy $|A|$.

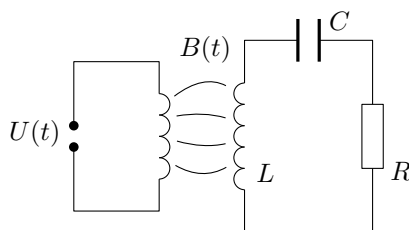
Maximum amplitudy $|A|$ se nachází v bodě $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, přibližná hodnota maxima amplitudy C je v bodě⁵ $\Omega_C \approx \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Pro malé hodnoty tlumení δ můžeme uvažovat $\Omega_A \approx \Omega_C \approx \omega_0$.

Faktor kvality (činitel jakosti). Často se zavádí veličina tzv. faktoru kvality,

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle T_0} = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle E_0 \rangle}, \quad (1.38)$$

která (až na násobek 2π) udává, kolika násobek energie dodané za jednu periodu kmitání $\langle E_0 \rangle$ je uloženo v kmitajícím systému.

Příklad. Bezdrátové nabíjení. Schéma bezdrátového nabíjecího obvodu je na obrázku 1.3. Budící síla je vytvářena nabíjecí stanicí s vysílací cívkou, která vlivem vzájemné indukčnosti budí napětí v cívkě L v nabíjecím RLC obvodu. Odpor R reprezentuje nabíjený spotřebič. Vyladěním budící frekvence napětí $U(t)$ do blízkosti rezonance v nabíjecím obvodu způsobí nejen největší přenos energie (maximum absorpční amplitudy C) ale také největší amplitudu napětí v nabíjecím obvodu (maximum celkové amplitudy $|A|$).



Obrázek 1.3: Princip bezdrátového nabíjení.

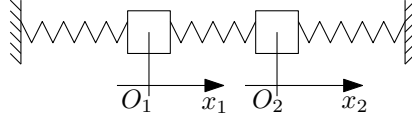
⁵Přesná hodnota je daná řešením rovnice $\frac{dC}{d\Omega} = 0$ s výsledkem

$$\Omega_C = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2 + 2\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2\omega_0^2 + \delta^4}}}{\sqrt{3}}.$$

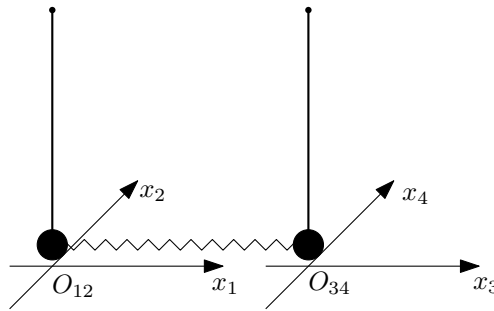
1.7 Kmity soustav s n stupni volnosti

Přejdeme nyní k soustavám s více stupni volnosti. Harmonický oscilátor měl jeden stupeň volnosti – jeho poloha byla popsána jedinou souřadnicí x . Pro systém s n stupni volnosti popíšeme jeho polohu kartézskými souřadnicemi $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Opět budeme uvažovat jednoduché mechanické modely jako například systém dvou závaží na pružinách jako na obrázku 1.4 popsaný dvojicí souřadnic $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Anebo dvojicí kyvadel spojenou pružinou jako na obrázku 1.5 vyžadující čtyři souřadnice $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.



Obrázek 1.4: Dvě podélně kmitající závaží na pružinách.



Obrázek 1.5: Dvě kyvadla spojená pružinou.

Uvažujme Newtonovy pohybové rovnice obecného systému tvaru

$$m_i \ddot{x}_i = F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (1.39)$$

kde m_i je vždy hmotnost tělesa příslušná souřadnici x_i a kde síly v systému jsou popsané potenciální funkcí $U(x_1, \dots, x_n)$.

Budeme se zabývat pohybem (tzn. řešením pohybových rovnic) těchto soustav v okolí *stabilní rovnovážné polohy*.

Definice. *Rovnovážná poloha* je taková poloha $\vec{x}_0$ systému, pro níž platí $F_i(\vec{x}_0) = 0$ pro $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, tzn. v této poloze nepůsobí žádné síly (byl-li systém v bodě $\vec{x}_0$ v klidu, tak na této pozici setrvá nadále). Síly jsou nulové právě tehdy, když má potenciál v bodě $\vec{x}_0$ *stacionární bod*, tzn.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.40)$$

Definice. *Stabilní rovnovážná poloha* je taková rovnovážná poloha, kde je matice

$$\mathbb{U} := \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \quad (1.41)$$

pozitivně definitní. Jinými slovy má potenciál v bodě $\vec{x}_0$ *lokální minimum*. Ze záměnnosti parciálních derivací je tato matice symetrická $\mathbb{U}_{ij} = \mathbb{U}_{ji}$.

Metoda na řešení pohybových rovnic, která bude popsána níže, má jeden technický požadavek – je třeba, aby rovnovážná poloha ležela v počátku souřadnic. Toho docílíme zavedením nových

souřadnic $\vec{\xi}$ substitucí $\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{x}_0$, kde $\vec{x}_0$ jsou konstantní souřadnice zvolené stabilní rovnovážné polohy. Dosazením této substituce do rovnic (1.39) máme na levé straně triviálně

$$m_i \ddot{x}_i = m_i \frac{d^2}{dt^2} (\xi_i + x_{0i}) = m_i \ddot{\xi}_i. \quad (1.42)$$

Na pravé straně musíme provést substituci ve funkci potenciálu $U(\vec{x})$:

$$\tilde{U}(\vec{\xi}) := U \circ \vec{x}(\vec{\xi}) = U(\vec{\xi} + \vec{x}_0), \quad (1.43)$$

kde jsme definovali novou funkci $\tilde{U}$ proměnných $\vec{\xi}$. Inverzní vztah je $U(\vec{x}) = \tilde{U}(\vec{x} - \vec{x}_0)$, po derivaci této rovnosti (kde na pravé straně máme derivaci složené funkce) dostaneme (s využitím Einsteinova sumačního pravidla)

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_j} \delta_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i}. \quad (1.44)$$

Pohybová rovnice má tedy stejný tvar jako v původních souřadnicích $\vec{x}$:

$$m_i \ddot{\xi}_i = - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i}. \quad (1.45)$$

1.7.1 Aproximace malých kmitů

Pro obecný potenciál mohou být rovnice (1.45) velmi obtížně řešitelné. My se uchýlíme k aproximaci tzv. *malých kmitů* – budeme studovat chování systému v blízkosti rovnovážné polohy. Toho docílíme rozvojem funkce potenciálu $\tilde{U}$ do Taylorovy řady⁶ (okolo rovnovážné polohy, tedy okolo bodu $\vec{\xi} = 0$) a ponecháme si pouze první nenulový člen.

$$\tilde{U}(\vec{\xi}) = \tilde{U}(0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i} \right|_{\vec{\xi}=0} \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{\vec{\xi}=0} \xi_i \xi_j + \dots \quad (1.46)$$

Zkoumejme nyní jednotlivé řády rozvoje. Nultý řád představuje hodnotu potenciálu v rovnovážné poloze $U_0 = \tilde{U}(0)$. Tuto můžeme volit nulovou, $U_0 := 0$, jelikož posun potenciálu o konstantu nijak nevstupuje do pohybových rovnic. Derivace v prvním řádu představuje (minus) sílu vyčíslenou v rovnovážné poloze,

$$F_i(0) = - \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i} \right|_{\vec{\xi}=0}, \quad (1.47)$$

ale ta je z definice rovnovážné polohy nulová! První nenulový řád je tedy ten druhý. Označíme-li matici $\mathbb{U}$ jako

$$\mathbb{U}_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{\vec{\xi}=0} \quad (1.48)$$

(což je konstantní číselná matice), kterou budeme nazývat *maticí potenciální energie*, můžeme potenciál $\tilde{U}$ psát ve tvaru

$$\tilde{U}(\vec{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{U}_{ij} \xi_i \xi_j + \dots, \quad (1.49)$$

⁶Srovnej s Taylorovým rozvojem funkce jedné proměnné! Pro funkci $f(x)$ okolo bodu 0 má následující tvar:

$$f(x) = f(0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \dots$$

kde třemi tečkami naznačujeme vyšší řády Taylorova rozvoje, které v aproximaci *malých kmitů* zanedbáváme. Matice $\mathbb{U}$ je vlivem záměnnosti parciálních derivací symetrická, $\mathbb{U}_{ij} = \mathbb{U}_{ji}$. Libovolně složitou funkci potenciálu $\tilde{U}$ jsme nahradili kvadratickým polynomem ve výchylkách z rovnovážné polohy $\vec{\xi}$.

Dosaďme nyní aproximovaný potenciál (1.49) do pravé strany pohybových rovnic (1.47) a upravujeme (za použití Einsteinova sumačního pravidla):

$$-F_i = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{2} \mathbb{U}_{jk} \xi_j \xi_k \right) = \frac{1}{2} \mathbb{U}_{jk} (\delta_{ij} \xi_k + \xi_j \delta_{ik}) = \frac{1}{2} (\mathbb{U}_{ik} \xi_k + \mathbb{U}_{ji} \xi_j) = \mathbb{U}_{ij} \xi_j, \quad (1.50)$$

kde jsme v poslední rovnosti použili symetrii matice $\mathbb{U}$ (a přejmenování sčítacího indexu). Aproximací potenciálu jsme docílili toho, že jsou pohybové rovnice *lineární*!

$$m_i \ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^n \mathbb{U}_{ij} \xi_j = 0. \quad (1.51)$$

Zavedeme-li ještě matici $\mathbb{T} = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, kterou budeme nazývat *maticí kinetické energie*⁷, můžeme psát

$$\sum_{j=1}^n (\mathbb{T}_{ij} \ddot{\xi}_j + \mathbb{U}_{ij} \xi_j) = 0,$$

nebo zapsáno maticově

$$\boxed{\mathbb{T} \ddot{\vec{\xi}} + \mathbb{U} \vec{\xi} = 0.} \quad (1.52)$$

Toto je finální tvar⁸ pohybových rovnic, které nyní budeme řešit. Matice $\mathbb{T}$ a $\mathbb{U}$ jsou symetrické pozitivně definitní konstantní matice.

1.7.2 Metoda módů

Intuitivně očekáváme, že při malém vychýlení systému ze stabilní rovnovážné polohy bude systém okolo této polohy oscilovat. Zkusme předpokládat řešení obsahující harmonické kmitání $e^{i\omega t}$ (pro zatím neurčenou úhlovou frekvenci ω). Uvažujme vektorovou funkci tvaru

$$\vec{\xi}(t) = \vec{a} e^{i\omega t}, \quad (1.53)$$

kde $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ je konstantní vektor. Tomuto tvaru řešení se říká *mód*. Všechny části systému kmitají se stejnou úhlovou frekvencí ω a se stejnou fází. Reálná řešení pak dostaneme např. zapůsobením Re a Im na získané komplexní řešení. Dosazením do rovnic (1.52) dostaneme

$$(\mathbb{T} \vec{a} (i\omega)^2 + \mathbb{U} \vec{a}) e^{i\omega t} = 0. \quad (1.54)$$

Po úpravě a vykrácení $e^{i\omega t}$:

$$(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}) \vec{a} = 0. \quad (1.55)$$

Samozřejmě požadujeme netriviální (nenulové) řešení, takže hledáme takové frekvence ω , aby úloha měla za řešení nenulový vektor $\vec{a}$. Pokud rovnici vynásobíme $\mathbb{T}^{-1}$ a označíme $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1} \mathbb{U}$ a $\lambda = \omega^2$, dostaneme tvar

$$(\mathbb{A} - \lambda) \vec{a} = 0. \quad (1.56)$$

⁷Kinetickou energii systému můžeme psát jako

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\xi}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{T}_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j.$$

⁸Ještě bychom rovnice mohli vynásobit $\mathbb{T}^{-1}$ a dostat tvar $\ddot{\vec{\xi}} + (\mathbb{T}^{-1} \mathbb{U}) \vec{\xi} = 0$.

Jedná se tedy o úlohu nalezení vlastních čísel a k nim příslušných vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$. Postupujeme tedy stejně jako v lineární algebře. Požadavek nenulovosti vektoru $\vec{a}$ je požadavek na nenulovost jádra operátoru $\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}$, který je ekvivalentní s jeho singularností, kterou snadno zajistíme nulovým determinantem:

$$\det(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}) = 0. \quad (1.57)$$

Této rovnici se říká *sekulární rovnice*. Na levé straně je polynom n -tého stupně v proměnné ω^2 . Kořeny tohoto polynomu označme ω_k^2 , $k \in \{1, \dots, n\}$. Příslušné vektory jádra k těmto vlastním číslům označíme $\vec{a}_k$, tzn. řešíme rovnice

$$(\mathbb{U} - \omega_k^2 \mathbb{T}) \vec{a}_k = 0. \quad (1.58)$$

Pro daný mód je obecným řešením lineární superpozice

$$\vec{\xi}_k(t) = \vec{a}_k (c_1 e^{i\omega_k t} + c_2 e^{-i\omega_k t}). \quad (1.59)$$

Přejdeme-li k reálnému řešení (volbou $c_2 = \bar{c}_1$):

$$\vec{\xi}_k(t) = A \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi). \quad (1.60)$$

Obecné řešení nalezené metodou módů je pak lineární superpozice všech módů:

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{k=1}^n A_k \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (1.61)$$

Konstanty úhlových rychlostí ω_k a vektorů amplitud $\vec{a}_k$ jsou dané fyzikálním systémem, tzn. například hmotnostmi jednotlivých závaží a tuhostmi jednotlivých pružin. Integrační konstanty amplitudy módů A_k a fázových posuvů φ_k jsou dané počátečními podmínkami, tzn. například počátečními polohami a rychlostmi jednotlivých závaží.

Jelikož hledáme kořeny tvaru ω^2 , potřebujeme, aby tyto vycházely kladné. To je zajištěno, pokud jsou matice $\mathbb{T}$ a $\mathbb{U}$ pozitivně definitní. Pro fyzikální systémy, které vychylujeme ze stabilní rovnovážné polohy, je toto vždy splněno.

Může se stát, že některé ω_k je násobným kořenem sekulární rovnice. Pak se jedná o tzv. degenerovanou úlohu. Nestane se ovšem nic jiného než to, že příslušné úhlové frekvenci ω_k přísluší více lineárně nezávislých vektorů poměrů amplitud $\vec{a}$ (tzn. pro dané ω_k je jádro matice $\mathbb{U} - \omega_k^2 \mathbb{T}$ vícedimenzionální).

1.7.3 Kuchařka

Rychle zopakujme kroky, kterými se dostaneme k obecnému řešení metodou módů.

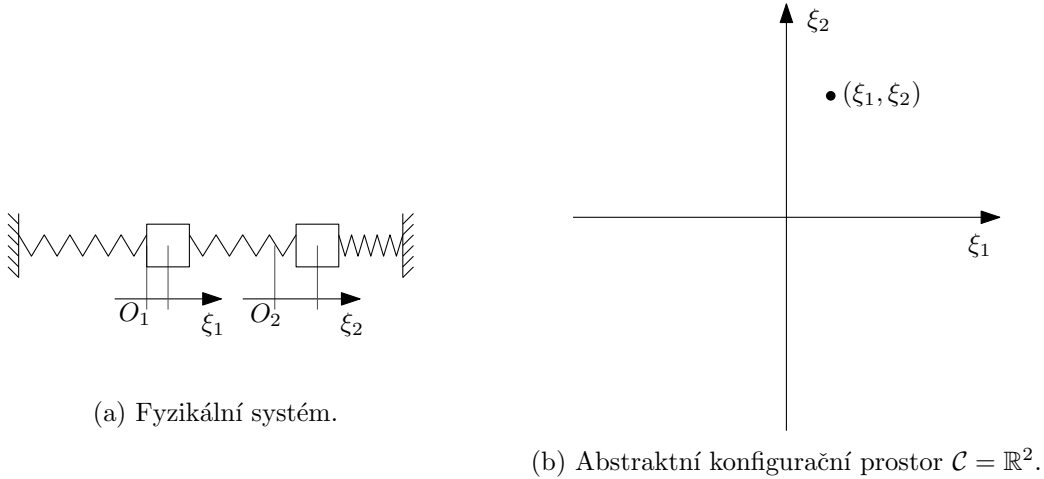
1. Zavedu souřadnice $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, které odměřují výchylku z rovnovážné polohy.
2. Napíši pohybové rovnice ve tvaru $\mathbb{T}\ddot{\vec{\xi}} + \mathbb{U}\vec{\xi} = 0$, kde $\mathbb{T}, \mathbb{U} \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou symetrické konstantní matice. Pokud nutno, použiji aproximaci malých kmitů.
3. Předpokládám řešení ve tvaru $\vec{\xi}(t) = \vec{a} e^{i\omega t}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ je konstantní vektor poměrů amplitud.
4. Dosadím do pohybových rovnic a požaduji netrivialitu řešení, tzn. $\vec{a} \neq 0$. Dostanu $(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}) \vec{a} = 0$. Tyto podmínky vedou na tzv. sekulární rovnici $|\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}| = 0$.
5. Sekulární rovnice je polynom n -tého stupně v ω^2 . Najdu příslušné kořeny ω_k^2 . K nim najdu příslušné vlastní vektory $\vec{a}_k$ jako řešení rce $(\mathbb{U} - \omega_k^2 \mathbb{T}) \vec{a}_k = 0$.
6. Obecné řešení pohybu je pak tvaru

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{k=1}^n A_k \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k).$$

1.8 Normální souřadnice

Polohu našeho fyzikálního systému reprezentujeme n -ticí souřadnic $\vec{\xi}$. Místo toho, abychom si tuto polohu představovali například u mechanického systému jako konkrétní pozici jednotlivých těles, zavedeme si abstraktní pojem *konfiguračního prostoru* $\mathcal{C}$. Ten bude představovat abstraktní množinu všech možných poloh daného fyzikálního systému. Každý bod $p \in \mathcal{C}$ pak představuje konkrétní polohu například závaží a pružinek.

V našem případě je situace poměrně jednoduchá. Naše souřadnice $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ odměřují výchylku těles z rovnovážné pozice a tím jednoznačně určují polohu těchto těles. Za konfigurační prostor tedy můžeme považovat přímo prostor souřadnic⁹, $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. Na obrázku 1.6 je jako příklad znázorněn konfigurační prostor pro jednoduchý mechanický systém.



Obrázek 1.6: Konfigurační prostor pro podélně kmitající systém dvou závaží a tří pružinek.

Normální souřadnice $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ jsou definované tak, že kmitá-li systém v i -tém módu platí

$$\eta_i = A \cos(\omega_i t + \varphi), \quad \eta_k = 0, \quad k \neq i. \quad (1.62)$$

Tohoto chování docílíme, namíříme-li nové souřadné osy η_i ve směrech vektorů $\vec{a}_i$ (původní souřadné osy míří ve směrech vektorů standardní báze $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$). Reprezentace i -tého módu v původních a normálních souřadnicích tedy je

$$\vec{\xi}(t) = A \vec{a}_i \cos(\omega_i t + \varphi), \quad \vec{\eta}(t) = A \vec{e}_i \cos(\omega_i t + \varphi). \quad (1.63)$$

Transformační vztah mezi původními souřadnicemi $\vec{\xi}$ a normálními souřadnicemi $\vec{\eta}$ vypadá následovně:

$$\vec{\xi} = \mathbb{A} \vec{\eta}, \quad (1.64)$$

kde matice $\mathbb{A}$,

$$\mathbb{A} = \left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \vec{a}_n \end{pmatrix} \right), \quad (1.65)$$

je matice tvořená sloupcovými vektory $\vec{a}_i$. Tento transformační vztah má přesně vlastnost popsanou výše – převádí řešení tvaru (1.63) pro $\vec{\eta}(t)$ na $\vec{\xi}(t)$.

⁹Samozřejmě záleží, jestli dává smysl volit zcela libovolnou polohu $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Např. v aproximaci malých kmitů vyžadujeme, aby $\vec{\xi}$ bylo blízko 0. Můžeme se na to ale také dívat tak, že v aproximaci malých kmitů jsme dostali matematické pohybové rovnice, které dávají (matematický) smysl pro jakékoliv $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

V normálních souřadnicích jsou pohybové rovnice tvaru

$$\ddot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = 0, \quad (1.66)$$

tzn. systém se z matematického hlediska jeví jako soubor n nezávislých harmonických oscilátorů.

Takto definované normální souřadnice ještě pořád nejsou dané jednoznačně. Máme volnost ve výběru vektorů $\vec{a}_i$ – můžeme je násobit libovolnými (nenulovými) konstantami. Dodejme proto normalizační podmínku

$$\vec{a}_i^T \mathbb{T} \vec{a}_i = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.67)$$

Tato nám fixuje velikost vektorů $\vec{a}_i$.

Definice: Necht' $\vec{a}_i, i \in \{1, \dots, n\}$ jsou vlastní vektory úlohy $(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T})\vec{a} = 0$ normalizované podmínkou $\vec{a}_i^T \mathbb{T} \vec{a}_i = 1, i \in \{1, \dots, n\}$. Normální souřadnice $\vec{\eta}$ jsou definované vztahem

$$\vec{\xi} = \mathbb{A} \vec{\eta}, \quad (1.68)$$

kde $\mathbb{A}$ je matice definovaná v (1.65).

V těchto souřadnicích platí

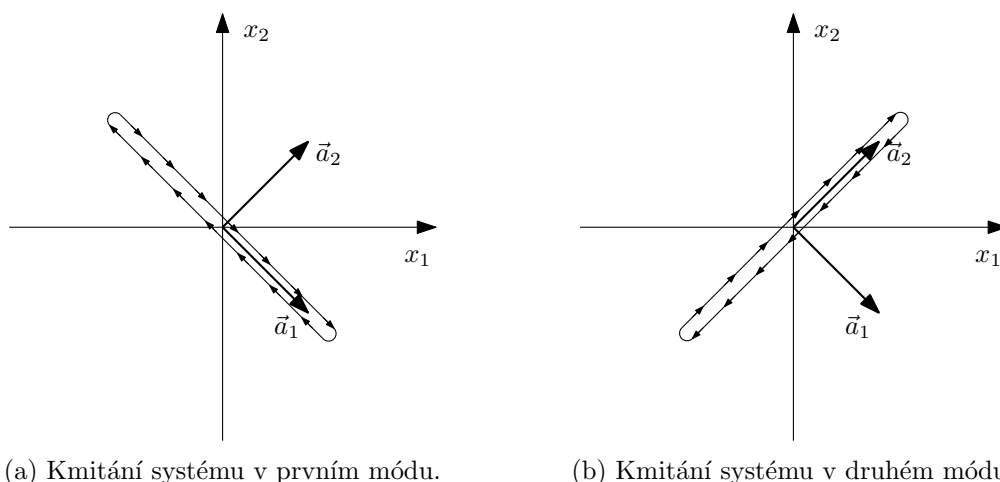
$$\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{A}^T \mathbb{U} \mathbb{A} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2), \quad (1.69)$$

viz další kapitola.

Příklad. Ilustrujme pojem normálních souřadnic na příkladě podélných kmitů dvou závaží na třech pružinkách (viz obrázek 1.6). Obecné řešení je tvaru (pro $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$):

$$\vec{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (1.70)$$

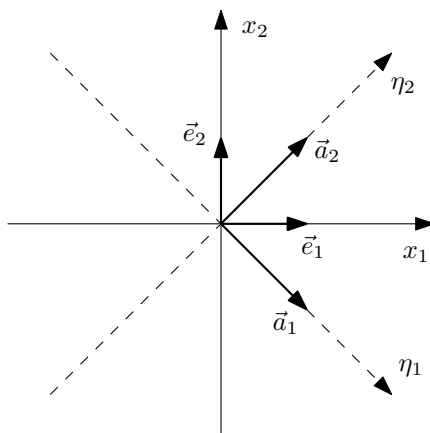
Pokud vybudíme první mód, bude systém opisovat úsečku ve směru vektoru $\vec{a}_1$; analogicky pokud vybudíme druhý mód. Viz obrázek 1.7.



Obrázek 1.7: Schematicky zakreslené trajektorie v konfiguračním prostoru systému kmitajícím v jednotlivých módech.

Chtěli bychom nyní zavést nové souřadnice (η_1, η_2) , které budou mít takovou vlastnost, že kmitá-li systém v prvním módu, tak celý pohyb bude popisovat pouze souřadnice η_1 a druhá souřadnice η_2 bude nulová. Analogicky pro systém vybuděný do druhého módu, pak chceme

$\eta_1 = 0$ a pouze η_2 popisující polohu systému. Podíváme-li se znovu na obrázek 1.7, vidíme, že stačí vést nové souřadné osy ve směrech vektorů $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$, což je znázorněno na obrázku 1.8.



Obrázek 1.8: Normální souřadnice (η_1, η_2) mířící ve směrech vektorů poměru amplitud $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$. Bazické vektory $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_2$ mířící ve směrech os x_1 a x_2 .

Chceme tedy přejít od souřadnic $\vec{x} = (x_1, x_2)$ k novým souřadnicím $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ pomocí matice přechodu $\mathbb{A}$ definované jako $\vec{x} = \mathbb{A} \vec{\eta}$ (a tedy také $\vec{\eta} = \mathbb{A}^{-1} \vec{x}$).

Potřebujeme matici $\mathbb{A}$ takovou, že když jí předhodíme souřadnice $\vec{\eta} = (1, 0)^T$, tak dostaneme vektor $\vec{a}_1$ a když vektor $\vec{\eta} = (0, 1)^T$, tak dostaneme vektor $\vec{a}_2$. Tuto podmínku zjevně splňuje následující matice

$$\mathbb{P} = \left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.71)$$

tzn. do sloupců dáme jednotlivé vektory $\vec{a}_i$. Rozepsáno po složkách (do jednotlivých souřadnic) máme

$$x_1 = \eta_1 + \eta_2, \quad x_2 = -\eta_1 + \eta_2, \quad \eta_1 = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \eta_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (1.72)$$

V těchto normálních souřadnicích vypadá pohyb systému následovně:

$$\vec{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

V tomto příkladu jsme pro jednoduchost vynechali krok s normalizací vektorů $\vec{a}$.

1.9 Malé kmity teoreticky

V této kapitole odpovíme na několik vtíravých otázek. Budou vlastní čísla $\lambda_k = \omega_k^2$ vždy reálná a kladná? Budeme mít vždy tolik vlastních vektorů, aby vytvořily bázi $\mathbb{R}^n$? Jaktože přechod k normálním souřadnicím současně diagonalizuje matice $\mathbb{T}$ a $\mathbb{U}$?

V úloze malých kmitů pracujeme se souřadnicemi $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Uvažujme tento prostor jako vektorový prostor $V = \mathbb{R}^n$ dimenze n . V něm máme standardní bázi $\mathcal{E} = (\vec{e}_i)_{i=1}^n$, kde

$$\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-tá složka}}, 0, \dots, 0)^T. \quad (1.74)$$

Definujme nyní bilineární formy T a U ,

$$T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad U : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.75)$$

tak, že $(T)_{\mathcal{E}} = \mathbb{T}$ a $(U)_{\mathcal{E}} = \mathbb{U}$, tzn. aby matice těchto bilineárních forem¹⁰ ve standardní bázi $\mathcal{E}$ byly právě matice kinetické a potenciální energie. Jelikož matice $\mathbb{T}$ je pozitivně definitní, tak je pozitivně definitní i forma T . Symetrická pozitivně definitní bilineární forma T definuje skalární součin na V , $\langle \bullet, \bullet \rangle_T$. Označme libovolnou¹¹ ortonormální bázi (dle skalárního součinu T) $\mathcal{F} = (\vec{f}_i)_{i=1}^n$. Tzn. $\langle \vec{f}_i, \vec{f}_j \rangle_T = T(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \delta_{ij}$.

Vztah mezi bázemi $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ je daný následovně pomocí regulární matice přechodu $\mathbb{S}$,

$$\vec{f}_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{S}_{ji} \vec{e}_j \quad (1.76)$$

(tento vztah definuje matici $\mathbb{S}$). Při přechodu mezi bázemi se matice bilineárních forem transformují

$$(B)_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^T (B)_{\mathcal{E}} \mathbb{S}. \quad (1.77)$$

Konkrétně pro bilineární formy T a U :

$$(T)_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^T \mathbb{T} \mathbb{S} = \mathbb{I}, \quad (U)_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S}. \quad (1.78)$$

Jelikož $\mathcal{F}$ je ON báze vzhledem k T , je matice $(T)_{\mathcal{F}}$ jednotková. Z transformačního vztahu formy T můžeme vyjádřit $\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{S} \mathbb{S}^T$. Označme $\tilde{\mathbb{U}} = (U)_{\mathcal{F}}$, tato matice je symetrická,

$$\tilde{\mathbb{U}}^T = (\mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S})^T = \mathbb{S}^T \mathbb{U}^T \mathbb{S} = \mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S} = \tilde{\mathbb{U}}, \quad (1.79)$$

(a reálná). Teorie lineární algebry říká, že symetrická matice má reálná vlastní čísla λ_k a lze zvolit vektory $\vec{a}_k$ z vlastních podprostorů tak, aby tvořily ortonormální bázi $\mathcal{A} = (\vec{a}_i)_{i=1}^n$ vektorového prostoru V vzhledem ke skalárnímu součinu T . Jelikož je forma U pozitivně definitní, všechna její vlastní čísla musí být kladná, $\lambda_i = \omega_i^2 > 0$.

Zde jsme hledali vlastní čísla matice $\tilde{\mathbb{U}}$, tzn. řešili jsme úlohu

$$\tilde{\mathbb{U}}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \lambda(\vec{a})_{\mathcal{F}} \quad \rightarrow \quad \mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \lambda(\vec{a})_{\mathcal{F}}. \quad (1.80)$$

(symbolem $(\vec{a})_{\mathcal{F}}$ vyznačujeme, že řešením těchto lineárních rovnic jsou složky vektorů $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{F}$). Po vynásobení této rovnice maticí $\mathbb{S}$ máme

$$\mathbb{S} \mathbb{S}^T \mathbb{U}(\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}}) = \lambda(\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}}) \quad \rightarrow \quad \mathbb{T}^{-1} \mathbb{U}(\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}}) = \lambda(\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}}). \quad (1.81)$$

Pro transformační vztah vektorů mezi bázemi $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ platí $(\vec{v})_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^{-1}(\vec{v})_{\mathcal{E}}$. Složky vektorů ve standardní bázi $\mathbb{R}^n$ budeme značit pouze $\vec{v}$. Tzn. $\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \vec{a}$ a z rovnice (1.80) tedy plyne

$$\mathbb{T}^{-1} \mathbb{U} \vec{a} = \lambda \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad (\mathbb{U} - \lambda \mathbb{T}) \vec{a} = 0. \quad (1.82)$$

Tím jsme ukázali, že vektory $\vec{a}$ nalezené v metodě módů nejsou nic jiného než složkové vyjádření abstraktních vektorů $\vec{a}$ ve standardní bázi $\mathcal{E}$ ve vektorovém prostoru vybaveném formami T a U .

V bázi $\mathcal{A} = (\vec{a}_i)_{i=1}^n$ je $(T)_{\mathcal{A}} = \mathbb{I}$, jelikož je to ON báze ($\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle_T = \delta_{ij}$), a zároveň $(U)_{\mathcal{A}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, jelikož je to báze tvořená vlastními vektory formy U . Definujeme-li matici přechodu $\mathbb{A}$ jako

$$\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_{ji} \vec{e}_j, \quad (1.83)$$

¹⁰Matice bilineární formy B v bázi $\mathcal{E} = (\vec{e}_i)_{i=1}^n$ je definována jako $(B)_{\mathcal{E}} = \mathbb{B}_{ij} = B(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$.

¹¹Libovolnou, ale danou. Tato báze bude pouze pomocná v našem snažení.

pak bude platit

$$\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{A}^T \mathbb{U} \mathbb{A} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2). \quad (1.84)$$

Standardní báze má složky $(\vec{e}_i)_k = \delta_{ik}$, po dosazení do definice matice přechodu $\mathbb{A}$ (1.83) máme

$$(\vec{a}_i)_k = \mathbb{A}_{ki}, \quad (1.85)$$

tedy že matici $\mathbb{A}$ získáme tak, že vektory $\vec{a}$ (resp. jejich složky ve standardní bázi) naskládáme vedle sebe do sloupců:

$$\mathbb{A} = \left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \vec{a}_n \end{pmatrix} \right). \quad (1.86)$$

1.10 Tlumené malé kmity

Pohybové rovnice s tlumením

$$\mathbb{T} \ddot{\vec{\xi}} + \mathbb{I} \dot{\vec{\xi}} + \mathbb{U} \vec{\xi} = 0, \quad (1.87)$$

kde **matice tlumení** $\mathbb{I}$ je symetrická, $\mathbb{I}^T = \mathbb{I}$, pozitivně definitní (a reálná). Typicky $\mathbb{I} = \text{diag}(2\delta_1, \dots, 2\delta_n)$.

Uvažujme opět *ansatz* v podobě módu $\vec{\xi}(t) = \vec{a} e^{\lambda t}$, kde $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$ je konstantní (obecně komplexní) vektor. Dosazením dostanu tzv. kvadratickou úlohu vlastních čísel

$$(\lambda^2 \mathbb{T} + \lambda \mathbb{I} + \mathbb{U}) \vec{a} = 0 \quad (1.88)$$

vedoucí na sekulární rovnici

$$\det(\lambda^2 \mathbb{T} + \lambda \mathbb{I} + \mathbb{U}) = 0, \quad (1.89)$$

kde levá strana je polynom stupně $2n$. Při dostatečně slabém tlumení jsou kořeny komplexní. Je-li λ kořen, pak je i $\bar{\lambda}$ kořen. Ke komplexně sdruženému kořenu $\bar{\lambda}$ přísluší komplexně sdružený vektor $\bar{\vec{a}}$. Máme tedy vždy dvojice řešení

$$\vec{\xi}_1(t) = \vec{a} e^{\lambda t}, \quad \vec{\xi}_2(t) = \bar{\vec{a}} e^{\bar{\lambda} t}. \quad (1.90)$$

Uvažujme obecnou lineární kombinaci těchto řešení (která je z linearity pohybových rovnic také řešením) pro daný kořen λ (a k němu komplexně sdružený $\bar{\lambda}$):

$$\vec{\xi}(t) = c_1 \vec{a} e^{\lambda t} + c_2 \bar{\vec{a}} e^{\bar{\lambda} t}. \quad (1.91)$$

Zapíšeme-li nyní $\lambda = -\kappa + i\omega$, kde $\kappa > 0$, a složky vektoru $a_j \in \mathbb{C}$ v goniometrickém tvaru jako $a_j = |a_j| e^{i\alpha_j}$ dostaneme

$$\xi_j(t) = |a_j| e^{-\kappa t} \left(c_1 e^{i(\omega t + \alpha_j)} + c_2 e^{-i(\omega t + \alpha_j)} \right). \quad (1.92)$$

Požadujeme-li reálné řešení, pak opět platí podmínka $c_2 = \bar{c}_1$. Stejným způsobem jako u řešení rovnice harmonického oscilátoru můžeme přejít k řešení tvaru

$$\xi_j(t) = A |a_j| e^{-\kappa t} \cos(\omega t + \alpha_j + \varphi), \quad (1.93)$$

kde konstanty A a φ (vzniklé z konstanty $c_1 = a - ib$) jsou dané počátečními podmínkami. Vidíme, že pro tlumený systém obecně nekmitají všechny části systému ve fázi! Každý stupeň volnosti je fázově posunut o úhel α_j !

Obecné řešení je pak dáno superpozicí všech módů (kterých je n):

$$\xi_j(t) = \sum_{k=1}^n A_k |a_j^{(k)}| e^{-\kappa_k t} \cos(\omega_k t + \alpha_j^{(k)} + \varphi_k), \quad (1.94)$$

kde jsme označili jednotlivé kořeny jako $\lambda_k = -\kappa_k + i\omega_k$ a k nim příslušná vlastní čísla jako $\vec{a}^{(k)}$ a jejich složky $a_j^{(k)} = |a_j^{(k)}| e^{i\alpha_j^{(k)}}$.

1.11 Buzené malé kmity

Nyní uvažujeme pohybové rovnice tlumených malých kmitů s nenulovou pravou tvarem ve tvaru harmonické budící síly

$$\mathbb{T}\ddot{\xi} + \mathbf{\Gamma}\dot{\xi} + \mathbb{U}\xi = \vec{F}e^{i\Omega t}, \quad (1.95)$$

kde $\vec{F} \in \mathbb{C}^n$. Zapišeme-li $F_j = |F_j|e^{i\beta_j}$ můžeme interpretovat čísla $|F_j|$ jako amplitudy budící síly na jednotlivých stupních volnosti a β_j jako fázový posun harmonické budící síly na jednotlivých stupních volnosti.

Uvažujme nyní *ansatz*

$$\vec{\xi}(t) = \vec{a}e^{i\Omega t}, \quad (1.96)$$

který je kombinací *ansatzů* z buzených kmitů harmonického oscilátoru a z metody módů, $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$. Po dosazení do pohybových rovnic dostaneme

$$(-\Omega^2\mathbb{T} + i\Omega\mathbf{\Gamma} + \mathbb{U})\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.97)$$

Vektor $\vec{a}$ pak z předchozí rovnice získáme jednoduše inverzí matice $\mathbb{A} = -\Omega^2\mathbb{T} + i\Omega\mathbf{\Gamma} + \mathbb{U}$:

$$\vec{a} = (-\Omega^2\mathbb{T} + i\Omega\mathbf{\Gamma} + \mathbb{U})^{-1} \vec{F}. \quad (1.98)$$

Tato inverze existuje, jelikož determinant matice $\mathbb{A}$ je nenulový. Proč tomu tak je? Matice $\mathbb{A}$ je vlastně matice v rovnici (1.89), když nahradíme $\lambda = i\Omega$. Pro slabé tlumení existují pouze komplexní kořeny λ s nenulovou reálnou částí. Reálné Ω (tzn. ryze imaginární λ) tedy nemůže být kořenem a tudíž musí být $\det \mathbb{A}$ nenulový.

Vlastní řešení pro reálnou budící sílu je pak

$$\xi_j(t) = \text{Re} [|a_j| e^{i\alpha_j} e^{i\Omega t}] = |a_j| \cos(\Omega t + \alpha_j), \quad (1.99)$$

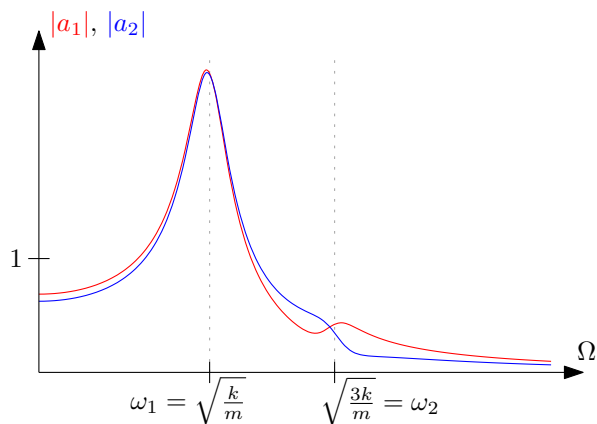
kde jsme opět zapsali složky vektoru $\vec{a}$ v goniometrickém tvaru jako $a_j = |a_j|e^{i\alpha_j}$. Čísla $|a_j|$ pak představují vybuzení amplitudy v jednotlivých stupních volnosti a čísla α_j pak fázové posunutí oproti budící síle (která sama o sobě mohla být různě posunutá v jednotlivých stupních volnosti pomocí konstant β_j).

Příklad. Uvažujme opět podélné kmity dvou závaží na pružinách se stejnými hmotnostmi těles a stejnými tuhostmi pružin. Tlumící matice buď $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma, \gamma)$. Máme dva stupně volnosti a budící síla má dvě složky $\vec{F} = (F_1, F_2)$. Uvažujme $\beta_i = 0$ a tedy $F_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$.

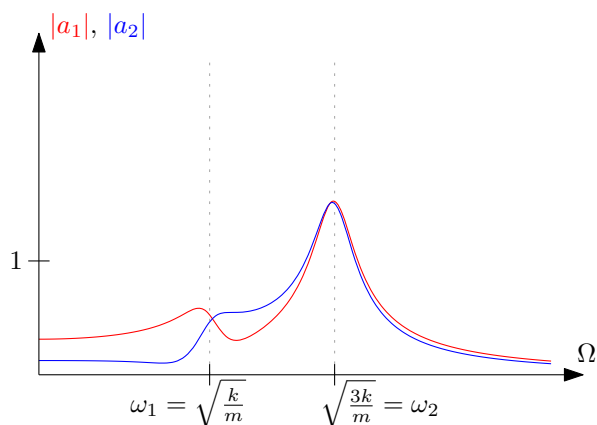
Na obrázcích 1.9, 1.10 a 1.11 jsou rezonanční křivky pro tři různé tvary budící síly $\vec{F}$. Na obrázcích jsou vyneseny absolutní hodnoty jednotlivých složek vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2)$. Červeně je znázorněna složka $|a_1|$ a modře složka $|a_2|$.

Uvědomme si, že dva módy nebuzeného netlumeného systému mají tvary $\vec{a} = (1, 1)$ a $\vec{a} = (1, -1)$. V závislosti na tvaru „budícího vektoru“ $\vec{F}$ se mohou vyskytovat anebo naopak chybět rezonanční peaky nad jednotlivými vlastními frekvencemi buzeného systému.

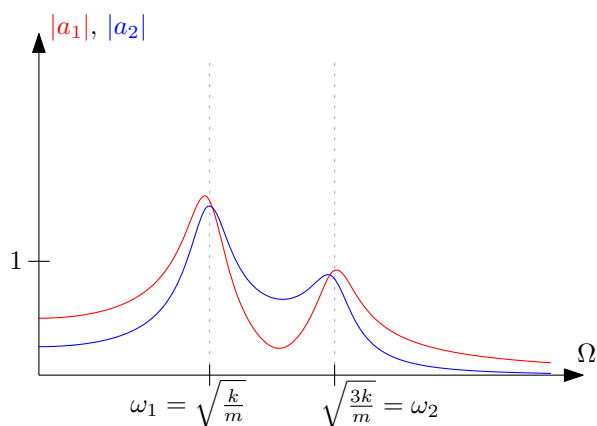
Toto odlišuje jednotlivé obrázky. Na prvním je budící síla nastavená tak, že budí primárně mód s vektorem $\vec{a} = (1, 1)$. Na druhém naopak pozorujeme rezonanční peak nad módem s $\vec{a} = (1, -1)$. Třetí obrázek znázorňuje situaci s budící silou, která „nepreferuje“ ani jeden z módů.



Obrázek 1.9: Budící síla tvaru $\vec{F} = (1; 0,75)$ má rezonanční peak v blízkosti frekvence prvního módu.



Obrázek 1.10: Budící síla tvaru $\vec{F} = (1; -0.75)$ má rezonanční peak v blízkosti frekvence druhého módu.



Obrázek 1.11: Síla tvaru $\vec{F} = (1; 0)$ dokáže vybudit oba módy.

Literatura

- [1] J. Tolar, *Vlnění, optika a atomová fyzika (Základní kurz fyziky FJFI)*, <https://physics.fjfi.cvut.cz/files/predmety/02VOAF/VOAF2017.pdf>, 2017
- [2] J. Tolar, J. Koníček, *Sbírka řešených příkladů z fyziky, Vlnění*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2005
- [3] F. S. Crawford Jr., *Berkeley Physics Course, Volume 3, Waves (In SI Units)*, McGraw Hill Education (India) Private Limited, New Delhi, 2016
- [4] H. Georgi, *The Physics of Waves*, <http://www.people.fas.harvard.edu/~hgeorgi/new.htm>, 2015
- [5] E. Hecht, *Optics*, Pearson Education Limited, Harlow, 2017
- [6] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics, Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light*, Pergamon Press, Oxford, 1964
- [7] I. Štoll, J. Tolar, *Teoretická fyzika*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004