

Útržky z VOAFu

Josef Schmidt¹

7. října 2019

¹schmijos@fjfi.cvut.cz

Tento materiál slouží jako podklad pro sledování přednášky z předmětu 02VOAF na FJFI ČVUT v Praze.

Obsah

1	Kmity soustav s konečným počtem stupňů volnosti	5
1.1	Harmonický oscilátor	5
1.2	Matematická vsuvka: Komplexní čísla a exponenciála	5
1.3	Matematická vsuvka: Obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty	7
1.4	Matematická vsuvka: Střední hodnoty	8
1.5	Tlumený harmonický oscilátor	9
1.6	Buzený harmonický oscilátor	9
1.7	Kmity soustav s n stupni volnosti	12
1.7.1	Aproximace malých kmitů	13
1.7.2	Metoda módů	14
1.7.3	Kuchařka	16
1.8	Normální souřadnice	16
1.9	Malé kmity teoreticky	19
1.10	Tlumené malé kmity	20
1.11	Buzené malé kmity	21
2	Kmity struny a postupné vlnění	25
2.1	Řetízek atomů	25
2.1.1	Řešení řetízku	26
2.1.2	Spojité limita	27
2.2	Kmity struny a vlnová rovnice	29
2.3	Podélné kmity	31
2.4	Zvuk	31
2.5	Kmity struny s pevnými konci	33
2.5.1	Podmínka volného konce	35
2.6	Matematická vsuvka: Fourierovy řady	36
2.6.1	Sudé a liché prodloužení	37
2.7	Řešení počátečních podmínek pro pevné konce	38
2.8	d'Alembertovo řešení vlnové rovnice	39
2.8.1	Vyzařování postupných vln	41
2.8.2	Harmonická postupná vlna	42
2.9	Energie vlnění	42
2.9.1	Energie v postupné vlně	45
2.9.2	Příklad: Harmonická postupná vlna	46

3	Disperzní vztah, vlnové balíky, grupová rychlost	47
3.1	Fázová rychlost, disperzní vztah	47
3.1.1	Postupné vlnění	47
3.1.2	Disperzní vztah	48
3.1.3	Reaktivní prostředí	49
3.2	Matematická vsuvka: Fourierova transformace	51
3.2.1	Fourierova transformace v komplexním zápisu	52
3.3	Vlnové balíky a relace neurčitosti	53
3.4	Grupová rychlost	57
3.4.1	Superpozice dvou postupných harmonických vln	57
3.4.2	Obecný vlnový balík	58
3.4.3	Rozplývání vlnového balíku	60

Kapitola 1

Kmity soustav s konečným počtem stupňů volnosti

1.1 Harmonický oscilátor

Systém popsaný rovnicí harmonického oscilátoru,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.1)$$

je nejjednodušším systémem vykazující kmitavý pohyb. Tento matematický model slouží k více či méně přesnému popisu řady fyzikálních systémů. Například pro popis kmitání závaží hmotnosti m na pružině tuhosti k ,

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.2)$$

anebo pro popis pohybu matematického kyvadla v blízkosti rovnovážné polohy,

$$ml\ddot{\varphi} + mg\varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (1.3)$$

či pro popis průběhu proudu v LC obvodu,

$$L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1.4)$$

Různé fyzikální systémy tedy vedou na stejný matematický popis jejich chování. To je charakteristické pro celou řadu vlnových jevů, kterými se budeme zabývat. Typicky budeme uvažovat nějaký konkrétní fyzikální systém, často mechanický, vytvoříme jeho matematický model a budeme zkoumat vlnové jevy, které z něho plynou. Získané poznatky pak budou mít obecnou platnost pro jakýkoliv systém chovající se dle stejného matematického modelu.

1.2 Matematická vsuvka: Komplexní čísla a exponenciála

Komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ je číslo tvaru $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je komplexní jednotka s vlastností $i^2 = -1$. Sčítání a násobení těchto čísel je definováno „přirozeným způsobem“.

Komplexně sdružené číslo $\bar{z}$ je číslo $\bar{z} = a - ib$. Platí vzorec $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. Velikost komplexního čísla je definována jako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, tento výraz je možno zapsat jako $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Reálná a imaginární část. Definujeme funkce $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ zvané reálná a imaginární část pomocí předpisů

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b$$

(pozor, imaginární část neobsahuje komplexní jednotku!). Pokud je reálná část nulová, nazveme číslo *ryze imaginárním*. Funkce Re a Im jsou *reálně* lineární, tzn. platí

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2, \quad \operatorname{Re}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Re} z, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

stejně pro Im . Pozor, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) \neq (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2)$ (stejně pro Im). Tyto funkce lze jednoduše vyjádřit pomocí komplexního sdružení:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Komplexní exponenciála. Uvažujme $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Definujeme komplexní exponenciálu následující vztahem:

$$e^z := e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Speciální případ pro $a = 0$,

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b, \quad b \in \mathbb{R},$$

se nazývá Eulerův vzorec¹. Platí $|e^{ib}| = 1$ a můžeme tedy psát $|e^z| = e^a$.

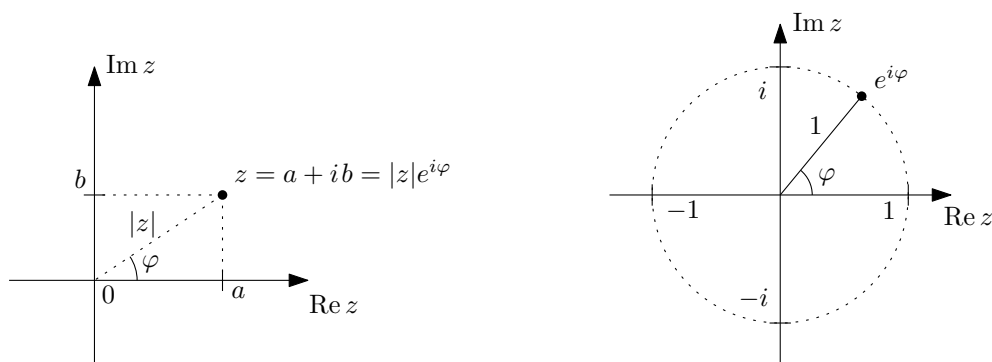
Goniometrický tvar komplexního čísla. Každé komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ můžeme zapsat ve tvaru $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Číslo φ říkáme *argument* komplexního čísla (toto číslo není dané jednoznačně, lze přičíst libovolný celočíselný násobek 2π). Argument φ je řešením rovnic

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Tyto rovnice se často formálně² sdružují do rovnice

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}.$$

Gaussova (komplexní) rovina. Komplexní čísla můžeme reprezentovat jako body (dvourozměrné) roviny, kde kartézské osy tvoří reálná a imaginární část komplexních čísel, viz obrázek 1.1.



(a) Kartézská a goniometrická reprezentace komplexního čísla z znázorněná v Gaussově rovině.

(b) Jednotková kružnice v Gaussově rovině tvořená komplexními čísly tvaru $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Obrázek 1.1: Gaussova rovina slouží ke grafickému znázornění komplexních čísel, kde na vodorovnou osu vynášíme reálnou část a na svislou osu imaginární část.

¹Jehož speciálním případem je „nejkrásnější matematická identita“ $e^{i\pi} = -1$.

²V tomto zápisu ztrácíme informaci o tom, zda $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ anebo $\varphi \in \langle \pi, 2\pi \rangle$.

Sčítání komplexních čísel má pak geometrický význam sčítání dvourozměrných vektorů v Gaussově rovině. Číslo $e^{i\varphi}$ představuje číslo na jednotkové kružnici. Intuitivní představa o násobení komplexních čísel se získá z goniometrického zápisu:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Násobení číslem $e^{i\varphi}$ tedy představuje rotaci o úhel φ v komplexní rovině. Násobení číslem $|z|$ představuje škálování v této rovině.

Komplexní zápis goniometrických funkcí. Z Eulerova vzorce přímo plynou následující vztahy:

$$\cos \varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

1.3 Matematická vsuvka: Obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme následující diferenciální rovnici pro funkci $x(t)$

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0, \quad (1.5)$$

kde koeficienty $a_i \in \mathbb{R}$ jsou reálné konstanty, $a_n \neq 0$. Řešení hledějme ve tvaru $x(t) = e^{\lambda t}$. Po dosazení do (1.5) (a vykrácení $e^{\lambda t}$) obdržíme tzv. *charakteristický polynom* této rovnice

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda_{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (1.6)$$

Nechť λ je kořen tohoto polynomu s *reálnými koeficienty*, pak i $\bar{\lambda}$ je kořen. Tzn. buď je $\lambda \in \mathbb{R}$ anebo jsou kořeny komplexně sdružená dvojice $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$.

Pokud jsou všechny kořeny navzájem různé (mají násobnost jedna) dostáváme tzv. *fundamentální systém řešení*

$$\left\{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \right\}, \quad (1.7)$$

jelikož je polynom (1.6) stupně n , máme n fundamentálních řešení³.

Princip superpozice. Je-li $x_1(t)$, $x_2(t)$ řešení rovnice (1.5), pak je řešením i $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$, kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty (obecně komplexní).

Obecné řešení rovnice (1.5) je obecná komplexní lineární kombinace fundamentálních řešení:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}. \quad (1.8)$$

Komplexní a reálná řešení. Je-li $x(t)$ řešení rovnice (1.5), pak je řešením i $\bar{x}(t)$, $\operatorname{Re} x(t)$ a $\operatorname{Im} x(t)$. Pokud tedy máme komplexní fundamentální řešení (příslušné komplexně sdruženým kořenům $\lambda = a + ib, \bar{\lambda} = a - ib$) $e^{\lambda t}$ a $e^{\bar{\lambda} t}$, můžeme přejít k reálným fundamentálním řešením:

$$\operatorname{Re} e^{\lambda t} = \frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}}{2} = e^{at} \cos bt, \quad \operatorname{Im} e^{\lambda t} = \frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}}{2i} = e^{at} \sin bt. \quad (1.9)$$

Toto je ekvivalentní restrikci komplexních integračních konstant podmínkou $c_2 = \bar{c}_1$ v lineární kombinaci $c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\bar{\lambda} t}$.

Obecné reálné řešení je pak reálnou lineární kombinací reálných fundamentálních řešení.

³Pokud je λ kořen s násobností k , pak tomuto kořenu přísluší k fundamentálních řešení tvaru

$$\{e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}\}.$$

Počáteční podmínky. Obecné řešení obyčejné diferenciální rovnice n -tého řádu (tzn. nejvyšší obsažená derivace je n -tého řádu) je závislé na n integračních konstantách. Tyto se určují z počátečních podmínek. Typicky zadáním hodnot nulté až $n - 1$ derivace v daném čase t_0 :

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.10)$$

Nehomogenní rovnice. Obecné řešení, které jsme napsali, bylo řešení tzv. *homogenní rovnice* – rovnice s nulovou pravou stranou. Pokud na pravou stranu přidáme zadanou funkci $f(t)$,

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(t), \quad (1.11)$$

hovoříme o tzv. *nehomogenní rovnici*. Řešení nehomogenní rovnice se z linearity dá rozdělit na dvě části:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t). \quad (1.12)$$

Část $x_{\text{hom}}(t)$ je řešení původní rovnice s nulovou pravou stranou. Část $x_{\text{part}}(t)$ je libovolné (konkrétní) řešení splňující rovnici s pravou stranou (1.11), funkci $x_{\text{part}}(t)$ nazýváme *partikulární řešení*.

Harmonický oscilátor. Pro rovnici harmonického oscilátoru (1.1) je charakteristický polynom tvaru

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (1.13)$$

s kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ a fundamentálním systémem řešení

$$\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}. \quad (1.14)$$

Obecné komplexní řešení je tedy tvaru

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}. \quad (1.15)$$

K reálnému řešení přejdeme aplikací Re a Im na jedno z řešení (např. $e^{i\omega t}$) anebo restrikcí konstant c_1 a c_2 podmínkou $c_1 = \bar{c}_2 = \frac{a-ib}{2}$:

$$x(t) = a \text{Re} e^{i\omega t} + b \text{Im} e^{i\omega t} = a \cos \omega t + b \sin \omega t = \frac{1}{2}(a - ib)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(a + ib)e^{-i\omega t}. \quad (1.16)$$

Počáteční podmínky vedoucí na konkrétní řešení jsou obvykle počáteční poloha a počáteční rychlost v čase $t = 0$:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (1.17)$$

1.4 Matematická vsuvka: Střední hodnoty

Mějme funkci $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Její střední hodnota v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ je definována jako

$$\langle f \rangle_{\langle x_1, x_2 \rangle} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Lze definovat střední hodnotu přes celé $\mathbb{R}$ limitním přechodem

$$\langle f \rangle \equiv \langle f \rangle_{\langle -\infty, \infty \rangle} = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{1}{2x'} \int_{-x'}^{x'} f(x) dx.$$

Pokud je funkce f periodická s periodou L , je její střední hodnota dána jako střední hodnota přes libovolný interval délky L :

$$\langle f \rangle = \langle f \rangle_{\langle x, x+L \rangle} = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} f(x') dx', \quad \text{kde } x \in \mathbb{R} \text{ je libovolné.}$$

Platí

$$\langle \sin \omega t \rangle = \langle \cos \omega t \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}. \quad (1.18)$$

1.5 Tlumený harmonický oscilátor

Rovnice harmonického oscilátoru s tlumením je

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.19)$$

Někdy se zavádí označení $\Gamma = 2\delta$, kde δ je tzv. *dekrement útlumu*. Předpokládáme řešení tvaru $x(t) = e^{\lambda t}$, charakteristický polynom je pak tvaru

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.20)$$

Uvažujeme-li malé (tzv. *podkritické*) tlumení $\delta < \omega_0$, potom řešením (1.20) je dvojice komplexně sdružených kořenů

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (1.21)$$

Výsledné komplexní a reálné řešení tedy je

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}), \quad x(t) = e^{-\delta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t), \quad (1.22)$$

kde jsme definovali $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

1.6 Buzený harmonický oscilátor

Rovnici buzeného harmonického oscilátoru získáme přidáním budící síly na pravou stranu rovnice tlumeného oscilátoru:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B(t) \quad (1.23)$$

Uvažujeme harmonickou budící „sílu“⁴ $B(t) = B \cos(\Omega t)$, resp. její komplexní tvar

$$\hat{B}(t) = B e^{i\Omega t}, \quad B \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

Hledejme pouze partikulární řešení této rovnice, které bude představovat ustálený stav kmitání buzeného harmonického oscilátoru. Vzhledem ke komplexifikaci budící síly bude toto řešení také komplexní. Pokud vezmeme jeho reálnou část, dostaneme řešení pro původní reálnou budící sílu. Předpokládejme řešení ve tvaru

$$\hat{x}(t) = A e^{i\Omega t}, \quad (1.25)$$

kde $A \in \mathbb{C}$. Můžeme psát číslo A v goniometrickém tvaru, $A = |A|e^{-i\varphi}$, a tedy

$$\hat{x}(t) = |A|e^{i(\Omega t - \varphi)}, \quad (1.26)$$

kde $|A|$ představuje amplitudu vynucených kmitů a φ je fázové zpoždění kmitů za budící silou.

Po dosazení našeho *ansatzu* (1.25) do rovnice (1.23) dostaneme

$$A(i\Omega)^2 + 2\delta A(i\Omega) + \omega_0^2 A = B, \quad (1.27)$$

z tohoto vztahu triviálně vyjádříme komplexní amplitudu A :

$$A = \frac{B}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\delta\Omega}. \quad (1.28)$$

⁴Slovo síla je v uvozovkách, jelikož veličina $B(t)$ má rozměr zrychlení, jelikož v diferenciální rovnici máme osamostatněn člen $\ddot{x}$.

Amplituda vynucených kmitů $|A|$ je

$$|A| = \sqrt{A\bar{A}} = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}. \quad (1.29)$$

Dále označíme C a $-D$ jako reálnou a imaginární část A , $A = C - iD$. Výraz pro A rozšíříme komplexně sdruženým jmenovatelem a obdržíme

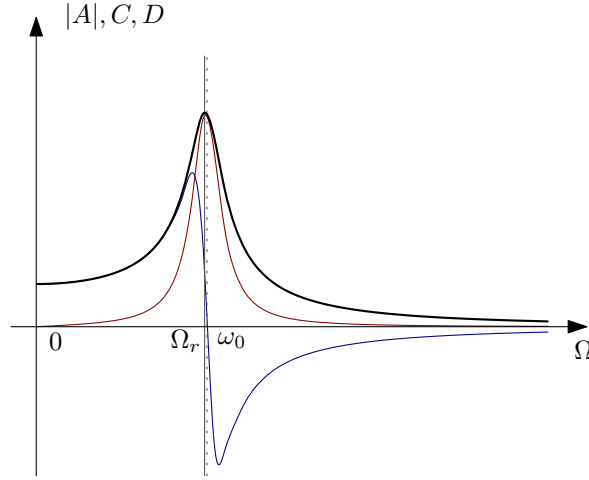
$$A = B \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} = C - iD. \quad (1.30)$$

Nyní snadno zapíšeme koeficienty C a D :

$$C = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} B, \quad D = \frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} B. \quad (1.31)$$

Koeficient C se nazývá *elastická amplituda* a koeficient D *absorpční amplituda*. Reálné řešení je pak tvaru

$$x(t) = \text{Re} [\hat{x}(t)] = \text{Re} [(C - iD)e^{i\Omega t}] = |A| \cos(\Omega t - \varphi) = C \cos \Omega t + D \sin \Omega t. \quad (1.32)$$



Obrázek 1.2: Na obrázku jsou znázorněny rezonanční křivky harmonického oscilátoru buzeného harmonickou budící silou. Černě je zobrazena celková amplituda $|A|$, červeně absorpční amplituda D , modře elastická amplituda C . Maximum amplitudy $|A|$ je označeno $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega_0$.

Pro fázové zpoždění vybudovaných kmitů máme vztah

$$\text{tg}(-\varphi) = \frac{-D}{C} \quad \rightarrow \quad \text{tg} \varphi = \frac{D}{C} = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1.33)$$

Výkon dodávaný budící silou. Proč mají koeficienty C a D název elastická a absorpční amplituda? Studujme výkon, který do systému dodává budící síla. Nechť je uvažovaný fyzikální systém kmitajícího závaží na pružině s tlumením. Okamžitá hodnota mechanického výkonu je $P(t) = F(t)v(t)$, kde $F(t) = mB(t)$. Po dosazení výrazů pro $B(t)$ a $v(t)$ máme

$$P(t) = F(t)v(t) = mB \cos \Omega t (-C\Omega \sin \Omega t + D\Omega \cos \Omega t). \quad (1.34)$$

Pokud nyní spočteme časovou střední hodnotu tohoto výkonu (přes jednu periodu) dostaneme výsledek

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m B \Omega D. \quad (1.35)$$

Časová střední hodnota dodávaného výkonu je tedy úměrná pouze absorpční amplitudě D . Výkon odpovídající elastické amplitudě C se pouze přelévá ze zdroje budící síly do buzeného systému a zpět tak, že v průměru nedochází k přenosu energie. Chceme-li do systému dodávat co nejvíce energie, budíme systém na frekvenci, která odpovídá maximu absorpční amplitudy C .

Celková energie oscilátoru. Okamžitá hodnota energie oscilátoru je dána součtem jeho kinetické a potenciální energie:

$$E(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x(t)^2 = \frac{1}{2}m|A|^2 (\Omega^2 \sin^2(\Omega t - \alpha) + \omega_0^2 \cos^2(\Omega t - \alpha)). \quad (1.36)$$

Pokud opět vypočteme časovou střední hodnotu přes jednu periodu získáme

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4}m|A|^2 (\Omega^2 + \omega_0^2). \quad (1.37)$$

Vidíme tedy, že celková energie je úměrná celkové amplitudě kmitání. Chceme-li naakumulovat co největší energii v oscilátoru (jev rezonance), budíme systém na frekvenci, která odpovídá maximu celkové amplitudy $|A|$.

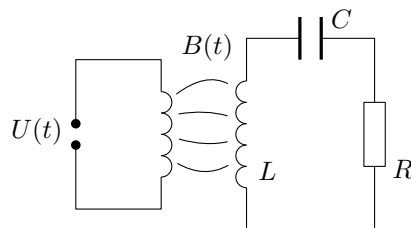
Maximum amplitudy $|A|$ se nachází v bodě $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, přibližná hodnota maxima amplitudy C je v bodě⁵ $\Omega_C \approx \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Pro malé hodnoty tlumení δ můžeme uvažovat $\Omega_A \approx \Omega_C \approx \omega_0$.

Faktor kvality (činitel jakosti). Často se zavádí veličina tzv. faktoru kvality,

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle T_0} = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle E_0 \rangle}, \quad (1.38)$$

která (až na násobek 2π) udává, kolika násobek energie dodané za jednu periodu kmitání $\langle E_0 \rangle$ je uloženo v kmitajícím systému.

Příklad. Bezdrátové nabíjení. Schéma bezdrátového nabíjecího obvodu je na obrázku 1.3. Budící síla je vytvářena nabíjecí stanicí s vysílací cívkou, která vlivem vzájemné indukčnosti budí napětí v cívkě L v nabíjecím RLC obvodu. Odpor R reprezentuje nabíjený spotřebič. Vyladěním budící frekvence napětí $U(t)$ do blízkosti rezonance v nabíjecím obvodu způsobí nejen největší přenos energie (maximum absorpční amplitudy C) ale také největší amplitudu napětí v nabíjecím obvodu (maximum celkové amplitudy $|A|$).



Obrázek 1.3: Princip bezdrátového nabíjení.

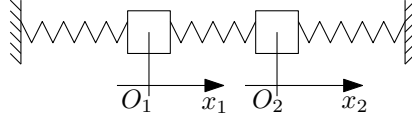
⁵Přesná hodnota je daná řešením rovnice $\frac{dC}{d\Omega} = 0$ s výsledkem

$$\Omega_C = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2 + 2\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2\omega_0^2 + \delta^4}}}{\sqrt{3}}.$$

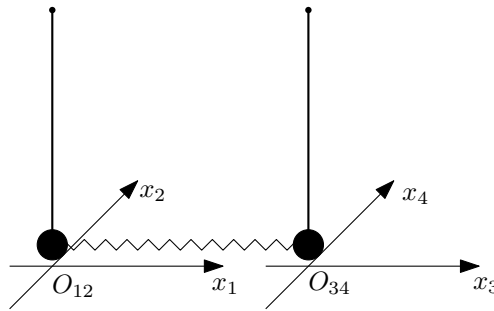
1.7 Kmity soustav s n stupni volnosti

Přejdeme nyní k soustavám s více stupni volnosti. Harmonický oscilátor měl jeden stupeň volnosti – jeho poloha byla popsána jedinou souřadnicí x . Pro systém s n stupni volnosti popíšeme jeho polohu kartézskými souřadnicemi $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Opět budeme uvažovat jednoduché mechanické modely jako například systém dvou závaží na pružinách jako na obrázku 1.4 popsaný dvojicí souřadnic $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Anebo dvojicí kyvadel spojenou pružinou jako na obrázku 1.5 vyžadující čtyři souřadnice $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.



Obrázek 1.4: Dvě podélně kmitající závaží na pružinách.



Obrázek 1.5: Dvě kyvadla spojená pružinou.

Uvažujme Newtonovy pohybové rovnice obecného systému tvaru

$$m_i \ddot{x}_i = F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (1.39)$$

kde m_i je vždy hmotnost tělesa příslušná souřadnici x_i a kde síly v systému jsou popsané potenciální funkcí $U(x_1, \dots, x_n)$.

Budeme se zabývat pohybem (tzn. řešením pohybových rovnic) těchto soustav v okolí *stabilní rovnovážné polohy*.

Definice. *Rovnovážná poloha* je taková poloha $\vec{x}_0$ systému, pro níž platí $F_i(\vec{x}_0) = 0$ pro $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, tzn. v této poloze nepůsobí žádné síly (byl-li systém v bodě $\vec{x}_0$ v klidu, tak na této pozici setrvá nadále). Síly jsou nulové právě tehdy, když má potenciál v bodě $\vec{x}_0$ *stacionární bod*, tzn.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.40)$$

Definice. *Stabilní rovnovážná poloha* je taková rovnovážná poloha, kde je matice

$$\mathbb{U} := \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \quad (1.41)$$

pozitivně definitní. Jinými slovy má potenciál v bodě $\vec{x}_0$ *lokální minimum*. Ze záměnnosti parciálních derivací je tato matice symetrická $\mathbb{U}_{ij} = \mathbb{U}_{ji}$.

Metoda na řešení pohybových rovnic, která bude popsána níže, má jeden technický požadavek – je třeba, aby rovnovážná poloha ležela v počátku souřadnic. Toho docílíme zavedením nových

souřadnic $\vec{\xi}$ substitucí $\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{x}_0$, kde $\vec{x}_0$ jsou konstantní souřadnice zvolené stabilní rovnovážné polohy. Dosazením této substituce do rovnic (1.39) máme na levé straně triviálně

$$m_i \ddot{x}_i = m_i \frac{d^2}{dt^2} (\xi_i + x_{0i}) = m_i \ddot{\xi}_i. \quad (1.42)$$

Na pravé straně musíme provést substituci ve funkci potenciálu $U(\vec{x})$:

$$\tilde{U}(\vec{\xi}) := U \circ \vec{x}(\vec{\xi}) = U(\vec{\xi} + \vec{x}_0), \quad (1.43)$$

kde jsme definovali novou funkci $\tilde{U}$ proměnných $\vec{\xi}$. Inverzní vztah je $U(\vec{x}) = \tilde{U}(\vec{x} - \vec{x}_0)$, po derivaci této rovnosti (kde na pravé straně máme derivaci složené funkce) dostaneme⁶ (s využitím Einsteinova sumačního pravidla)

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_j} \delta_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i}. \quad (1.44)$$

Pohybová rovnice má tedy stejný tvar jako v původních souřadnicích $\vec{x}$:

$$m_i \ddot{\xi}_i = - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i}. \quad (1.45)$$

1.7.1 Aproximace malých kmitů

Pro obecný potenciál mohou být rovnice (1.45) velmi obtížně řešitelné. My se uchýlíme k aproximaci tzv. *malých kmitů* – budeme studovat chování systému v blízkosti rovnovážné polohy. Toho docílíme rozvojem funkce potenciálu $\tilde{U}$ do Taylorovy řady⁷ (okolo rovnovážné polohy, tedy okolo bodu $\vec{\xi} = 0$) a ponecháme si pouze první nenulový člen.

$$\tilde{U}(\vec{\xi}) = \tilde{U}(0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i} \right|_{\vec{\xi}=0} \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{\vec{\xi}=0} \xi_i \xi_j + \dots \quad (1.46)$$

Zkoumejme nyní jednotlivé řády rozvoje. Nultý řád představuje hodnotu potenciálu v rovnovážné poloze $U_0 = \tilde{U}(0)$. Tuto můžeme volit nulovou, $U_0 := 0$, jelikož posun potenciálu o konstantu nijak nevstupuje do pohybových rovnic. Derivace v prvním řádu představuje (minus) sílu vyčíslenou v rovnovážné poloze,

$$F_i(0) = - \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i} \right|_{\vec{\xi}=0}, \quad (1.47)$$

⁶Mějme funkci $f(x_1, \dots, x_k) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ a k -tici funkcí $g_i(y_1, \dots, y_l) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$. Funkci $h(y_1, \dots, y_l) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ získáme složením

$$h(y_1, \dots, y_l) = f(g_1(y_1, \dots, y_l), \dots, g_k(y_1, \dots, y_l))$$

Potom platí *řetězové pravidlo*

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} = \sum_{m=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial g_m}{\partial y_i}.$$

Toto pravidlo je rozšířením pravidla o derivování složené funkce, $[f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x)$, do více proměnných. Zde máme $\tilde{U}(\vec{\xi}) \sim f(x_1, \dots, x_n)$, $\xi_i(\vec{x}) \sim g_i(y_1, \dots, y_n)$.

⁷Srovnej s Taylorovým rozvojem funkce jedné proměnné! Pro funkci $f(x)$ okolo bodu 0 má následující tvar:

$$f(x) = f(0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \dots$$

ale ta je z definice rovnovážné polohy nulová! První nenulový řád je tedy ten druhý. Označíme-li matici $\mathbb{U}$ jako

$$\mathbb{U}_{ij} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\vec{\xi}=0} \quad (1.48)$$

(což je konstantní číselná matice), kterou budeme nazývat *maticí potenciální energie*, můžeme potenciál $\tilde{U}$ psát ve tvaru

$$\tilde{U}(\vec{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{U}_{ij} \xi_i \xi_j + \dots, \quad (1.49)$$

kde třemi tečkami naznačujeme vyšší řády Taylorova rozvoje, které v aproximaci *malých kmitů* zanedbáváme. Matice $\mathbb{U}$ je vlivem záměnnosti parciálních derivací symetrická, $\mathbb{U}_{ij} = \mathbb{U}_{ji}$. Libovolně složitou funkci potenciálu $\tilde{U}$ jsme nahradili kvadratickým polynomem ve výchylkách z rovnovážné polohy $\vec{\xi}$.

Dosaďme nyní aproximovaný potenciál (1.49) do pravé strany pohybových rovnic (1.47) a upravujeme (za použití Einsteinova sumačního pravidla):

$$-F_i = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{2} \mathbb{U}_{jk} \xi_j \xi_k \right) = \frac{1}{2} \mathbb{U}_{jk} (\delta_{ij} \xi_k + \xi_j \delta_{ik}) = \frac{1}{2} (\mathbb{U}_{ik} \xi_k + \mathbb{U}_{ji} \xi_j) = \mathbb{U}_{ij} \xi_j, \quad (1.50)$$

kde jsme v poslední rovnosti použili symetrii matice $\mathbb{U}$ (a přejmenování sčítacího indexu). Aproximací potenciálu jsme docílili toho, že jsou pohybové rovnice *lineární*!

$$m_i \ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^n \mathbb{U}_{ij} \xi_j = 0. \quad (1.51)$$

Zavedeme-li ještě matici $\mathbb{T} = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, kterou budeme nazývat *maticí kinetické energie*⁸, můžeme psát

$$\sum_{j=1}^n \left(\mathbb{T}_{ij} \ddot{\xi}_j + \mathbb{U}_{ij} \xi_j \right) = 0,$$

nebo zapsáno maticově

$$\boxed{\mathbb{T} \ddot{\vec{\xi}} + \mathbb{U} \vec{\xi} = 0.} \quad (1.52)$$

Toto je finální tvar⁹ pohybových rovnic, které nyní budeme řešit. Matice $\mathbb{T}$ a $\mathbb{U}$ jsou symetrické pozitivně definitní konstantní matice.

1.7.2 Metoda módů

Intuitivně očekáváme, že při malém vychýlení systému ze stabilní rovnovážné polohy bude systém okolo této polohy oscilovat. Zkusme předpokládat řešení obsahující harmonické kmitání $e^{i\omega t}$ (pro zatím neurčenou úhlovou frekvenci ω). Uvažujme vektorovou funkci tvaru

$$\vec{\xi}(t) = \vec{a} e^{i\omega t}, \quad (1.53)$$

⁸Kinetickou energii systému můžeme psát jako

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\xi}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{T}_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j.$$

⁹Ještě bychom rovnice mohli vynásobit $\mathbb{T}^{-1}$ a dostat tvar $\ddot{\vec{\xi}} + (\mathbb{T}^{-1} \mathbb{U}) \vec{\xi} = 0$.

kde $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ je konstantní vektor. Tomuto tvaru řešení se říká *mód*. Všechny části systému kmitají se stejnou úhlovou frekvencí ω a se stejnou fází. Reálná řešení pak dostaneme např. zapůsobením Re a Im na získané komplexní řešení. Dosazením do rovnic (1.52) dostaneme

$$(\mathbb{T}\vec{a}(i\omega)^2 + \mathbb{U}\vec{a})e^{i\omega t} = 0. \quad (1.54)$$

Po úpravě a vykrácení $e^{i\omega t}$:

$$(\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T})\vec{a} = 0. \quad (1.55)$$

Samozřejmě požadujeme netriviální (nenulové) řešení, takže hledáme takové frekvence ω , aby úloha měla za řešení nenulový vektor $\vec{a}$. Pokud rovnici vynásobíme $\mathbb{T}^{-1}$ a označíme $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{U}$ a $\lambda = \omega^2$, dostaneme tvar

$$(\mathbb{A} - \lambda)\vec{a} = 0. \quad (1.56)$$

Jedná se tedy o úlohu nalezení vlastních čísel a k nim příslušných vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$. Postupujeme tedy stejně jako v lineární algebře. Požadavek nenulovosti vektoru $\vec{a}$ je požadavek na nenulovost jádra operátoru $\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}$, který je ekvivalentní s jeho singularností, kterou snadno zajistíme nulovým determinantem:

$$\det(\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}) = 0. \quad (1.57)$$

Této rovnici se říká *sekulární rovnice*. Na levé straně je polynom n -tého stupně v proměnné ω^2 . Kořeny tohoto polynomu označme ω_k^2 , $k \in \{1, \dots, n\}$. Příslušné vektory jádra k těmto vlastním číslům označíme $\vec{a}_k$, tzn. řešíme rovnice

$$(\mathbb{U} - \omega_k^2\mathbb{T})\vec{a}_k = 0. \quad (1.58)$$

Pro daný mód je obecným řešením lineární superpozice

$$\vec{\xi}_k(t) = \vec{a}_k (c_1 e^{i\omega_k t} + c_2 e^{-i\omega_k t}). \quad (1.59)$$

Přejdeme-li k reálnému řešení (volbou $c_2 = \bar{c}_1$):

$$\vec{\xi}_k(t) = A\vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi). \quad (1.60)$$

Obecné řešení nalezené metodou módů je pak lineární superpozice všech módů:

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{k=1}^n A_k \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (1.61)$$

Konstanty úhlových rychlostí ω_k a vektorů amplitud $\vec{a}_k$ jsou dané fyzikálním systémem, tzn. například hmotnostmi jednotlivých závaží a tuhostmi jednotlivých pružin. Integrační konstanty amplitudy módů A_k a fázových posuvů φ_k jsou dané počátečními podmínkami, tzn. například počátečními polohami a rychlostmi jednotlivých závaží.

Jelikož hledáme kořeny tvaru ω^2 , potřebujeme, aby tyto vycházely kladné. To je zajištěno, pokud jsou matice $\mathbb{T}$ a $\mathbb{U}$ pozitivně definitní. Pro fyzikální systémy, které vychylujeme ze stabilní rovnovážné polohy, je toto vždy splněno.

Může se stát, že některé ω_k je násobným kořenem sekulární rovnice. Pak se jedná o tzv. degenerovanou úlohu. Nestane se ovšem nic jiného než to, že příslušné úhlové frekvenci ω_k přísluší více lineárně nezávislých vektorů poměrů amplitud $\vec{a}$ (tzn. pro dané ω_k je jádro matice $\mathbb{U} - \omega_k^2\mathbb{T}$ vícedimenzionální).

1.7.3 Kuchařka

Rychle zopakujme kroky, kterými se dostaneme k obecnému řešení metodou módů.

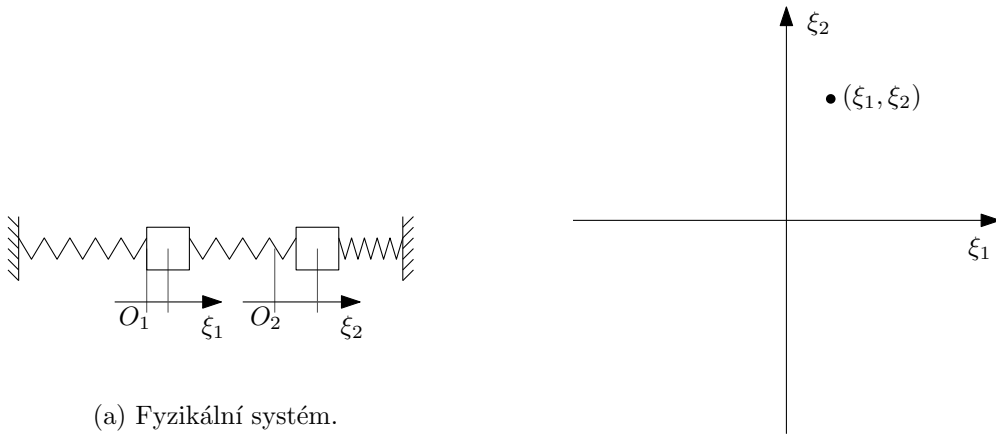
1. Zavedu souřadnice $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, které odměřují výchylku z rovnovážné polohy.
2. Napíši pohybové rovnice ve tvaru $\mathbb{T}\ddot{\vec{\xi}} + \mathbb{U}\vec{\xi} = 0$, kde $\mathbb{T}, \mathbb{U} \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou symetrické konstantní matice. Pokud nutno, použiji aproximaci malých kmitů.
3. Předpokládám řešení ve tvaru $\vec{\xi}(t) = \vec{a}e^{i\omega t}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ je konstantní vektor poměrů amplitud.
4. Dosadím do pohybových rovnic a požaduji netrivialitu řešení, tzn. $\vec{a} \neq 0$. Dostanu $(\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T})\vec{a} = 0$. Tyto podmínky vedou na tzv. sekulární rovnici $|\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}| = 0$.
5. Sekulární rovnice je polynom n -tého stupně v ω^2 . Najdu příslušné kořeny ω_k^2 . K nim najdu příslušné vlastní vektory $\vec{a}_k$ jako řešení rce $(\mathbb{U} - \omega_k^2\mathbb{T})\vec{a}_k = 0$.
6. Obecné řešení pohybu je pak tvaru

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{k=1}^n A_k \vec{a}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k).$$

1.8 Normální souřadnice

Polohu našeho fyzikálního systému reprezentujeme n -ticí souřadnic $\vec{\xi}$. Místo toho, abychom si tuto polohu představovali například u mechanického systému jako konkrétní pozici jednotlivých těles, zavedeme si abstraktní pojem *konfiguračního prostoru* $\mathcal{C}$. Ten bude představovat abstraktní množinu všech možných poloh daného fyzikálního systému. Každý bod $p \in \mathcal{C}$ pak představuje konkrétní polohu například závaží a pružinek.

V našem případě je situace poměrně jednoduchá. Naše souřadnice $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ odměřují výchylku těles z rovnovážné pozice a tím jednoznačně určují polohu těchto těles. Za konfigurační prostor tedy můžeme považovat přímo prostor souřadnic¹⁰, $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. Na obrázku 1.6 je jako příklad znázorněn konfigurační prostor pro jednoduchý mechanický systém.



(a) Fyzikální systém.

(b) Abstraktní konfigurační prostor $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$.

Obrázek 1.6: Konfigurační prostor pro podélně kmitající systém dvou závaží a tří pružinek.

¹⁰Samozřejmě záleží, jestli dává smysl volit zcela libovolnou polohu $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Např. v aproximaci malých kmitů vyžadujeme, aby $\vec{\xi}$ bylo blízko 0. Můžeme se na to ale také dívat tak, že v aproximaci malých kmitů jsme dostali matematické pohybové rovnice, které dávají (matematický) smysl pro jakékoliv $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

Normální souřadnice $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ jsou definované tak, že kmitá-li systém v i -tém módu platí

$$\eta_i = A \cos(\omega_i t + \varphi), \quad \eta_k = 0, \quad k \neq i. \quad (1.62)$$

Tohoto chování docílíme, namíříme-li nové souřadné osy η_i ve směrech vektorů $\vec{a}_i$ (původní souřadné osy míří ve směrech vektorů standardní báze $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$). Reprezentace i -tého módu v původních a normálních souřadnicích tedy je

$$\vec{\xi}(t) = A \vec{a}_i \cos(\omega_i t + \varphi), \quad \vec{\eta}(t) = A \vec{e}_i \cos(\omega_i t + \varphi). \quad (1.63)$$

Transformační vztah mezi původními souřadnicemi $\vec{\xi}$ a normálními souřadnicemi $\vec{\eta}$ vypadá následovně:

$$\vec{\xi} = \mathbb{A} \vec{\eta}, \quad (1.64)$$

kde matice $\mathbb{A}$,

$$\mathbb{A} = \left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \vec{a}_n \end{pmatrix} \right), \quad (1.65)$$

je matice tvořená sloupcovými vektory $\vec{a}_i$. Tento transformační vztah má přesně vlastnost popsanou výše – převádí řešení tvaru (1.63) pro $\vec{\eta}(t)$ na $\vec{\xi}(t)$.

V normálních souřadnicích jsou pohybové rovnice tvaru

$$\ddot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = 0, \quad (1.66)$$

tzn. systém se z matematického hlediska jeví jako soubor n nezávislých harmonických oscilátorů.

K definici normálních souřadnic se často ještě přidává následující normalizační podmínka

$$\vec{a}_i^T \mathbb{T} \vec{a}_i = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.67)$$

Tato nám fixuje velikost vektorů $\vec{a}_i$ – tedy měřítko na nových souřadnicových osách η_i . Tyto souřadnice stále nejsou definovány jednoznačně. Máme volnost ve výběru znamének vektorů $\vec{a}_i$ a také v případě degenerované úlohy máme volnost ve výběru báze příslušného více dimenzionálního vlastního podprostoru. Nicméně, formální definice je následující:

Definice: Nechtě $\vec{a}_i, i \in \{1, \dots, n\}$ jsou vlastní vektory úlohy $(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}) \vec{a} = 0$ normalizované podmínkou $\vec{a}_i^T \mathbb{T} \vec{a}_i = 1, i \in \{1, \dots, n\}$. Normální souřadnice $\vec{\eta}$ jsou definované vztahem

$$\vec{\xi} = \mathbb{A} \vec{\eta}, \quad (1.68)$$

kde $\mathbb{A}$ je matice definovaná v (1.65).

V těchto souřadnicích platí

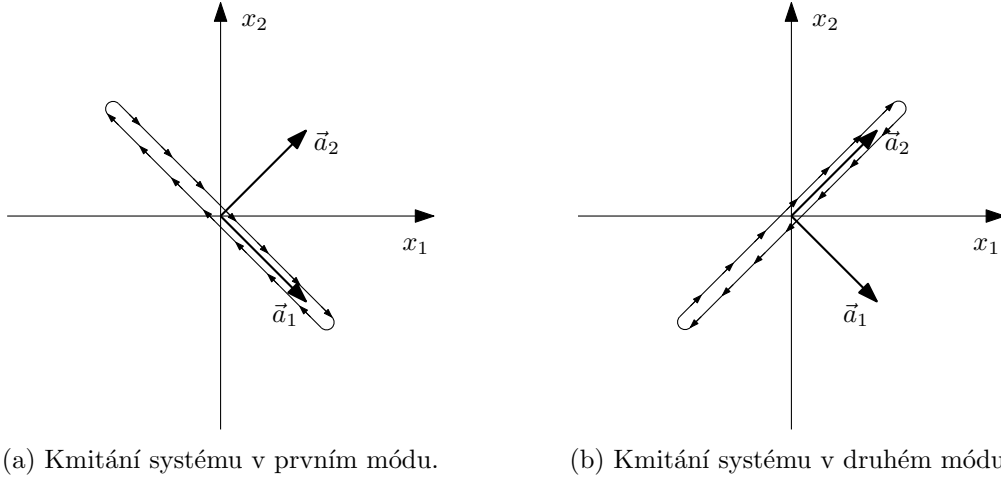
$$\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{A}^T \mathbb{U} \mathbb{A} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2), \quad (1.69)$$

viz další kapitola.

Příklad. Ilustrujme pojem normálních souřadnic na příkladě podélných kmitů dvou závaží na třech pružinkách (viz obrázek 1.6). Obecné řešení je tvaru (pro $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$):

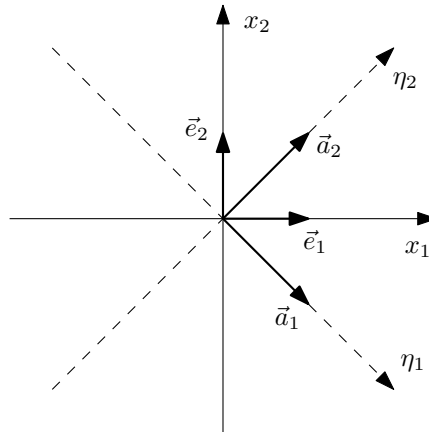
$$\vec{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (1.70)$$

Pokud vybudíme první mód, bude systém opisovat úsečku ve směru vektoru $\vec{a}_1$; analogicky pokud vybudíme druhý mód. Viz obrázek 1.7.



Obrázek 1.7: Schematicky zakreslené trajektorie v konfiguračním prostoru systému kmitajícím v jednotlivých módech.

Chtěli bychom nyní zavést nové souřadnice (η_1, η_2) , které budou mít takovou vlastnost, že kmitá-li systém v prvním módu, tak celý pohyb bude popisovat pouze souřadnice η_1 a druhá souřadnice η_2 bude nulová. Analogicky pro systém vybuzeň do druhého módu, pak chceme $\eta_1 = 0$ a pouze η_2 popisující polohu systému. Podíváme-li se znovu na obrázek 1.7, vidíme, že stačí vést nové souřadné osy ve směrech vektorů $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$, což je znázorněno na obrázku 1.8.



Obrázek 1.8: Normální souřadnice (η_1, η_2) mířící ve směrech vektorů poměru amplitud $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$. Bazické vektory $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_2$ mířící ve směrech os x_1 a x_2 .

Chceme tedy přejít od souřadnic $\vec{x} = (x_1, x_2)$ k novým souřadnicím $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ pomocí matice přechodu $\mathbb{A}$ definované jako $\vec{x} = \mathbb{A} \vec{\eta}$ (a tedy také $\vec{\eta} = \mathbb{A}^{-1} \vec{x}$).

Potřebujeme matici $\mathbb{A}$ takovou, že když jí předhodíme souřadnice $\vec{\eta} = (1, 0)^T$, tak dostaneme vektor $\vec{a}_1$ a když vektor $\vec{\eta} = (0, 1)^T$, tak dostaneme vektor $\vec{a}_2$. Tuto podmínku zjevně splňuje následující matice

$$\mathbb{P} = \left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.71)$$

tzn. do sloupců dáme jednotlivé vektory $\vec{a}_i$. Rozepsáno po složkách (do jednotlivých souřadnic) máme

$$x_1 = \eta_1 + \eta_2, \quad x_2 = -\eta_1 + \eta_2, \quad \eta_1 = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \eta_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (1.72)$$

V těchto normálních souřadnicích vypadá pohyb systému následovně:

$$\vec{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

V tomto příkladu jsme pro jednoduchost vynechali krok s normalizací vektorů $\vec{a}$.

1.9 Malé kmity teoreticky

V této kapitole odpovíme na několik vtíravých otázek. Budou vlastní čísla $\lambda_k = \omega_k^2$ vždy reálná a kladná? Budeme mít vždy tolik vlastních vektorů, aby vytvořily bázi $\mathbb{R}^n$? Jaktože přechod k normálním souřadnicím současně diagonalizuje matice $\mathbb{T}$ a $\mathbb{U}$?

V úloze malých kmitů pracujeme se souřadnicemi $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Uvažujme tento prostor jako vektorový prostor $V = \mathbb{R}^n$ dimenze n . V něm máme standardní bázi $\mathcal{E} = (\vec{e}_i)_{i=1}^n$, kde

$$\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-tá složka}}, 0, \dots, 0)^T. \quad (1.74)$$

Definujme nyní bilineární formy T a U ,

$$T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad U : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.75)$$

tak, že $(T)_{\mathcal{E}} = \mathbb{T}$ a $(U)_{\mathcal{E}} = \mathbb{U}$, tzn. aby matice těchto bilineárních forem¹¹ ve standardní bázi $\mathcal{E}$ byly právě matice kinetické a potenciální energie. Jelikož matice $\mathbb{T}$ je pozitivně definitní, tak je pozitivně definitní i forma T . Symetrická pozitivně definitní bilineární forma T definuje skalární součin na V , $\langle \bullet, \bullet \rangle_T$. Označme libovolnou¹² ortonormální bázi (dle skalárního součinu T) $\mathcal{F} = (\vec{f}_i)_{i=1}^n$. Tzn. $\langle \vec{f}_i, \vec{f}_j \rangle_T = T(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \delta_{ij}$.

Vztah mezi bázemi $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ je daný následovně pomocí regulární matice přechodu $\mathbb{S}$,

$$\vec{f}_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{S}_{ji} \vec{e}_j \quad (1.76)$$

(tento vztah definuje matici $\mathbb{S}$). Při přechodu mezi bázemi se matice bilineárních forem transformují

$$(B)_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^T (B)_{\mathcal{E}} \mathbb{S}. \quad (1.77)$$

Konkrétně pro bilineární formy T a U :

$$(T)_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^T \mathbb{T} \mathbb{S} = \mathbb{I}, \quad (U)_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S}. \quad (1.78)$$

Jelikož $\mathcal{F}$ je ON báze vzhledem k T , je matice $(T)_{\mathcal{F}}$ jednotková. Z transformačního vztahu formy T můžeme vyjádřit $\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{S} \mathbb{S}^T$. Označme $\tilde{\mathbb{U}} = (U)_{\mathcal{F}}$, tato matice je symetrická,

$$\tilde{\mathbb{U}}^T = (\mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S})^T = \mathbb{S}^T \mathbb{U}^T \mathbb{S} = \mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S} = \tilde{\mathbb{U}}, \quad (1.79)$$

(a reálná). Teorie lineární algebry říká, že symetrická matice má reálná vlastní čísla λ_k a lze zvolit vektory $\vec{a}_k$ z vlastních podprostorů tak, aby tvořily ortonormální bázi $\mathcal{A} = (\vec{a}_i)_{i=1}^n$ vektorového prostoru V vzhledem ke skalárnímu součinu T . Jelikož je forma U pozitivně definitní, všechna její vlastní čísla musí být kladná, $\lambda_i = \omega_i^2 > 0$.

¹¹Matice bilineární formy B v bázi $\mathcal{E} = (\vec{e}_i)_{i=1}^n$ je definována jako $(B)_{\mathcal{E}} = \mathbb{B}_{ij} = B(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$.

¹²Libovolnou, ale danou. Tato báze bude pouze pomocná v našem snažení.

Zde jsme hledali vlastní čísla matice $\tilde{\mathbb{U}}$, tzn. řešili jsme úlohu

$$\tilde{\mathbb{U}}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \lambda(\vec{a})_{\mathcal{F}} \quad \rightarrow \quad \mathbb{S}^T \mathbb{U} \mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \lambda(\vec{a})_{\mathcal{F}}. \quad (1.80)$$

(symbolem $(\vec{a})_{\mathcal{F}}$ vyznačujeme, že řešením těchto lineárních rovnic jsou složky vektorů $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{F}$). Po vynásobení této rovnice maticí $\mathbb{S}$ máme

$$\mathbb{S} \mathbb{S}^T \mathbb{U}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \lambda(\vec{a})_{\mathcal{F}} \quad \rightarrow \quad \mathbb{T}^{-1} \mathbb{U}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \lambda(\vec{a})_{\mathcal{F}}. \quad (1.81)$$

Pro transformační vztah vektorů mezi bázemi $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ platí $(\vec{v})_{\mathcal{F}} = \mathbb{S}^{-1}(\vec{v})_{\mathcal{E}}$. Složky vektorů ve standardní bázi $\mathbb{R}^n$ budeme značit pouze $\vec{v}$. Tzn. $\mathbb{S}(\vec{a})_{\mathcal{F}} = \vec{a}$ a z rovnice (1.80) tedy plyne

$$\mathbb{T}^{-1} \mathbb{U} \vec{a} = \lambda \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad (\mathbb{U} - \lambda \mathbb{T}) \vec{a} = 0. \quad (1.82)$$

Tím jsme ukázali, že vektory $\vec{a}$ nalezené v metodě módů nejsou nic jiného než složkové vyjádření abstraktních vektorů $\vec{a}$ ve standardní bázi $\mathcal{E}$ ve vektorovém prostoru vybaveném formami T a U .

V bázi $\mathcal{A} = (\vec{a}_i)_{i=1}^n$ je $(T)_{\mathcal{A}} = \mathbb{I}$, jelikož je to ON báze $(\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle_T = \delta_{ij})$, a zároveň $(U)_{\mathcal{A}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, jelikož je to báze tvořená vlastními vektory formy U . Definujeme-li matici přechodu $\mathbb{A}$ jako

$$\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_{ji} \vec{e}_j, \quad (1.83)$$

pak bude platit

$$\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{A}^T \mathbb{U} \mathbb{A} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2). \quad (1.84)$$

Standardní báze má složky $(\vec{e}_i)_k = \delta_{ik}$, po dosazení do definice matice přechodu $\mathbb{A}$ (1.83) máme

$$(\vec{a}_i)_k = \mathbb{A}_{ki}, \quad (1.85)$$

tedy že matici $\mathbb{A}$ získáme tak, že vektory $\vec{a}$ (resp. jejich složky ve standardní bázi) naskládáme vedle sebe do sloupců:

$$\mathbb{A} = \left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \vec{a}_n \end{pmatrix} \right). \quad (1.86)$$

1.10 Tlumené malé kmity

Pohybové rovnice s tlumením

$$\mathbb{T} \ddot{\xi} + \mathbb{I} \dot{\xi} + \mathbb{U} \xi = 0, \quad (1.87)$$

kde **matice tlumení** $\mathbb{I}$ je symetrická, $\mathbb{I}^T = \mathbb{I}$, pozitivně definitní (a reálná). Typicky $\mathbb{I} = \text{diag}(2\delta_1, \dots, 2\delta_n)$.

Uvažujeme opět *ansatz* v podobě módu $\vec{\xi}(t) = \vec{a} e^{\lambda t}$, kde $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$ je konstantní (obecně komplexní) vektor. Dosazením dostanu tzv. kvadratickou úlohu vlastních čísel

$$(\lambda^2 \mathbb{T} + \lambda \mathbb{I} + \mathbb{U}) \vec{a} = 0 \quad (1.88)$$

vedoucí na sekulární rovnici

$$\det(\lambda^2 \mathbb{T} + \lambda \mathbb{I} + \mathbb{U}) = 0, \quad (1.89)$$

kde levá strana je polynom stupně $2n$. Při dostatečně slabém tlumení jsou kořeny komplexní. Jelikož máme polynom s reálnými koeficienty, jsou kořeny tvořené dvojicemi komplexně sdružených

kořenů (je-li λ kořen, pak je i $\bar{\lambda}$ kořen). Ke komplexně sdruženému kořenu $\bar{\lambda}$ přísluší komplexně sdružený vektor $\bar{\vec{a}}$. Máme tedy vždy dvojice řešení

$$\vec{\xi}_1(t) = \vec{a} e^{\lambda t}, \quad \vec{\xi}_2(t) = \bar{\vec{a}} e^{\bar{\lambda} t}. \quad (1.90)$$

Uvažujme obecnou lineární kombinaci těchto řešení (která je z linearity pohybových rovnic také řešením) pro daný kořen λ (a k němu komplexně sdružený $\bar{\lambda}$):

$$\vec{\xi}(t) = c_1 \vec{a} e^{\lambda t} + c_2 \bar{\vec{a}} e^{\bar{\lambda} t}. \quad (1.91)$$

Zapišeme-li nyní $\lambda = -\kappa + i\omega$, kde $\kappa > 0$, a složky vektoru $a_j \in \mathbb{C}$ v goniometrickém tvaru jako $a_j = |a_j| e^{i\alpha_j}$ dostaneme

$$\xi_j(t) = |a_j| e^{-\kappa t} \left(c_1 e^{i(\omega t + \alpha_j)} + c_2 e^{-i(\omega t + \alpha_j)} \right). \quad (1.92)$$

Požadujeme-li reálné řešení, pak opět platí podmínka $c_2 = \bar{c}_1$. Stejným způsobem jako u řešení rovnice harmonického oscilátoru můžeme přejít k řešení tvaru

$$\xi_j(t) = A |a_j| e^{-\kappa t} \cos(\omega t + \alpha_j + \varphi), \quad (1.93)$$

kde konstanty A a φ (vzniklé z konstanty $c_1 = a - ib$) jsou dané počátečními podmínkami. Vidíme, že pro tlumený systém obecně nekmitají všechny části systému ve fázi! Každý stupeň volnosti je fázově posunut o úhel α_j !

Obecné řešení je pak dáno superpozicí všech módů (kterých je n):

$$\xi_j(t) = \sum_{k=1}^n A_k |a_j^{(k)}| e^{-\kappa_k t} \cos(\omega_k t + \alpha_j^{(k)} + \varphi_k), \quad (1.94)$$

kde jsme označili jednotlivé kořeny jako $\lambda_k = -\kappa_k + i\omega_k$ a k nim příslušná vlastní čísla jako $\vec{a}^{(k)}$ a jejich složky $a_j^{(k)} = |a_j^{(k)}| e^{i\alpha_j^{(k)}}$.

1.11 Buzené malé kmitý

Nyní uvažujeme pohybové rovnice tlumených malých kmitů s nenulovou pravou tvárou ve tvaru harmonické budící síly

$$\mathbb{T} \ddot{\vec{\xi}} + \mathbf{\Gamma} \dot{\vec{\xi}} + \mathbb{U} \vec{\xi} = \vec{F} e^{i\Omega t}, \quad (1.95)$$

kde $\vec{F} \in \mathbb{C}^n$. Zapišeme-li $F_j = |F_j| e^{i\beta_j}$ můžeme interpretovat čísla $|F_j|$ jako amplitudy budící síly na jednotlivých stupních volnosti a β_j jako fázový posun harmonické budící síly na jednotlivých stupních volnosti.

Uvažujme nyní *ansatz*

$$\vec{\xi}(t) = \vec{a} e^{i\Omega t}, \quad (1.96)$$

který je kombinací *ansatzů* z buzených kmitů harmonického oscilátoru a z metody módů, $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$. Po dosazení do pohybových rovnic dostaneme

$$(-\Omega^2 \mathbb{T} + i\Omega \mathbf{\Gamma} + \mathbb{U}) \vec{a} = \vec{F}. \quad (1.97)$$

Vektor $\vec{a}$ pak z předchozí rovnice získáme jednoduše inverzí matice $\mathbb{A} = -\Omega^2 \mathbb{T} + i\Omega \mathbf{\Gamma} + \mathbb{U}$:

$$\vec{a} = (-\Omega^2 \mathbb{T} + i\Omega \mathbf{\Gamma} + \mathbb{U})^{-1} \vec{F}. \quad (1.98)$$

Tato inverze existuje, jelikož determinant matice $\mathbb{A}$ je nenulový. Proč tomu tak je? Matice $\mathbb{A}$ je vlastně matice v rovnici (1.89), když nahradíme $\lambda = i\Omega$. Pro slabé tlumení existují pouze komplexní kořeny λ s nenulovou reálnou částí. Reálné Ω (tzn. ryze imaginární λ) tedy nemůže být kořenem a tudíž musí být $\det \mathbb{A}$ nenulový.

Vlastní řešení pro reálnou budící sílu je pak

$$\xi_j(t) = \operatorname{Re} [|a_j| e^{i\alpha_j} e^{i\Omega t}] = |a_j| \cos(\Omega t + \alpha_j), \quad (1.99)$$

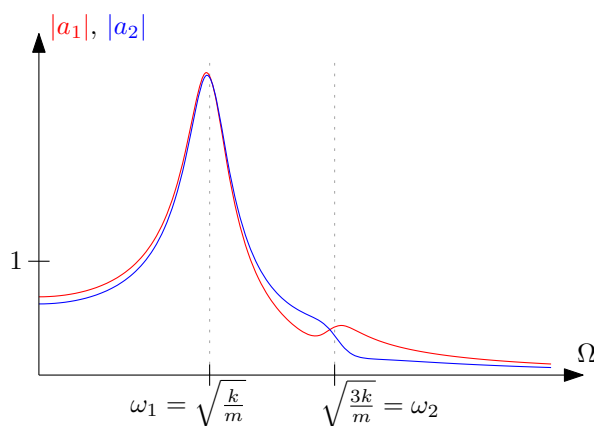
kde jsme opět zapsali složky vektoru $\vec{a}$ v goniometrickém tvaru jako $a_j = |a_j| e^{i\alpha_j}$. Čísla $|a_j|$ pak představují vybuzečné amplitudy v jednotlivých stupních volnosti a čísla α_j pak fázové posunutí oproti budící síle (která sama o sobě mohla být různě posunutá v jednotlivých stupních volnosti pomocí konstant β_j).

Příklad. Uvažujeme opět podélné kmity dvou závaží na pružinách se stejnými hmotnostmi těles a stejnými tuhostmi pružin. Tlumící matice buď $\mathbf{\Gamma} = \operatorname{diag}(\gamma, \gamma)$. Máme dva stupně volnosti a budící síla má dvě složky $\vec{F} = (F_1, F_2)$. Uvažujeme $\beta_i = 0$ a tedy $F_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$.

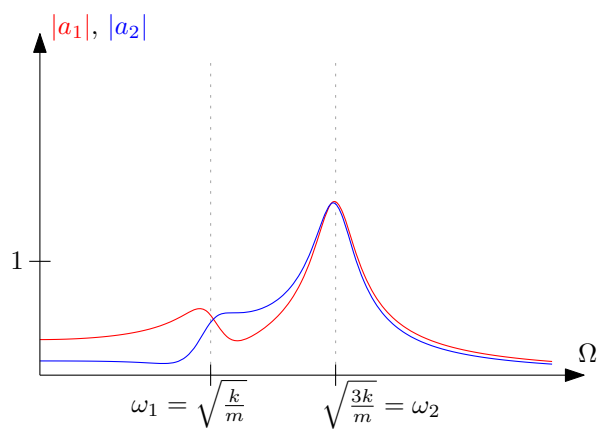
Na obrázcích 1.9, 1.10 a 1.11 jsou rezonanční křivky pro tři různé tvary budící síly $\vec{F}$. Na obrázcích jsou vyneseny absolutní hodnoty jednotlivých složek vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2)$. Červeně je znázorněna složka $|a_1|$ a modře složka $|a_2|$.

Uvědomme si, že dva módy nebuzeného netlumeného systému mají tvary $\vec{a} = (1, 1)$ a $\vec{a} = (1, -1)$. V závislosti na tvaru „budícího vektoru“ $\vec{F}$ se mohou vyskytovat anebo naopak chybět rezonanční peaky nad jednotlivými vlastními frekvencemi buzeného systému.

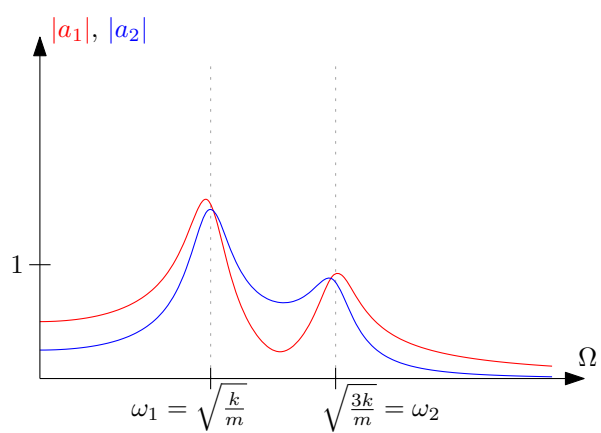
Toto odlišuje jednotlivé obrázky. Na prvním je budící síla nastavená tak, že budí primárně mód s vektorem $\vec{a} = (1, 1)$. Na druhém naopak pozorujeme rezonanční peak nad módem s $\vec{a} = (1, -1)$. Třetí obrázek znázorňuje situaci s budící silou, která „nepreferuje“ ani jeden z módů.



Obrázek 1.9: Budící síla tvaru $\vec{F} = (1; 0,75)$ má rezonanční peak v blízkosti frekvence prvního módu.



Obrázek 1.10: Budící síla tvaru $\vec{F} = (1; -0.75)$ má rezonanční peak v blízkosti frekvence druhého módu.



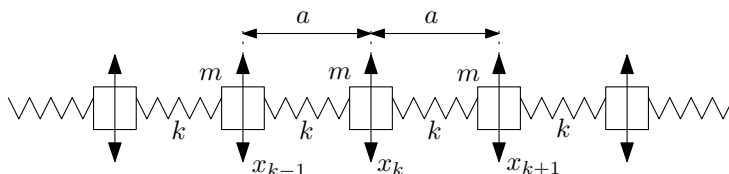
Obrázek 1.11: Síla tvaru $\vec{F} = (1; 0)$ dokáže vybudit oba módy.

Kapitola 2

Kmity struny a postupné vlnění

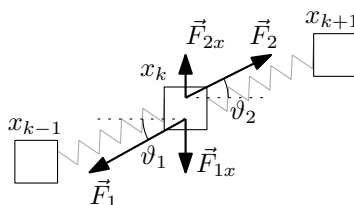
2.1 Řetízek atomů

Zkoumejme nejprve chování řady závaží o hmotnostech m spojené pružinami tuhosti k , viz obrázek 2.1. Tento model se dá považovat za 1D krystal – tzv. řetízek atomů. Také se na tento fyzikální systém dá pohlížet jako na diskrétně modelovanou strunu, lano, atp.



Obrázek 2.1: Řetízek atomů alias příčné kmity řady závaží.

Uvažujme příčné kmity tohoto systému a sestavme pohybové rovnice pro příčnou výchylku k -tého závaží x_k . Na obrázku 2.2 jsou znázorněny síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ od sousedních závaží, včetně jejich příčných průmětů $\vec{F}_{1x}$, $\vec{F}_{2x}$.



Obrázek 2.2: Síly působící na k -té závaží.

Pohybová rovnice bude tvaru

$$m\ddot{x}_k = F_{1x} + F_{2x} = -|F_1|\sin\vartheta_1 + |F_2|\sin\vartheta_2, \quad (2.1)$$

kde úhly ϑ_1 a ϑ_2 svírají pružiny s vodorovným směrem. Délka nenatažené pružiny nechť je a_0 a v rovnovážném stavu jsou tedy pružiny napjaté na napětí $T = k(a - a_0)$. V aproximaci malých výchylek můžeme uvažovat¹, že $|F_1| \approx |F_2| \approx T$ a že $\sin\vartheta \approx \tan\vartheta = \frac{\Delta x}{a}$, kde Δx označuje rozdíl

¹Stejného výsledku bychom bez velkých geometrických úvah dosáhli rozvinutím potenciálu

$$U(\Delta x) = \frac{1}{2}k \left(\sqrt{a^2 + \Delta x^2} - a_0 \right)^2$$

do druhého řádu Taylorova rozvoje.

sousedních poloh závaží spojené danou pružinou. Dosazením těchto předpokladů do rovnice (2.1) obdržíme

$$m\ddot{x}_k = \frac{T}{a} (x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}), \quad (2.2)$$

kde

$$\frac{T}{a} = k \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) = k' \quad (2.3)$$

představuje „efektivní“ tuhost pružin při příčných kmitech. Pokud bychom napsali příslušné matice kinetické a potenciální energie, měly by následující tvar:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & m & & \\ & & m & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbb{U} = \frac{T}{a} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

kde v případě konečného počtu závaží v řetízku bychom museli doplnit příslušné okrajové podmínky např. pevných konců, tj. $x_0 = 0$ a $x_{N+1} = 0$ (kde N je počet závaží).

2.1.1 Řešení řetízku

Hledejme řešení pohybových rovnic (2.2) pro nekonečný řetízek atomů, tzn. máme nekonečnou sadu rovnic pro každý index $k \in \mathbb{Z}$. Vezměme si inspiraci z metody módů, kde se předpokládá řešení ve tvaru

$$\vec{x}(t) = \vec{a}e^{i\omega t}. \quad (2.5)$$

V našem případě má vektor $\vec{a}$ nekonečně mnoho složek. Derivace složek *ansatzu* (2.5) vypadají takto

$$x_l(t) = a_l e^{i\omega t}, \quad \dot{x}_l(t) = i a_l \omega e^{i\omega t}, \quad \ddot{x}_l(t) = -\omega^2 a_l e^{i\omega t}, \quad (2.6)$$

a po dosazení do pohybových rovnic (a vykrácení exponenciály):

$$-m\omega^2 a_l = \frac{T}{a} (a_{l+1} - 2a_l + a_{l-1}). \quad (2.7)$$

Prostorový *ansatz*. Zkusme tvary módů $\vec{a}$ najít na základě předpokladu, že na řetízku půjdou vybudit harmonické vlny. V komplexním zápisu uvažujme $\text{Re } e^{ikz}$, kde za souřadnici z dosadíme příslušné (vodorovné) polohy jednotlivých závaží, $z = la$:

$$a_l = \text{Re } e^{ikla}, \quad (2.8)$$

zatím neurčená konstanta $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ se nazývá *vlnové číslo*. Po dosazení *ansatzu* (2.8) do (2.7):

$$\left(2 - \frac{am}{T}\omega^2\right) e^{ikla} = e^{ikla} \underbrace{\left(e^{ika} + e^{-ika}\right)}_{2 \cos ka}. \quad (2.9)$$

Po vykrácení e^{ikla} a vyjádření úhlové frekvence ω máme

$$\frac{1 - \cos ka}{2} = \frac{am}{4T}\omega^2. \quad (2.10)$$

Člen s cosinem přepíšeme pomocí goniometrického vzorce pro dvojnásobný úhel a dostaneme vztah mezi úhlovou frekvencí ω a vlnovým číslem k :

$$\omega^2 = \frac{4T}{am} \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (2.11)$$

Tomuto vztahu se obecně říká *disperzní vztah*. Dvojce parametrů ω a k musí splňovat vztah (2.11), aby výraz

$$x_l(t) = (\operatorname{Re} e^{ikla})(\operatorname{Re} e^{i\omega t}) = \cos kla \cos \omega t \quad (2.12)$$

byl řešením pohybových rovnic (2.2). Řešení (2.12) je ve tvaru *stojaté vlny*, $X(z) \cos(\omega t + \varphi)$, tzn. amplituda stálého tvaru vlny $X(z)$ se harmonicky mění.

Disperzní vztah (2.11) má řešení pouze pro omezený rozsah úhlových frekvencí:

$$\omega \in \left\langle 0, \sqrt{\frac{4T}{am}} \right\rangle. \quad (2.13)$$

V řeči vlnových čísel k (a vlnových délek $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ vybuzečných vln) to odpovídá intervalu:

$$\frac{ka}{2} \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \leftrightarrow \quad k \in \left\langle 0, \frac{\pi}{a} \right\rangle \quad \leftrightarrow \quad \lambda \in \langle 2a, +\infty \rangle. \quad (2.14)$$

Na nekonečném řetízku atomů tedy můžeme vybudit stojaté vlny se spojitým rozsahem vlnových délek (a k nim je vždy příslušná daná úhlová frekvence taktéž ze spojitého rozsahu). Nelze ale vybudit stojatou vlnu s vlnovou délkou kratší než je dvojnásobek vzdálenosti mezi závažími $2a$ (a zároveň s úhlovou frekvencí větší než $\sqrt{\frac{4T}{am}}$).

Pro oblast frekvencí (a vlnových délek), pro která jsme našli řešení pohybových rovnic, říkáme, že je řetízek atomů *transparentní prostředí* – vlny daných parametrů v tomto prostředí mohou existovat (šířit se). Pro frekvence (a vlnové délky) mimo tuto oblast se prostředí nazývá *reaktivní*. Více o těchto dvou typech prostředí se dozvíte v kapitole věnované disperzním vztahům.

2.1.2 Spojitá limita

Model řetízku závaží je dobrým mikroskopickým modelem pro strunu. Nyní bychom chtěli přejít ke spojitému popisu tak, že budeme přibližovat atomy k sobě (zahušťovat je) – budeme limitně zmenšovat vzdálenost a , $a \rightarrow 0$.

Uvažujme konečnou délku řetízku L , potom počet závaží je přibližně $N = \frac{L}{a}$. Rádi bychom drželi napětí na řetízku konstantní, $T = \text{konst.}$, musím tedy zvyšovat příslušně zvyšovat tuhost pružin² $k' = \frac{T}{a}$. Také chceme zachovat celkovou hmotnost struny M , takže zmenšujeme hmotnost jednotlivých závaží $\text{konst.} = \rho L = M = mN$, tzn. $m = \frac{M}{N}$ (zavedli jsme označení ρ jakožto délkové hustoty řetízku, $[\rho] = \text{kg.m}^{-1}$).

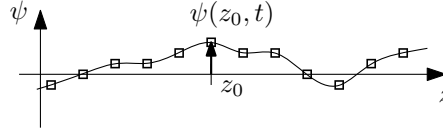
Dále zavedeme spojitý popis polohy, kdy od diskrétní sady funkcí polohy jednotlivých závaží $x_l(t)$, přejdeme k funkci dvou proměnných $\psi(z, t)$, která popisuje příčnou výchylku závaží na místě z v čase t . Závaží jsou jen na souřadnicích $z = la, l \in \mathbb{Z}$,

$$x_l(t) = \psi(la, t), \quad (2.15)$$

pro ostatní body z může funkce ψ nabývat libovolných hodnot³. Pro ilustraci také viz obrázek 2.3.

²Je dobré si uvědomit, že toto není nějaká magie typu „aby to vyšlo“. Pokud vezmete pružinu délky a a tuhosti k a tuto rozpůlíte, vzniknou Vám dvě pružiny délky $\frac{a}{2}$ a tuhosti $2k$! Zvyšování tuhosti pružin předpisem $\frac{T}{a}$ tedy jen znamená, že necháváme pružiny stejného typu, jen je zkracujeme. Toto je jednoduchý důsledek definice tuhosti k jako síly na jednotku vychýlení pružiny. Jdou snadno odvodit „zákony skládání pružin“ pro výsledné tuhosti paralelního a sériového zapojení pružin.

³Budeme potřebovat alespoň dvojnásobnou diferencovatelnost.



Obrázek 2.3: Funkce $\psi(z, t)$ popisující výchylku závaží.

Po dosazení (2.15) do pohybových rovnic (2.2), přepisu $m = \rho a$ a označení $z = la$:

$$(\rho a) \ddot{\psi}(z, t) = T \left(\frac{\psi(z+a, t) - \psi(z, t)}{a} - \frac{\psi(z, t) - \psi(z-a, t)}{a} \right), \quad (2.16)$$

kde symbolem $\dot{\psi}$ rozumíme $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ (a obdobně symbolem ψ' budeme rozumět $\frac{\partial \psi}{\partial z}$). Zavedeme-li novou funkci $\phi(z, t) = \frac{\psi(z+a, t) - \psi(z, t)}{a}$, můžeme pohybové rovnice dále zapsat jako

$$\rho \ddot{\psi}(z, t) = T \frac{\phi(z, t) - \phi(z-a, t)}{a} \quad (2.17)$$

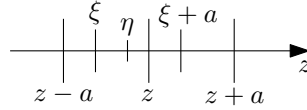
Nyní použijeme na pravé straně Lagrangeovu větu o střední hodnotě⁴:

$$\rho \ddot{\psi}(z, t) = T \phi'(\xi, t) = T \frac{\psi'(\xi+a, t) - \psi'(\xi, t)}{a}, \quad (2.18)$$

kde $\xi \in (z-a, z)$. Použijeme-li Lagrangovu větu ještě jednou na nový zlomek na pravé straně vzniklý po dosazení z definice funkce $\phi(z, t)$, dostaneme

$$\rho \ddot{\psi}(z, t) = T \psi''(\eta, t), \quad (2.19)$$

kde $\eta \in (\xi, \xi+a)$ a celkově $\eta \in (z-a, z+a)$. Schematicky je poloha bodů ξ a η znázorněna na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Polohy bodů ξ a η na číselné ose. Lagrangeova věta říká, že $\xi \in (z-a, z)$ a $\eta \in (\xi, \xi+a)$. Celkově můžeme říct, že $\eta \in (z-a, z+a)$.

V limitě $a \rightarrow 0$ jde $\eta \rightarrow z$ a výsledná rovnice tedy je⁵

$$\rho \ddot{\psi}(z, t) = T \psi''(z, t), \quad \text{neboli} \quad \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(z, t) = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t). \quad (2.20)$$

⁴Pro funkci f diferencovatelnou na intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

⁵Alternativně můžeme funkci $\psi(z, t)$ rozvinout do Taylorovy řady

$$\psi(z + \Delta z, t) = \psi(z, t) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(z, t) \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t) \Delta z^2 + O(\Delta z^3).$$

Dosazením tohoto rozvoje do (2.16) (pro $\Delta z \in \{a, -a\}$) dostaneme

$$\rho \ddot{\psi}(z, t) = T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t) + \frac{O(a^3)}{a^2} \right).$$

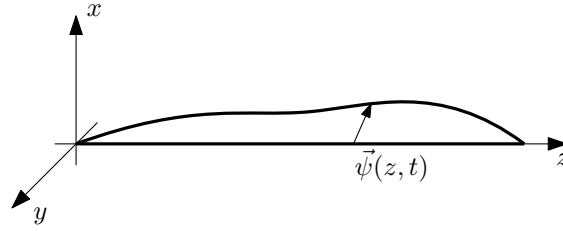
V limitě $a \rightarrow 0$ člen $O(a^3)$ vymizí (zbytek v Taylorově rozvoji má tu vlastnost, že limita $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{O(\Delta z^3)}{a^3}$ je konečná).

Tato rovnice se nazývá *vlnová rovnice* a budeme se s ní setkávat po celý zbytek semestru (skript).

Povšimněte si, že původní diskrétní rovnice (2.16) určovala hodnotu funkce $\psi(z, t)$ pouze v bodech $z = la$, $l \in \mathbb{Z}$. V limitě $a \rightarrow 0$ se tyto body zahustily a výsledkem je rovnice pro všechna $z \in \mathbb{R}$.

2.2 Kmity struny a vlnová rovnice

Odvoďme vlnovou rovnici pro strunu ještě jednou, ale nyní rovnou ze spojitého popisu. Necht' je struna v klidu natažena podél osy z na napětí T . Výchylku bodu $(z, 0, 0)$ budeme popisovat vektorem $\vec{\psi}(z, t) = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)$, viz obrázek (2.5).



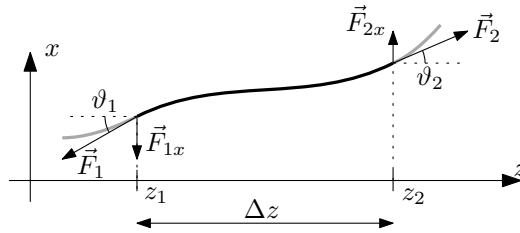
Obrázek 2.5: Výchylka struny z rovnovážné polohy je popisována vektorem $\vec{\psi}(z, t)$.

Složky ψ_x a ψ_y představují dvě nezávislé složky příčných vychylek – hovoříme o dvou polarizacích příčného vlnění. Složka ψ_z představuje podélné kmity ve struně. My budeme uvažovat pouze příčné kmity v jednom směru, tzn. omezíme se na tvar vektoru $\psi = (\psi_x, 0, 0)$ (a přestaneme psát index x).

Uvažujme úsek struny mezi body z_1 a z_2 . Dle první věty impulsové je změna celkové hybnosti tohoto kousku struny úměrná výslednici vnějších sil,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_x, \quad (2.21)$$

kde síly $\vec{F}_1$, resp. $\vec{F}_2$, působí na levý, resp. pravý, konec zvoleného úseku struny. Viz obrázek 2.6.



Obrázek 2.6: Síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ působící na úsek struny. V místě z_1 , resp. z_2 , svírá struna s vodorovným směrem úhel ϑ_1 , resp. ϑ_2 .

Budeme uvažovat pouze malé příčné kmity – z tohoto předpokladu budou plynout následující aproximace. Zajímají pouze příčné průměty sil, $\vec{F}_{1x}$ a $\vec{F}_{2x}$:

$$F_{x1} = -|F_1| \sin \vartheta_1 \approx -T \operatorname{tg} \vartheta_1 = -T \frac{\partial \psi}{\partial z}(z_1, t), \quad F_{x2} = |F_2| \sin \vartheta_2 \approx T \operatorname{tg} \vartheta_2 = T \frac{\partial \psi}{\partial z}(z_2, t), \quad (2.22)$$

kde jsme využili předpoklad, že při malých výchylkách se velikost sil F_i jen málo liší od napětí struny v rovnovážné poloze T a funkci sinus můžeme nahradit funkcí tangens, kterou dále nahradíme derivací funkce ψ ve směru z .⁶

Podélné síly se v aproximaci malých výchylek přesně vyruší:

$$F_{z1} = -|F_1| \cos \vartheta_1 \approx -T, \quad F_{z2} = |F_2| \cos \vartheta_2 \approx T. \quad (2.23)$$

V první větě impulsové (2.21) je netriviální tedy pouze složka x . Její pravou stranu můžeme psát jako

$$F_x^{(e)} = T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}(z_2, t) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(z_1, t) \right) = T \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(\xi, t), \quad (2.24)$$

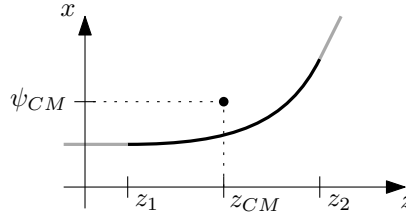
kde jsme použili Lagrangeovu větu o přírůstku funkce, tj. $\xi \in (z_1, z_2)$ (podrobněji viz přechodí kapitola o spojitě limitě řetízku), a označili $\Delta z = z_2 - z_1$. Podívejme se dále podrobněji na levou stranu věty impulsové. Celkovou hybnost můžeme vyjádřit pomocí rychlosti těžiště $\vec{V}_{CM}$:

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM}, \quad \vec{V}_{CM} = (V_x, 0, 0), \quad (2.25)$$

kde M značí celkovou hmotnost vybraného úseku struny. Poloha těžiště je dána jako

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_l \rho \vec{r} dl = \left(\psi_{CM}, 0, z_{CM} = \frac{z_1 + z_2}{2} \right), \quad (2.26)$$

kde ψ_{CM} jsme označili polohu těžiště na ose x , viz obrázek 2.7.



Obrázek 2.7: Těžiště úseku struny.

Výpočet ψ_{CM} dává

$$\psi_{CM}(t) = \frac{\rho}{M} \int_{z_1}^{z_2} \psi(z, t) dz = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} \psi(z, t) dz = \psi(\xi', t) \frac{\Delta z}{\Delta z}, \quad (2.27)$$

kde jsme použili integrální větu o střední hodnotě⁷, $\xi' \in (z_1, z_2)$. Levá strana věty impulsové tedy má tvar

$$\frac{dP_x}{dt} = M \frac{d^2}{dt^2} \psi_{CM} = M \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\xi', t). \quad (2.28)$$

Celkový tvar první věty impulsové (její netriviální složka x) v aproximaci malých výchylek je

$$\rho \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\xi', t) = T \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(\xi, t). \quad (2.29)$$

Po vykrácení Δz můžeme provést limitu $z_2 \rightarrow z_1$ a dospějeme k *vlnové rovnici*

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(z, t) = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t).} \quad (2.30)$$

⁶Kladné směry úhlů jsou voleny tak, aby korespondovaly s kladnou hodnotou derivace v daném bodě. Jelikož síla F_{1x} míří do záporného směru osy x , přidali jsme explicitní znaménko u jejího vyjádření.

⁷Pro funkci f spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a).$$

2.3 Podélné kmity

Porovnejme nyní příčné kmity s podélnými, které jsme u spojitého odvození vlnové rovnice rovnou vynechali. Pracujme znovu s diskrétním modelem závaží a pružin a uvědomme si, že napětí $T_{\text{př.}}$, resp. $T_{\text{pod.}}$, vystupující v pohybových rovnicích pro příčné, resp. podélné, kmity je dáno vztahy

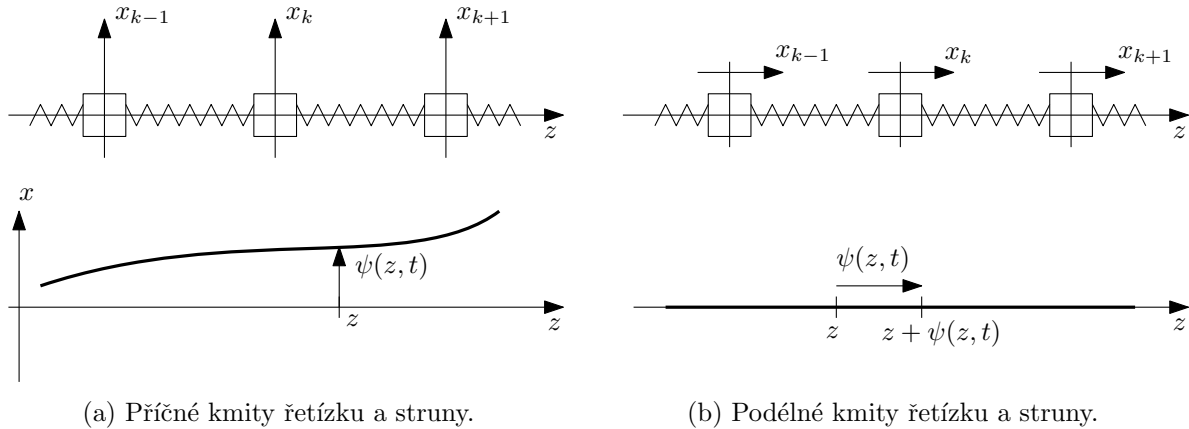
$$T_{\text{př.}} = ka \left(1 - \frac{a_0}{a}\right), \quad T_{\text{pod.}} = ka. \quad (2.31)$$

Pro pružiny jejichž klidová délka a_0 je blízká a bude platit

$$T_{\text{př.}} \ll T_{\text{pod.}} \quad (2.32)$$

Tento předpoklad je pro model struny obvykle splněn. Při napínání struny je její prodloužení mnohem menší než její celková délka, $\Delta l \ll l$. Vybudit podélné kmity srovnatelné amplitudy je tedy daleko náročnější než u příčných kmitů. Proto jsme je v předchozím popisu mohli zanedbat. Pro podélné i příčné kmity bychom odvodili stejné vlnové rovnice lišící se pouze příslušným napětím T : $T_{\text{pod.}}$ nebo $T_{\text{př.}}$.

Na závěr ještě srovnáme popisy výchylek pro podélné a příčné kmity pomocí funkce $\psi(z, t)$ na obrázku 2.8.



Obrázek 2.8: Srovnání popisů podélných a příčných kmitů.

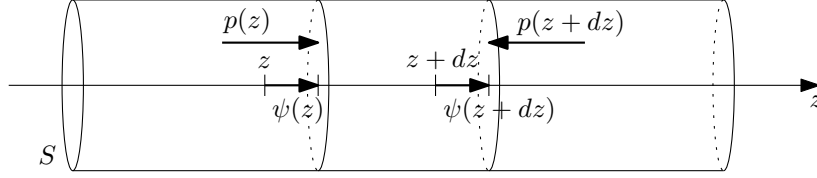
U příčných kmitů je poloha kousku struny dána vektorem $(z, \psi(z, t))$. U podélných kmitů je vychýlený kus struny na souřadnici $z + \psi(z, t)$.

2.4 Zvuk

Zvuk není nic jiného než podélné vlnění v materiálu. Odvoďme nyní vlnovou rovnici pro tlakové změny způsobené podélným vlněním v ideálním plynu. Uvažujme trubici plynu podél osy z . Podélné výchylky plynu z rovnovážné polohy opět popíšeme funkcí $\psi(z, t)$. Uvažujme malý úsek trubice $\langle z, z + dz \rangle$, pak vlivem výchylek se plyn posune na pozici

$$\langle z + \psi(z, t), z + dz + \psi(z + dz, t) \rangle. \quad (2.33)$$

Na levý konec úseku plynu působí tlak $p(z, t)$, na pravý konec tlak $p(z + dz, t)$. Viz obrázek 2.9.



Obrázek 2.9: Trubice vzduchu a její malý úsek mezi body $\langle z, z + dz \rangle$. Funkce $\psi(z, t)$ popisuje podélnou výchylku částic plynu z rovnovážné polohy. Funkce $p(z, t)$ popisuje tlak v každém místě trubice.

Pohybová rovnice zvoleného úseku bude opět dána první větou impulsovou:

$$dM \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = p(z)S - p(z + dz)S, \quad (2.34)$$

kde $dM = \rho dV = \rho_0 dV_0$. dV_0 označuje původní objem úseku, $dV_0 = S dz$, dV je objem po posunutí o výchylky $\psi(z, t)$. Hmotnost sledovaného kousku zůstává konstantní, naše myšlená hranice se posouvá s přesunem molekul plynu. Objem dV se dá vyjádřit následujícím způsobem jako průřez krát délka:

$$dV = S \left((z + dz + \psi(z + dz)) - (z + \psi(z)) \right) = S \left(1 + \frac{\psi(z + dz) - \psi(z)}{dz} \right) dz = S \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz. \quad (2.35)$$

Dalším důležitým předpokladem je, že děj v plynu je adiabatický – tedy, že se během změn tlaku nestihne vyměňovat teplo mezi jednotlivými částmi plynu⁸. Pro adiabatický děj v ideálním plynu platí

$$pV^\kappa = \text{konst.}, \quad (2.36)$$

kde κ je Poissonova konstanta příslušná danému plynu. V našem případě uvažujeme plyn v našem malém úseku o objemu dV , takže máme

$$p_0 (dV_0)^\kappa = p dV^\kappa, \quad (2.37)$$

kde p_0 označuje tlak plynu v rovnovážné poloze. Vyjádříme-li tlak p :

$$p = p_0 \left(\frac{dV_0}{dV} \right)^\kappa = p_0 \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^{-\kappa} \approx p_0 \left(1 - \kappa \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \quad (2.38)$$

kde jsme dosadili za dV z (2.35), za $dV_0 = S dz$ a v poslední rovnosti použili Taylorův rozvoj do prvního řádu funkce $(1 + x)^\alpha$.

Rozdíl tlaků v různých místech můžeme zapsat pomocí derivace:

$$\frac{p(z + dz) - p(z)}{dz} = \frac{\partial p}{\partial z} \approx -p_0 \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (2.39)$$

kde jsme využili (2.38). Dosadíme-li nyní předchozí výsledek do pohybové rovnice (2.34) (po rozepsání $dM = \rho_0 S dz$):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = p_0 \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (2.40)$$

Toto je vlnová rovnice popisující podélné kmity v trubici s plynem. V případě, že bychom uvažovali izotermický děj (který splňuje $pV = \text{konst.}$), chyběla by nám ve výsledku Poissonova konstanta κ .

⁸Newton uvažoval děj izotermický. Rychlost zvuku ve vzduchu mu pak vyšla špatně.

2.5 Kmity struny s pevnými konci

Uvažujme nyní strunu délky L , která je napjatá mezi body $z = 0$ a $z = L$. Pohyb struny se řídí vlnovou rovnicí:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad z \in (0, L), t \in \mathbb{R}, \quad (2.41)$$

kde ρ_0 je délková hustota a T_0 je napětí na struně. Dále uvažujeme následující *okrajové podmínky* – struna je na koncích nepohyblivě upevněna, tzn.

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi(L, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.42)$$

Řešení se pokusíme najít metodou *separace proměnných*. Předpokládáme řešení ve tvaru

$$\psi(z, t) = Z(z) T(t), \quad (2.43)$$

s neznámými funkcemi $Z(z)$ a $T(t)$ jedné proměnné. Pokud tento *ansatz* dosadíme do vlnové rovnice (2.41) obdržíme

$$Z(z) \ddot{T}(t) = \frac{T_0}{\rho_0} Z''(z) T(t), \quad (2.44)$$

pokud nyní tuto rovnici vydělíme $\rho_0 Z(z) T(t)$ obdržíme separovanou rovnici

$$\frac{Z''}{Z}(z) = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\ddot{T}}{T}(t), \quad \forall z, t \in \mathbb{R}, \quad (2.45)$$

kde levá strana je závislá pouze na proměnné z a pravá strana pouze na t . Jelikož tato rovnice musí být splněna pro všechna $z, t \in \mathbb{R}$, tak se levá a pravá strana musí rovnat společné konstantě⁹, označme ji $C \in \mathbb{R}$:

$$\frac{Z''}{Z}(z) = C = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\ddot{T}}{T}(t). \quad (2.46)$$

Jednoduchou úpravou dospějeme ke dvěma obyčejným diferenciálním rovnicím pro funkce $Z(z)$ a $T(t)$ se zatím neurčenou konstantou C :

$$Z'' - CZ = 0, \quad \ddot{T} - C \frac{T_0}{\rho_0} T = 0. \quad (2.47)$$

Než se pustíme do řešení rovnic (2.47), podívejme se na okrajové podmínky (2.42), do kterých dosadíme *ansatz* (2.43):

$$\psi(0, t) = Z(0)T(t) = 0, \quad \psi(L, t) = Z(L)T(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.48)$$

Požadujeme-li netriviální $T(t)$ (a tedy i nenulové řešení $\psi(z, t)$), tak se okrajové podmínky (2.48) redukují na:

$$Z(0) = 0, \quad Z(L) = 0. \quad (2.49)$$

⁹Zderivujeme-li rovnici (2.45) podle proměnné z , resp. t , obdržíme:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{Z''}{Z} \right) = 0, \quad 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_0}{T_0} \frac{\ddot{T}}{T} \right).$$

Pokud má funkce nulovou derivaci, musí tato funkce být konstantní:

$$\frac{Z''}{Z} = -C_1, \quad \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\ddot{T}}{T} = -C_2.$$

Ukázali jsme tedy, že se se levá, resp. pravá, strana rovnice (2.45) rovnají konstantě $-C_1$, resp. $-C_2$. Ale jelikož se levé strany výše napsaných rovnic rovnají pro $\forall z, t$, tak musí být $C_1 = C_2$.

Tyto tedy budeme muset splnit při řešení rovnice (2.47) pro funkci $Z(z)$ se zatím neurčenou konstantou C . Řešení $Z(z)$ je

$$Z(z) = c_1 e^{\sqrt{C}z} + c_2 e^{-\sqrt{C}z}, \quad (2.50)$$

kde c_1 a c_2 jsou integrační konstanty. Okrajové podmínky tedy vypadají následovně

$$Z(0) = c_1 + c_2 = 0, \quad Z(L) = c_1 e^{\sqrt{C}L} + c_2 e^{-\sqrt{C}L} = 0. \quad (2.51)$$

Po dosazení z první rovnice do druhé máme podmínku

$$c_1 e^{-\sqrt{C}L} (e^{2\sqrt{C}L} - 1) = 0 \quad (2.52)$$

Požadujeme netriviální řešení, tedy $c_1 (= -c_2) \neq 0$; exponenciála $e^{-\sqrt{C}L}$ je vždy nenulová; je tedy nutné, aby byl nulový výraz v závorce. To je možné pouze pro $C < 0$, tzn. $\sqrt{C} = i\sqrt{|C|}$, a můžeme psát

$$e^{2i\sqrt{|C|}L} = \cos(2\sqrt{|C|}L) + i \sin(2\sqrt{|C|}L) = 1, \quad (2.53)$$

s řešením

$$2\sqrt{|C|}L = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.54)$$

To znamená, že přípustné konstanty C , pro které řešení splňuje okrajové podmínky, jsou číslovane přirozenými čísly a konkrétně dané jako

$$C_m = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2. \quad (2.55)$$

Označme $k_m = \frac{m\pi}{L}$, pak můžeme psát $\sqrt{|C_m|} = k_m = \frac{m\pi}{L}$.

Tvar funkce $Z(z)$. Jedna okrajová podmínka dává $c_2 = -c_1$. Podmínka reálnosti řešení vyžaduje $c_2 = \bar{c}_1$. To znamená, že $c_1 = ic$ a $c_2 = -ic$, kde $c \in \mathbb{R}$.

$$Z_m(z) = c (ie^{ik_m z} - ie^{-ik_m z}) = -2c \sin(k_m z) = A \sin(k_m z). \quad (2.56)$$

Ještě nám ke každému přípustnému C_m (tzn. tomu splňujícímu okrajové podmínky) zbývá řešit příslušnou časovou rovnici pro $T(t)$, viz (2.47):

$$\ddot{T} + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{T_0}{\rho_0} T = 0. \quad (2.57)$$

Tato má řešení tvaru:

$$\hat{T}_m(t) = B \sin\left(\frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} t + \varphi_m\right), \quad (2.58)$$

kde úhlová frekvence ω_m lze napsat pomocí vlnového čísla k_m jako

$$\omega_m = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k_m = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \frac{m\pi}{L}, \quad k_m = \frac{m\pi}{L}. \quad (2.59)$$

Výsledné řešení pohybu struny $\psi_m(z, t)$ příslušející přípustné hodnotě konstanty C_m získáme dosazením do (2.43):

$$\psi_m(z, t) = Z_m(z) T_m(t) = A_m \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} t + \varphi_m\right), \quad (2.60)$$

kde jsme sdružili závislé integrační konstanty a pojmenovali je $A_m = AB$. Tyto řešení představují vibrační módy struny. Řešení vyšlo ve tvaru tzv. stojatých vln, tzn. ve tvaru $\psi(z, t) = Z(z) \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde si vlna zachovává svůj tvar $Z(z)$ a jen se mění její amplituda harmonickou funkcí.

Jelikož vlnová rovnice (2.41) je lineární, je řešením i lineární kombinace všech výše nalezených řešení:

$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m(z, t), \quad (2.61)$$

kde koeficienty lineární kombinace zastanou amplitudy A_m schované již ve funkcích $\psi_m(z, t)$ (2.60). Výsledné obecné řešení nalezené metodou separace proměnných je

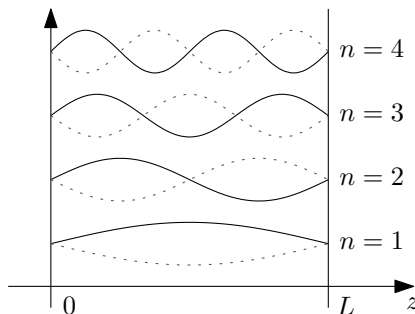
$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(k_m z) \sin(\omega_m t + \varphi_m), \quad (2.62)$$

kde úhlová frekvence ω a vlnové číslo k splňují následující disperzní vztah a přípustné hodnoty vlnových čísel k_m jsou

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k, \quad k_m = \frac{2\pi m}{L}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.63)$$

Konstanty A_m a φ_m jsou dány počátečními podmínkami, naproti tomu konstanty ω_m a k_m jsou dány vlastnostmi fyzikálního systému, který zkoumáme, zde tedy délkou struny L , její hustotou ρ_0 a napětím v ní T_0 (a okrajovými podmínkami).

Na obrázku 2.10 jsou znázorněny první čtyři módy tohoto řešení (tzn. funkce ψ_1 až ψ_4).



Obrázek 2.10: První čtyři módy pohybu struny s pevnými konci. Tečkovaně jsou naznačeny tvary módů posunuté o polovinu časové periody.

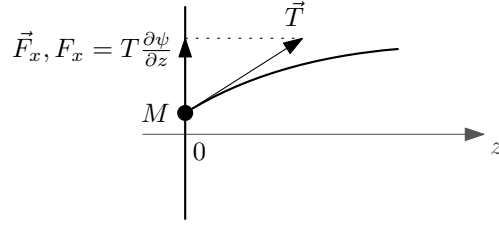
2.5.1 Podmínka volného konce

Druhým typem okrajové podmínky na struně konečné délky je okrajová podmínka volného konce. Fyzikálně to znamená, že konec struny může bez tření volně klouzat po tyči kolmé na osu z . V následujícím textu bez újmy na obecnosti zvolme $z = 0$.

Uvažujeme-li, že upevnění struny má hmotnost M , pak Newtonova pohybová rovnice pro konec struny bude mít podobu

$$M \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(0, t) = F_x = T \frac{\partial \psi}{\partial z}(0, t), \quad (2.64)$$

kde na pravé straně je příčná síla od struny působící na upevnění struny.



Obrázek 2.11: Příčná síla působící na závěs hmotnosti M .

Pro nehmotný závěs, $M = 0$ dostáváme z pohybové rovnice okrajovou podmínku *volného konce* tvaru

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(0, t) = 0, \quad (2.65)$$

tedy že na upevnění nepůsobí žádná příčná síla; geometricky – struna do místa upevnění přichází vodorovně.

2.6 Matematická vsuvka: Fourierovy řady

Mějme periodickou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periodou $2L$. Pak Fourierovou řadou f_F funkce f nazveme následující funkci

$$f_F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi z}{L} + b_m \sin \frac{m\pi z}{L} \right), \quad (2.66)$$

kde koeficienty a_m a b_m jsou dané vztahy:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(z) \cos \frac{m\pi z}{L} dz, \quad m \in \mathbb{N}_0; \quad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(z) \sin \frac{m\pi z}{L} dz, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.67)$$

Pro po částech diferencovatelné funkce platí, že v bodech spojitosti Fourierova řada konverguje k původní funkci f , $f_F(z) = f(z)$. Pro bod nespojitosti z_0 platí

$$f_F(z_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{z \rightarrow z_0+} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0-} f(z) \right), \quad (2.68)$$

tedy Fourierova řada v tomto bodě konverguje k průměru jednostranných limit funkce f .

Fourierova řada představuje rozvoj periodické funkce f do diskrétní superpozice harmonických vln.

Pro sudé funkce ($f(x) = f(-x)$), resp. liché funkce ($f(x) = -f(-x)$), se Fourierova řada (2.66) a vzorce pro koeficienty a_m a b_m (2.67) zjednoduší. Pro **sudé funkce** dostaneme

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \cos \frac{m\pi z}{L} dz, \quad b_m = 0, \quad f_F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos \frac{m\pi z}{L}. \quad (2.69)$$

Pro **liché funkce**:

$$a_m = 0, \quad b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin \frac{m\pi z}{L} dz, \quad f_F(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin \frac{m\pi z}{L}. \quad (2.70)$$

*Poznámka z pohledu lineární algebry: Fourierova řada je vlastně rozklad vektoru f z vektorového prostoru periodických funkcí $\mathcal{F}$ do (nekonečné) báze

$$\mathcal{B} = \{(\cos k_m z)_{m=0}^{+\infty}, (\sin k_m z)_{m=1}^{+\infty}\}, \quad (2.71)$$

kde $k_m = \frac{m\pi}{L}$. Jestliže navíc zavedeme skalární součin dvou periodických funkcí f a g ($f, g \in \mathcal{F}$) jako

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(z)g(z) dz, \quad (2.72)$$

potom koeficienty a_m a b_m nejsou nic jiného než koeficienty lineární kombinace získané jako projekce vektoru f na vektory báze pomocí skalárního součinu (2.72)¹⁰:

$$a_m = \langle f, \cos k_m z \rangle, \quad b_m = \langle f, \sin k_m z \rangle, \quad (2.73)$$

těmto koeficientům se v lineární algebře říká Fourierovy koeficienty.

2.6.1 Sudé a liché prodloužení

Mějme funkci $f : \langle 0, L \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Definujme její tzv. *sudé a liché prodloužení* $f_{\text{sudé}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_{\text{liché}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Nejprve definujeme funkce $f_{\text{sudé}}$ a $f_{\text{liché}}$ na intervalu $\langle 0, L \rangle$ tak, aby souhlasily s původní funkcí f :

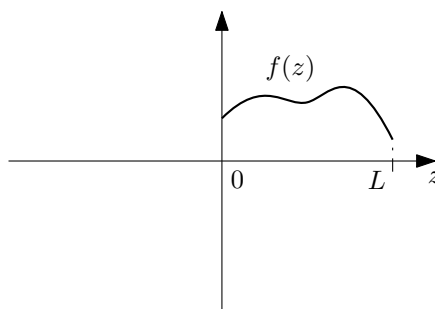
$$f_{\text{sudé}}|_{\langle 0, L \rangle} = f, \quad f_{\text{liché}}|_{\langle 0, L \rangle} = f. \quad (2.74)$$

Pak dodefinujeme funkce $f_{\text{sudé}}$ a $f_{\text{liché}}$ na intervalu $\langle -L, 0 \rangle$ takto:

$$f_{\text{sudé}}(z) = f(-z), \quad f_{\text{liché}}(z) = -f(-z), \quad z \in \langle -L, 0 \rangle, \quad (2.75)$$

tzn. tak, aby funkce $f_{\text{sudé}}$ byla sudá na intervalu $\langle -L, L \rangle$ a funkce $f_{\text{liché}}$ lichá¹¹ na $\langle -L, L \rangle$.

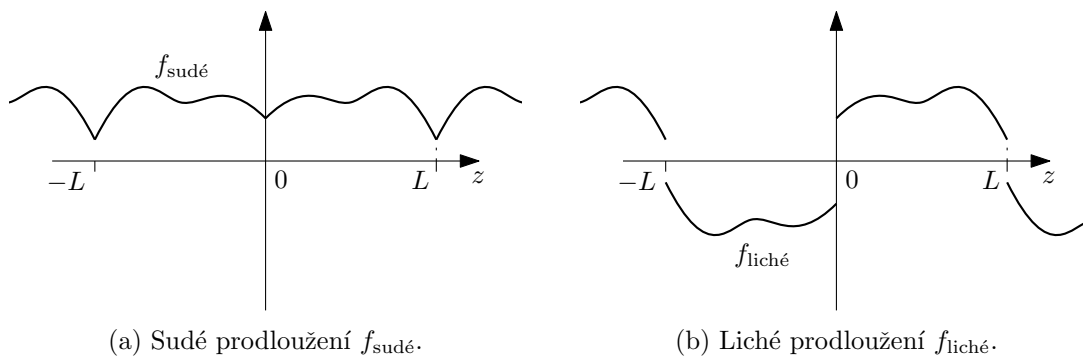
Na závěr funkce $f_{\text{sudé}}$ a $f_{\text{liché}}$ jednoznačně dodefinujeme na celé $\mathbb{R}$ tak, aby se jednalo o periodické funkce s periodou $2L$. Výsledek těchto prodloužení pro konkrétní případ funkce f z obrázku 2.12 vidíte na obrázku 2.13.



Obrázek 2.12: Původní funkce $f : \langle 0, L \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná pouze na intervalu $\langle 0, L \rangle$.

¹⁰S výjimkou koeficientu a_0 , kde nám vadí nenormovanost funkce $f(z) = 1$, $\langle f, f \rangle = 2$.

¹¹U lichého prodloužení může nastat problém pokud $f(0) \neq 0$ a $f(L) \neq 0$ (funkce pak nemůže být lichá, resp. periodická). Tento problém můžeme bez obav ignorovat, jelikož koeficienty Fourierovy řady a_m a b_m jsou dané integrálními vzorci a integrály nejsou citlivé na změnu funkční hodnoty integrované funkce v jednom bodě. Můžeme si tedy představovat, že při lichém prodloužování redefinujeme původní funkci f tak, že položíme $f(0) = f(L) = 0$.



Obrázek 2.13: Sudé a liché prodloužení funkce f .

Ze zadané funkce $f : \langle 0, L \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jsme získali periodické sudé, resp. liché, funkce $f_{\text{sudé}}$, resp. $f_{\text{liché}}$. Můžeme tedy počítat jejich Fourierovy řady, které díky sudosti, resp. lichosti, vyjdou v následujících tvarech:

$$f_{\text{sudé}}(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos \frac{m\pi z}{L}, \quad f_{\text{liché}}(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin \frac{m\pi z}{L}, \quad (2.76)$$

kde koeficienty a_m a b_m jsou dle (2.69), resp. (2.70), dané jako

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{L} \int_0^L f_{\text{sudé}}(z) \cos \frac{m\pi z}{L} dz = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \cos \frac{m\pi z}{L} dz, \\ b_m &= \frac{2}{L} \int_0^L f_{\text{liché}}(z) \sin \frac{m\pi z}{L} dz = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin \frac{m\pi z}{L} dz, \end{aligned} \quad (2.77)$$

kde jsme využili toho, že $f_{\text{sudé}}(z) = f_{\text{liché}}(z) = f(z)$ pro $z \in \langle 0, L \rangle$. Pak platí

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos \frac{m\pi z}{L} = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin \frac{m\pi z}{L} \quad \text{pro } z \in \langle 0, L \rangle. \quad (2.78)$$

Podarilo se nám tedy funkci f na intervalu $\langle 0, L \rangle$ vyjádřit jako lineární kombinaci buď pouze funkcí sinus anebo pouze funkcí cosinus.

2.7 Řešení počátečních podmínek pro pevné konce

Nyní chceme najít konkrétní pohyb struny, máme-li zadané příslušné počáteční podmínky. Napišme si postup této úlohy pro okrajové podmínky **pevných konců**.

Počáteční podmínky jsou tvořeny počáteční polohou struny a počáteční rychlostí struny (pro jednoduchost volíme, že jsou zadané v čase $t = 0$). Tyto jsou zadané funkcí počáteční polohy $f : \langle 0, L \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ (musíme zadat počáteční výchylku každého bodu struny) a funkcí počáteční rychlosti $g : \langle 0, L \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ (to samé pro počáteční rychlost každého bodu struny). Naše hledané konkrétní řešení tedy musí splňovat:

$$\psi(z, 0) = f(z), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(z, 0) = g(z), \quad \forall z \in \langle 0, L \rangle. \quad (2.79)$$

Abychom tohoto dosáhli, máme k dispozici integrační konstanty A_m a φ_m , jejichž hodnotu chceme určit.

Rozepsané počáteční podmínky. Rozepišme levé strany rovnic (2.79), tzn. dosadíme čas $t = 0$ do obecného řešení (2.62) a jeho časové derivace:

$$\begin{aligned}\psi(z, 0) &= \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m \sin \varphi_m) \sin \frac{m\pi z}{L} = f(z), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(z, 0) &= \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m \omega_m \cos \varphi_m) \sin \frac{m\pi z}{L} = g(z).\end{aligned}\quad (2.80)$$

Liché prodloužení funkcí f a g . Nyní bychom potřebovali napsat funkce f a g jako Fourierovy řady, které budou obsahovat pouze funkce $\sin \frac{m\pi z}{L}$. Toho snadno dosáhneme, pokud si spočítáme řady funkcí f a g v **lichém prodloužení** (viz kapitola 2.6.1):

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m \sin \frac{m\pi z}{L}, \quad g(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} g_m \sin \frac{m\pi z}{L}, \quad (2.81)$$

kde koeficienty f_m a g_m jsou dané následujícími vzorci:

$$f_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin \left(\frac{m\pi z}{L} \right) dz, \quad g_m = \frac{2}{L} \int_0^L g(z) \sin \left(\frac{m\pi z}{L} \right) dz. \quad (2.82)$$

Výsledné rovnice pro koeficienty A_m , φ_m . Vlastní rovnice pro koeficienty A_m a φ_m získáme porovnáním řad (2.80) a (2.81) člen po členu:

$$A_m \sin \varphi_m = f_m, \quad A_m \omega_m \cos \varphi_m = g_m. \quad (2.83)$$

Tyto rovnice můžeme (formálně¹²) vyřešit:

$$A_m = \sqrt{f_m^2 + \frac{g_m^2}{\omega_m^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_m = \frac{f_m \omega_m}{g_m}. \quad (2.84)$$

2.8 d'Alembertovo řešení vlnové rovnice

Uvažujme vlnovou rovnici tvaru

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (2.85)$$

kterou přepíšeme do následujícího tvaru tím, že se na parciální derivace začneme dívat jako na diferenciální operátory:

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0. \quad (2.86)$$

Diferenciální operátor na levé straně předchozí rovnice se nazývá *d'Alembertův operátor*¹³ a značí se $\square$:

$$\square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.87)$$

Díky záměnnosti parciálních derivací platí i pro derivace poučka $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ a můžeme psát

$$\square \psi = \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi = 0 \quad (2.88)$$

¹²Formální je druhá rovnice, která ve skutečnosti reprezentuje dvě rovnice $\sin \varphi_m = \frac{f_m}{A_m}$ a $\cos \varphi_m = \frac{g_m}{A_m \omega_m}$, které jednoznačně definují úhel φ_m pro $A_m \neq 0$. Pokud $A_m = 0$, příslušný mód chybí a na jeho fázi nezáleží.

¹³Jiná konvence zavádí d'Alembertův operátor s opačným znaménkem.

Chtěli bychom nyní zavést nové proměnné tak, aby se zjednodušil tvar rovnice (2.88). Toho dosáhneme zavedením proměnných ξ a η dle následujících předpisů

$$\xi = z - vt, \quad \eta = z + vt, \quad \left(z = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\eta - \xi}{2v} \right). \quad (2.89)$$

Přepíšme vlnovou rovnici v původních proměnných z, t do nových proměnných ξ, η . Definujeme novou funkci $\tilde{\psi}(\xi, \eta)$ definovanou pomocí substituce:

$$\tilde{\psi}(\xi, \eta) := \psi(z(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) = \psi\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2v}\right). \quad (2.90)$$

Inverzní substituce bude pak vypadat následovně

$$\psi(z, t) = \tilde{\psi}(z - vt, z + vt) = \tilde{\psi}(\xi, \eta). \quad (2.91)$$

Tyto substituční vztahy nám umožňují transformovat derivace podle jednotlivých proměnných. Derivujeme-li ψ podle proměnných z a t dostáváme podle řetězového pravidla¹⁴

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -v \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Zkombinujeme-li tyto výsledky do tvaru operátorů vyskytujících se v (2.88)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi &= \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \tilde{\psi} = -2 \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\psi}, \\ \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi &= \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \tilde{\psi} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

V řeči diferenciálních operátorů tedy máme

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} = -2 \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (2.94)$$

Dosadíme-li tyto výrazy do vlnové rovnice (2.88), máme

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.95)$$

Tato rovnice má řešení¹⁵ v podobě

$$\tilde{\psi}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad (2.96)$$

¹⁴Mějme funkci $f(x_1, \dots, x_k) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ a k -tici funkcí $g_i(y_1, \dots, y_l) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$. Funkci $h(y_1, \dots, y_l) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ získáme složením

$$h(y_1, \dots, y_l) = f(g_1(y_1, \dots, y_l), \dots, g_k(y_1, \dots, y_l))$$

Potom platí *řetězové pravidlo*

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} = \sum_{m=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial g_m}{\partial y_i}.$$

Toto pravidlo je rozšířením pravidla o derivování složené funkce, $[f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x)$, do více proměnných. Zde máme $\tilde{\psi}(\xi, \eta) \sim f(x_1, x_2)$, $\xi(z, t) \sim g_1(y_1, y_2)$, $\eta(z, t) \sim g_2(y_1, y_2)$.

¹⁵Pokud rovnici napíšeme v podobě

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} \right) = 0,$$

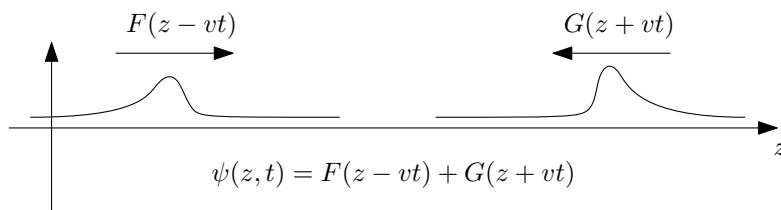
kde $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou libovolné reálné funkce jedné reálné proměnné (příslušně diferencovatelné). Pomocí původních proměnných je funkce $\psi(z, t)$ tvaru

$$\psi(z, t) = F(z - vt) + G(z + vt), \quad (2.97)$$

tomuto řešení říkáme *d'Alembertovo řešení vlnové rovnice*. Jaký je fyzikální význam tohoto řešení? Uvažujme nejprve situaci s $G \equiv 0$. V čase $t = 0$ představuje funkce $F(z)$ prostě tvar vybuzečné vlny. Dále se podíváme na vývoj místa konstantní fáze. *Fází* nazýváme argument funkce F , tzn. $z - vt$. Najdeme časovou závislost místa $z_c(t)$ jako řešení rovnice $z - vt = c$, kde c je libovolná konstanta. Toto je triviálně

$$z_c(t) = c + vt. \quad (2.98)$$

(pro počáteční podmínku $z_c(0) = z_0$ dostaneme $z_c(t) = z_0 + vt$). Konkrétní místo na vlně se tedy šíří rychlostí v . Část řešení $F(z - vt)$ tedy představuje vlnu (o tvaru funkce $F(z)$) šířící se jako celek v kladném směru osy z rychlostí v , této rychlosti se říká *fázová rychlost*. Analogicky, pokud bychom se dívali na funkci $G(z + vt)$, tato představuje vlnu tvaru $G(z)$ šířící se rychlostí v do záporného směru osy z .



Obrázek 2.14: d'Alembertovo řešení představující superpozici dvou proti sobě postupujících vln $F(z - vt)$ a $G(z + vt)$.

2.8.1 Vyzařování postupných vln

Jakým způsobem můžeme tyto postupné vlny vybudit? Uvažujme, že naše prostředí, např. struna, má v $z = 0$ kmitající zdroj, který svým pohybem udává výchylku v tomto bodě:

$$\psi(0, t) = y(t), \quad (2.99)$$

$y(t)$ je libovolná ale určená funkce. Podmínce tohoto typu, kdy udávám stav systému pro danou polohu, se obecně říká *okrajová podmínka*. Určuje tvar řešení na okraji studovaného systému. Toto je konkrétně podmínka v $z = 0$. Abychom získali jednoznačné řešení tohoto problému vyzařování, je třeba předepsat ještě druhou okrajovou podmínku na druhém okraji systému, zde $z = +\infty$. Požadujeme, aby z nekonečna nepřicházely žádné vlny, tzn. předepíšeme $G \equiv 0$. Této okrajové podmínce se říká *podmínka vyzařování*.

vidíme, že funkce $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta}$ je funkcí pouze proměnné η ,

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} = g(\eta).$$

Tuto nyní zintegrujeme podle η a dostaneme

$$\tilde{\psi}(\xi, \eta) = \underbrace{\int g(\eta) d\eta}_{G(\eta)} + F(\xi),$$

kde $F(\xi)$ je integrační konstantou vzhledem k integrování podle proměnné η .

Ted' již můžeme najít konkrétní tvar d'Alembertova řešení. Po dosazení $\psi(z, t) = F(z - vt)$ do (2.99):

$$\psi(0, t) = F(-vt) = y(t) \quad \longrightarrow \quad F(x) = y\left(-\frac{x}{v}\right) \quad (2.100)$$

Známe-li konkrétní tvar funkce $F(x)$ snadno již napíšeme

$$\psi(z, t) = F(z - vt) = y\left(-\frac{z - vt}{v}\right) = y\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (2.101)$$

Výsledné řešení je tedy tvaru

$$\boxed{\psi(z, t) = y\left(t - \frac{z}{v}\right).} \quad (2.102)$$

Co představuje výraz v argumentu budící funkce y ? Zlomek $\frac{z}{v}$ představuje dobu, kterou signálu vyzářenému v bodě $z = 0$ trvá došít se do místa z . To znamená, že vlna, kterou pozorují v místě z v čase t , se ze zdroje vyzářila v čase $t - \frac{z}{v}$. Tomuto času říkáme *retardovaný čas*:

$$t_r = t - \frac{z}{v}. \quad (2.103)$$

Symbolicky můžeme psát

$$\psi(z, t) = y(t_r). \quad (2.104)$$

2.8.2 Harmonická postupná vlna

Pokud zdroj harmonicky kmitá dle předpisu

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.105)$$

pak je vyzářená vlna tvaru

$$F(x) = y\left(-\frac{x}{v}\right) = A \cos\left[\omega\left(-\frac{x}{v}\right) + \varphi\right] = A \cos\left(\frac{\omega}{v}x - \varphi\right), \quad (2.106)$$

resp.

$$\psi(z, t) = y\left(t - \frac{z}{v}\right) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi\right] = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}z + \varphi\right). \quad (2.107)$$

Označíme-li vlnové číslo $k = \frac{\omega}{v}$ (disperzní vztah), dostáváme tvar *harmonické postupné vlny*

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad (2.108)$$

Pro funkci $G(x) = A \cos(kx + \varphi)$ máme vlnu postupující opačným směrem

$$\psi(z, t) = G(z + vt) = A \cos(\omega t + kz + \varphi). \quad (2.109)$$

2.9 Energie vlnění

Podívejme se nyní na vlnění na struně z energetického pohledu – nalezneme výrazy pro mechanickou energii v daném úseku struny. Pohybovou rovnici struny odvodili z první věty impulsové,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}. \quad (2.110)$$

Jelikož zákon zachování mechanické energie platí pro soustavy, kde nepůsobí vnější síly, a jelikož na zvolený úsek struny působí vnější síly od zbytku struny, nebude se energie v daném místě

struny zachovávat, ale bude se přelévát z jednoho místa na druhé. Tyto úvahy nyní kvantifikujeme.

Celková energie je sumou kinetické a potenciální energie. Kinetická energie malého úseku struny $\langle z, z + dz \rangle$ je

$$dT = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \rho dz \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \dot{\psi}^2 dz. \quad (2.111)$$

Zavedeme obecně pojem *hustoty energie* ε následujícím způsobem. Je-li dE energie obsažená v úseku $\langle z, z + dz \rangle$, definujeme hustotu energie ε jako

$$dE = \varepsilon dz. \quad (2.112)$$

Energie obsažená v konečně velkém úseku $\langle z_1, z_2 \rangle$ pak je dána jako

$$E = \int_{z_1}^{z_2} dE(z) = \int_{z_1}^{z_2} \varepsilon dz. \quad (2.113)$$

Zatímco jednotkou energie je $[E] = \text{J}$, jednotkou (délkové) hustoty energie je $[\varepsilon] = \text{J.m}^{-1}$.

Hustota kinetické energie tedy dle předchozí definice a výrazu (2.111)

$$\tau = \frac{1}{2} \rho \dot{\psi}^2. \quad (2.114)$$

Dále, pro odvození výrazu pro potenciální energii využijeme diskrétní model řetízku atomů a jeho následnou spojitou limitu. V úseku struny $\langle z, z + dz \rangle$ je celkový potenciál součtem potenciálních energií jednotlivých pružin,

$$dU = \frac{1}{2} \sum_l U_l. \quad (2.115)$$

Linearizovaný výraz pro nárůst potenciální energie při příčných kmitech již známe:

$$U_l = \frac{1}{2} k \left(1 - \frac{a_0}{a} \right) (\Delta \psi_l)^2 \quad (2.116)$$

Počet pružin mezi $\langle z, z + dz \rangle$ je $dN = \frac{dz}{a}$. Můžeme uvažovat, že všechna $\Delta \psi_l$ jsou přibližně stejná¹⁶ a tedy

$$dU = dN U_{l_0} = \frac{1}{2} k a \left(1 - \frac{a_0}{a} \right) \left(\frac{\Delta \psi_{l_0}}{a} \right)^2 dz \quad (2.117)$$

Provedením spojitě limity $a \rightarrow 0$ (a držení $T = k a \left(1 - \frac{a_0}{a} \right) = \text{konst.}$) dostaneme

$$dU = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz. \quad (2.118)$$

¹⁶Dá se to opět udělat i rigorózněji. Výraz $\frac{\Delta \psi_k}{a}$ se dá pomocí věty o střední hodnotě zapsat jako $\psi'(\xi_k, t)$ a poté

$$\Delta U = \sum_k \frac{1}{2} T \psi'(\xi_k, t)^2 a \xrightarrow{a \rightarrow 0} \Delta U = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} T \psi'(z, t)^2 dz = \frac{1}{2} T \psi'(\xi, t)^2 \Delta z,$$

kde jsme použili definici Riemannova integrálu jako limitu integrálních součtů a v poslední rovnosti integrální větu o střední hodnotě. Pokud nyní $\Delta z \rightarrow 0$, půjde $\xi \rightarrow z$ a dostanu

$$dU = \frac{1}{2} T \psi'(z, t)^2 dz.$$

Hustota potenciální energie pak je

$$u = \frac{1}{2}T(\psi')^2. \quad (2.119)$$

Nyní již můžeme napsat *hustotu celkové energie* na struně jako

$$\varepsilon = \tau + u = \frac{1}{2}\rho\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}T(\psi')^2. \quad (2.120)$$

Celková energie v úseku $\langle z_1, z_2 \rangle$ je dána integrálem

$$E_{\langle z_1, z_2 \rangle}(t) = \int_{z_1}^{z_2} \varepsilon(z, t) dz. \quad (2.121)$$

Podívejme se, jak se tato energie mění s časem:

$$\frac{dE_{\langle z_1, z_2 \rangle}}{dt} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dz = \int_{z_1}^{z_2} \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + T \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} dz. \quad (2.122)$$

Použijeme-li vlnovou rovnici, máme

$$\frac{dE_{\langle z_1, z_2 \rangle}}{dt} = T \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} dz = T \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz = T \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z_1}^{z_2}. \quad (2.123)$$

Definujeme-li veličinu *tok energie* S

$$S(z, t) = -T \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.124)$$

pak můžeme rovnost (2.123) psát jako

$$\boxed{\frac{dE_{\langle z_1, z_2 \rangle}(t)}{dt} = S(z_1, t) - S(z_2, t)}, \quad (2.125)$$

tedy že časová změna energie v daném úseku struny je dána bilancí vtoku a výtoku energie na jeho koncích. Tato rovnost představuje integrální zákon zachování energie na struně. Tok energie S není nic jiného než výkon sil napětí na struně:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -F_{pr} v = -T \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} = S. \quad (2.126)$$

Diferenciální tvar zákona zachování získáme limitou $z_2 \rightarrow z_1$. Přepíšeme levou stranu zákona zachování pomocí integrální věty o střední hodnotě,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\xi, t) \Delta z, \quad (2.127)$$

kde $\Delta z = z_2 - z_1$. Po dosazení do (2.125) (a vydělení Δz):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(\xi, t) = - \frac{S(z_2, t) - S(z_1, t)}{\Delta z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (2.128)$$

Provedením limity $\Delta z \rightarrow 0$ dostaneme diferenciální zákon zachování energie na struně¹⁷:

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial z} = 0}. \quad (2.129)$$

¹⁷Také bychom k němu mohli dospět jiným způsobem. Přepsat (2.125) jako

$$\frac{dE}{dt} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dz = - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial S}{\partial z} dz,$$

dát všechny členy na jednu stranu,

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial z} \right) dz = 0,$$

a jelikož tato rovnost musí platit pro libovolné z_1, z_2 , musí být integrand nulový.

Jedná se vlastně o rovnici kontinuity¹⁸. Časová změna hustoty energie je dána (prostorovou) změnou toku energie v daném místě.

Energetické veličiny (ε , τ , u , S) jsou kvadratické ve výchylce ψ . Neplatí tedy princip superpozice! Uvažujme superpozici dvou vln $\psi = \psi_1 + \psi_2$, pak

$$\varepsilon_{\psi_1+\psi_2} \neq \varepsilon_{\psi_1} + \varepsilon_{\psi_2}, \quad \text{atd.} \quad (2.130)$$

Například pro časovou derivaci máme

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi_1 + \psi_2}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2 + \underbrace{2\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}}_{\text{interferenční člen}}. \quad (2.131)$$

2.9.1 Energie v postupné vlně

Uvažujme vlnu postupující jedním směrem

$$\psi(z, t) = F(z - vt). \quad (2.132)$$

Označme $F'(x) = \frac{dF}{dx}$, pak jednotlivé derivace mají následující tvar a platí mezi nimi následující vztah:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = F'(z - vt), \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -vF'(z - vt) \quad \longrightarrow \quad -v\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (2.133)$$

Důsledkem toho platí rovnost hustoty kinetické a potenciální energie, $u = \tau$, neb

$$\tau = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho v^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = u \quad (2.134)$$

Pro celkovou energii tedy $\varepsilon = u + \tau = 2u = 2\tau$.

Podívejme se dále na tok energie v postupné vlně. Můžeme zvolit dvě různé úpravy:

$$S = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t} = Tv\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = 2\tau v = \varepsilon v \quad (2.135)$$

$$= \frac{T}{v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2, \quad (2.136)$$

kde jsme zavedli veličinu *impedance* $Z = \sqrt{T\rho}$ (po dosazení z $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$). Jeden výsledek tedy je

$$S = \varepsilon v, \quad \text{tok energie} = \text{hustota energie} \cdot \text{rychlost šíření vlny}. \quad (2.137)$$

Můžeme říct, že šíření vlny na struně je vlastně šíření energie podél struny. Anebo druhý výsledek:

$$S = Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \quad \text{tok energie} = \text{impedance} \cdot \text{kvadrát rychlosti}, \quad (2.138)$$

který říká jak přepočítat rychlost v daném bodě na tok energie v daném bodě – skrze konstantu úměrnosti zvanou *impedance*.

¹⁸Vzpomeňte na rovnici kontinuity v elektřině a magnetismu:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

Pro 1D problém (proud tekoucí jen ve směru osy z) bychom dostali

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0.$$

2.9.2 Příklad: Harmonická postupná vlna

Pro harmonickou vlnu,

$$F(x) = A \cos kx, \quad \psi(z, t) = F(z - vt) = A \cos(\omega t - kz), \quad (2.139)$$

dostaneme následující tvary hustot kinetické a potenciální energie a toku energie:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kz), \\ u &= \frac{1}{2} T A^2 k^2 \sin^2(\omega t - kz) = \frac{1}{2} \frac{T}{v^2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kz) = \tau, \\ S &= Z A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (2.140)$$

Pro střední hodnoty máme

$$\langle \tau \rangle = \langle u \rangle = \frac{1}{4} \rho A^2 \omega^2, \quad \langle S \rangle = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2. \quad (2.141)$$

Kapitola 3

Disperzní vztah, vlnové balíky, grupová rychlost

3.1 Fázová rychlost, disperzní vztah

3.1.1 Postupné vlnění

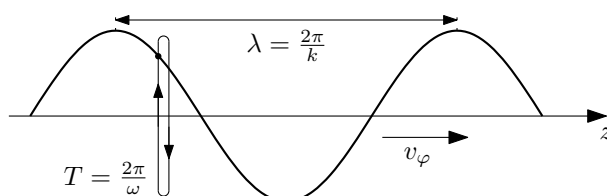
Uvažujme postupnou harmonickou vlnu $\psi(z, t)$ (anebo její komplexifikaci) tvaru:

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz), \quad \hat{\psi}(z, t) = Ae^{i(\omega t - kz)}, \quad (3.1)$$

kde ω nazýváme úhlová frekvence, $[\omega] = \text{s}^{-1}$, k vlnové číslo, $[k] = \text{m}^{-1}$. Tyto udávají periodu T , $[T] = \text{s}$, a vlnovou délku λ , $[\lambda] = \text{m}$, tohoto vlnění vztahy

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.2)$$

Tato vlna je znázorněná na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Harmonická postupná vlna. V libovolném daném bodě $z = z_0$ pozorují harmonické kmitání s periodou T . V prostoru má harmonická vlna vlnovou délku λ . Vlna se jako celek pohybuje fázovou rychlostí v_φ .

Studujme nyní funkci fáze $\varphi(t) = \omega t - kz$. Odvoďme vztah pro rychlosti pohybu místa konstantní fáze, $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{konst.}$ Vyjádřeme z této rovnice implicitně zadanou funkci $z(t)$:

$$\varphi(t) = \omega t - kz = \varphi_0 \quad \longrightarrow \quad z(t) = \frac{\omega}{k}t - \frac{\varphi_0}{k} = v_\varphi t - \frac{\varphi_0}{k}. \quad (3.3)$$

Z ní vyčteme tzv. *fázovou rychlost* o velikosti

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}. \quad (3.4)$$

3.1.2 Disperzní vztah

Na parametry ω a k zatím nemáme žádná omezení (kromě toho, že uvažujeme pouze kladné hodnoty). Chceme-li ale harmonickou postupnou vlnu vybudit v nějakém prostředí, nepodaří se to pro libovolné kombinace úhlové rychlosti ω a vlnového čísla k .

Příklad. Uvažujme vlnovou rovnici,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (3.5)$$

a dosaďme do ní harmonickou postupnou vlnu (3.1) a požadujeme, že vlnová rovnice je splněna pro všechny body prostoru a času. Jednotlivé derivace vyjdou následovně

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k^2 \psi, \quad (3.6)$$

a tedy

$$(\omega^2 - v^2 k^2) \psi = 0. \quad (3.7)$$

Požadujeme-li netriviální řešení (tzn. nenulovou amplitudu postupné vlny), musí být splněn vztah

$$\omega = vk. \quad (3.8)$$

Tato relace se nazývá *disperzní vztah*. Udává přípustné kombinace úhlových frekvencí ω a vlnových čísel k , pro které je postupná vlna řešením vlnové rovnice. Z tvaru disperzního vztahu vidíme, že konstanta v ve vlnové rovnici má význam fázové rychlosti.

Obecně je *disperzní vztah* tvaru

$$\omega = \omega(k), \quad k = k(\omega) \quad (3.9)$$

(jeden tvar je inverzí druhého). Tedy je to funkce $\omega(k)$, anebo $k(\omega)$ daná fyzikálním prostředím. Tento vztah charakterizuje vlnové vlastnosti daného prostředí v tom smyslu, že nám určuje přípustné (tzn. řešící rovnice popisující dané prostředí) harmonické postupné vlny šířící se tímto prostředím:

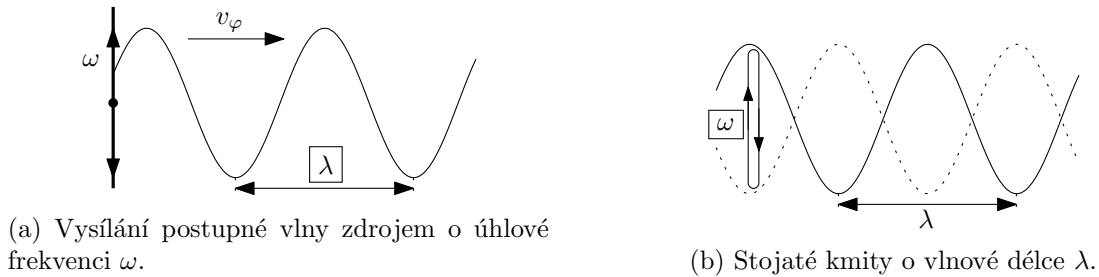
$$\psi(z, t) = A e^{i(\omega(k)t - kz)} = A e^{i(\omega t - k(\omega)z)}. \quad (3.10)$$

Fázová rychlost těchto postupných vln je dána vztahem

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}, \quad v_\varphi(k) = \frac{\omega(k)}{k}, \quad v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)}. \quad (3.11)$$

Vidíme, že obecně může fázová rychlost záviset na úhlové frekvenci ω , resp. vlnovém čísle k , vybuzečné vlny.

Interpretace dvou vzájemně inverzních disperzních vztahů v (3.9) je znázorněna na obrázku 3.2. Můžeme mít zdroj vlnění kmitající o úhlové frekvenci ω , pak funkce $k(\omega)$ udává, jaké bude mít vzniklé postupné vlnění vlnové číslo k (vlnovou délku λ). Anebo můžeme v prostředí vybudit stojaté vlny o vlnovém čísle k , pak výraz $\omega(k)$ řekne, s jakou úhlovou frekvencí ω budou kmitat.



Obrázek 3.2: Disperzní vztah udává vztah mezi úhlovou frekvencí ω a vlnovým číslem $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (a tedy vlnovou délkou λ).

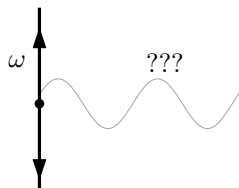
Ukázky různých disperzních vztahů jsou k nalezení v tabulce 3.1.

Prostředí	Disperzní vztah	Poznámka
struna, zvuk, EM vlna	$\omega = vk$	lineární disperzní vztah
řetízek atomů	$\omega = \omega_{max} \sin \beta k$	
vlnovod, ionosféra	$\omega^2 = \omega_{min}^2 + v^2 k^2$	
vlny na mělké vodě	$\omega^2 = gk \tanh kh$	gravitace g , hloubka h
vlny na hluboké vodě	$\omega = \sqrt{gk}, \omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3$	povrchové napětí σ , hustota vody ρ
neideální struna	$\omega^2 = \frac{T}{\rho} k^2 + \alpha k^4$	
světlo v látce	$\omega = \frac{c}{n} k, n(\omega) = \sqrt{1 + \alpha(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}}$	

Tabulka 3.1: Příklady disperzních vztahů v různých prostředích.

3.1.3 Reaktivní prostředí

Co se stane, když máme zdroj o úhlové frekvenci ω v daném prostředí, ale neexistuje žádné vlnové číslo $k \in \mathbb{R}$, které by splnilo daný disperzní vztah? V takovém případě hovoříme o *reaktivním prostředí*. Přesněji řečeno se dané prostředí pro danou úhlovou frekvenci jeví jako reaktivní. V tomto prostředí nelze vybudit postupnou vlnu o zvolené úhlové frekvenci ω . Prostředí, které umožňuje šíření postupné vlny s úhlovou frekvencí ω , říkáme *transparentní prostředí*.



Obrázek 3.3: Zdroj vln o úhlové frekvenci ω na hranici reaktivního prostředí.

Příklad. Podívejme se na příklad prostředí, která má následující tvar disperzního vztahu

$$\omega^2 = \omega_{min}^2 + v^2 k^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \omega_{min}^2 \psi, \quad (3.12)$$

kde daná vlnová rovnice vpravo vede na disperzní vztah uvedený vlevo.

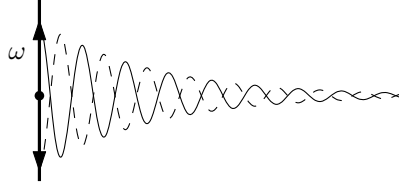
Pro $\omega \in \langle \omega_{min}, +\infty \rangle$ existuje $k \in \mathbb{R}$ splňující disperzní vztah. Pro $\omega \geq \omega_{min}$ se tedy jedná o transparentní prostředí. Pro $\omega < \omega_{min}$ nenajdu reálné vlnové číslo $k \in \mathbb{R}$, ale existuje řešení pro $k \in \mathbb{C}$:

$$k = i \sqrt{\frac{\omega_{min}^2 - \omega^2}{v^2}} = i\kappa. \quad (3.13)$$

Pokud toto řešení pro $k \in \mathbb{C}$ dosadím do postupné vlny (která dala vzniknout disperznímu vztahu) obdržím tvar vlny, kterou zdroj vyvolá v tomto reaktivním prostředí:

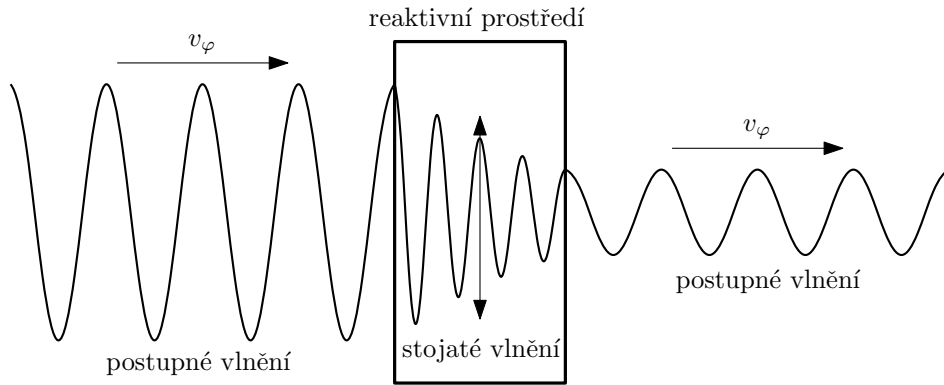
$$\psi(z, t) = e^{i(\omega t \pm k z)} = e^{i(\omega t \pm i\kappa z)} = e^{\mp \kappa z} e^{i\omega t}. \quad (3.14)$$

Tj. exponenciálně tlumenou stojatou vlnu, tato je znázorněna na obrázku 3.4. Těmto nešířícím se vlnám se říká *evanescentní vlny*. V reaktivním prostředí se tedy vlna nešíří, ale je exponenciálně tlumená – to je způsobeno komplexním řešením $i\kappa$, kdy se z harmonických kmitů (ve formě komplexní exponenciály) stane reálná exponenciála.



Obrázek 3.4: Zdroj vln o úhlové frekvenci ω na hranici reaktivního prostředí vytvoří exponenciálně tlumenou stojatou vlnu.

Na obrázku 3.5 je znázorněno šíření vlny v transparentním prostředí, kterému do cesty postavíme reaktivní prostředí konečné šířky. Průchod reaktivním prostředí vlnu částečně utlumí. Můžeme definovat vzdálenost zvanou *hloubka pronikání*, $\delta = \frac{1}{\kappa}$, kdy amplituda vlny poklesne právě na $1/e$.



Obrázek 3.5: Postupná vlna v transparentním prostředí, která narazí na tenké reaktivní prostředí, se částečně exponenciálně utlumí.

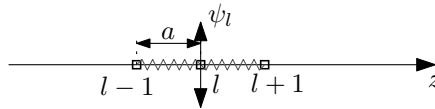
Příklad. Podívejme se na komplikovanější příklad řetízku atomů. Disperzní vztah je tvaru

$$\omega = \omega_{max} \sin \beta k, \quad \beta = \frac{a}{2}, \quad (3.15)$$

který vznikl dosazením stojaté vlny

$$\psi_l(t) = [\text{Re } e^{ikla}]e^{i\omega t} \quad (3.16)$$

do pohybových rovnic¹, ψ_l udává výchylku l -tého závaží, a je vzdálenost jednotlivých těles, viz obrázek 3.6. Vidíme, že řetízek je transparentní prostředí pro $\omega \in \langle 0, \omega_{max} \rangle$.



Obrázek 3.6: Řetízek atomů. Jednotlivé atomy jsou číslovány $l \in \mathbb{Z}$, jejich výchylky jsou popsány funkcí $\psi_l(t)$, vzdálenost mezi atomy je a .

Pro $\omega \in \langle 0, \omega_{max} \rangle$ existuje $k \in \mathbb{R}$ splňující disperzní vztah. Pro reaktivní režim, $\omega > \omega_{max}$, zkusme stejný trik jako v předchozím případě. Uvažujme $k = i\kappa$:

$$\frac{\omega}{\omega_{max}} = \sin i\beta\kappa = \frac{e^{-\beta\kappa} - e^{\beta\kappa}}{2i} = i \sinh \beta\kappa. \quad (3.17)$$

¹Stojaté vlnění vznikne superpozicí postupných vln, tedy disperzní vztah kóduje stejnou informaci pro postupné i stojaté vlny.

Bohužel nedokážeme disperzní vztah splnit pro $\omega, \kappa \in \mathbb{R}$. Musíme se zbavit dodatečného faktoru i . Pokud do původního disperzního vztahu dosadíme ansatz²

$$k = i\kappa + \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{2}, \quad (3.18)$$

pak vyjde

$$\frac{\omega}{\omega_{max}} = \frac{e^{-\beta\kappa} e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{\beta\kappa} e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i} = \frac{e^{-\beta\kappa} + e^{\beta\kappa}}{2} = \cosh \beta\kappa, \quad (3.19)$$

tzn. hledaný disperzní vztah pro reaktivní režim je

$$\omega = \omega_{max} \cosh \beta\kappa \quad (3.20)$$

a tvar vlny (po dosazení $k = i\kappa + \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{2}$ do (3.16)):

$$\psi_l(t) = e^{-\kappa l a} e^{i\frac{1}{\beta} \frac{\pi}{2} l a} e^{i\omega t} = (-1)^l e^{-\kappa l a} e^{i\omega t}. \quad (3.21)$$

3.2 Matematická vsuvka: Fourierova transformace

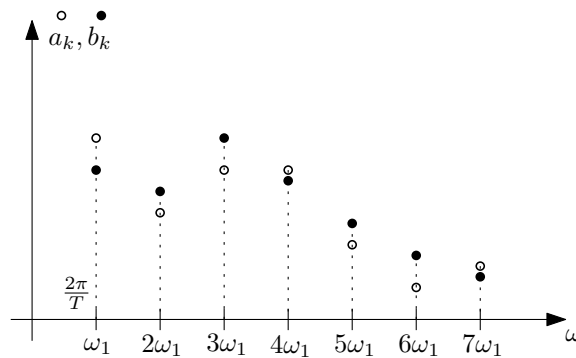
Již jsme viděli, jak rozložit periodický signál do (diskrétní) sumy harmonických vln. Jednalo se o rozklad periodické funkce do Fourierovy řady. Uvažujme funkci $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periodou T , její Fourierova řada je pak³

$$f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) + b_m \sin\left(\frac{2m\pi t}{T}\right), \quad (3.22)$$

kde koeficienty a_m, b_m jsou dány vzorci

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) dt, \quad b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) dt, \quad (3.23)$$

kde index $m \in \mathbb{N}_0$ indexuje frekvence, z kterých skládáme původní signál. Nejnižší frekvenci označíme $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$. Vyšší frekvence pak můžeme psát jako $\omega_i = m\omega_1$. Rozklad periodického signálu do Fourierovy řady říká, že potřebujeme diskrétní množství frekvencí, $\{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Viz schematický obrázek 3.7.



Obrázek 3.7: Schematicky znázorněné diskrétní frekvence ve Fourierově řadě.

²Tento ansatz je vedený znalostí identity $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

³Pro zjednodušení následujícího výkladu jsme koeficient a_0 zahrnuli přímo do sumy, je třeba pak myslet na to, že vzorec pro výpočet a_0 je třeba dělit dvěma.

Uvažujme nyní neperiodickou funkci $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pro každé $T \in \mathbb{R}^+$ můžeme vypočítat koeficienty a_m, b_m dle vzorců (3.23) a dostat tak Fourierovu řadu periodického prodloužení funkce $f|_{\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle}$. Nerigorózně řečeno dostaneme *Fourierovu transformaci* jako limitu těchto Fourierových řad, pokud provedeme $T \rightarrow +\infty$. V takovém případě $\omega_1 \rightarrow 0$ a z diskrétních frekvencí $m\omega_1$, $m \in \mathbb{N}$, se stane kontinuum frekvencí $\omega \in \langle 0, +\infty \rangle$.

Neperiodickou funkci $f(t)$ tedy můžu zapsat jako následující limitu Fourierových řad

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{a_m(T)}{\omega_1(T)} \cos(m\omega_1 t) + \frac{b_m(T)}{\omega_1(T)} \sin(m\omega_1 t) \right) \omega_1(T), \quad (3.24)$$

kde jsem si výrazy v řadě rozšířil frekvencí ω_1 . Tento výraz je vlastně Riemannův integrál⁴:

$$f(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (3.25)$$

kde jsme označili $\omega = m\omega_1$ a funkce $A(\omega)$ a $B(\omega)$ jsou definovány jako

$$A(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{a_m(T)}{\omega_1(T)}, \quad B(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{b_m(T)}{\omega_1(T)}, \quad (3.26)$$

Provedením těchto limit získáme

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (3.27)$$

Vztahy (3.25) a (3.27) představují Fourierovu transformaci a její inverzi. Ukázali jsme, že neperiodické funkce lze zapsat jako spojitou superpozici harmonických vln. Funkce $A(\omega)$ a $B(\omega)$ budeme nazývat *spektrální funkce* nebo *spektra* funkce f . Tyto funkce udávají amplitudy jednotlivých harmonických vln tvořících funkci f .

Nerigoróznost našeho postupu spočívá v dvojitém limitování. Nejprve vlastně děláme limitu pro získání funkcí $A(\omega)$ a $B(\omega)$ a poté děláme limitu pro přechod od sumace k integraci. Rigorózní postup nicméně vede na stejné vztahy.

3.2.1 Fourierova transformace v komplexním zápisu

Zapišme Fourierovu transformaci (3.25) v řeči komplexních exponenciál:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{+\infty} A(\omega) \underbrace{\cos \omega t}_{\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}} + B(\omega) \underbrace{\sin \omega t}_{\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}} d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{A(\omega) - iB(\omega)}{2}}_{C(\omega)} e^{i\omega t} + \underbrace{\frac{A(\omega) + iB(\omega)}{2}}_{\bar{C}(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Můžeme tedy definovat komplexní spektrální funkci,

$$C(\omega) = \frac{A(\omega) - iB(\omega)}{2}, \quad (3.29)$$

⁴Z definice Riemannova integrálu platí

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N f\left(k \frac{a}{N}\right) \frac{a}{N} = \int_0^a f(x) dx.$$

Zde je situace zkomplikována tím, že máme nekonečné sumy odpovídající integrování pro $\omega \in \langle 0, +\infty \rangle$.

kódující amplitudy $A(\omega)$ a $B(\omega)$ jako reálnou a imaginární část (až na dvojku a minus). Podíváme-li se nyní na vzorce pro $A(\omega)$ a $B(\omega)$ (3.27), vidíme, že mají smysl i pro $\omega < 0$ a platí

$$A(-\omega) = A(\omega), \quad B(-\omega) = -B(\omega). \quad (3.30)$$

Pro funkci $C(\omega)$ z výše uvedeného plyne $C(-\omega) = \bar{C}(\omega)$:

$$C(-\omega) = \frac{A(-\omega) - iB(-\omega)}{2} = \frac{A(\omega) + iB(\omega)}{2} = \bar{C}(\omega). \quad (3.31)$$

Po dosažení tohoto faktu do (3.28) přejde Fourierův integrál na tvar

$$f(t) = \int_0^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{+\infty} C(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.32)$$

a po substituci v druhém integrálu $\tilde{\omega} = -\omega$, $d\tilde{\omega} = -d\omega$ získáme tento velmi jednoduchý tvar *komplexní Fourierovy transformace*

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega.} \quad (3.33)$$

Podmínka $C(-\omega) = \bar{C}(\omega)$ je nutnou a postačující podmínkou pro realitu funkce $f(t)$. Vztah pro výpočet funkce $C(\omega)$ získáme prostou kombinací vztahů (3.27):

$$\boxed{C(\omega) = \frac{A(\omega) - iB(\omega)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.} \quad (3.34)$$

Na tomto místě je vhodné poznamenat, že existují různé konvence zavedení komplexní Fourierovy transformace. Faktor $\frac{1}{2\pi}$ se často rozloží na $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ a jeden z faktorů se přiřadí do vzorce pro rozklad $f(t)$. Tato konvence vede na velmi symetrický tvar Fourierovy transformace,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.35)$$

Další možnou konvenční změnou je prohodit funkce $e^{i\omega t}$ a $e^{-i\omega t}$, případně ve Fourierově transformaci používat jako proměnnou frekvenci $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Při studiu literatury je tedy vždy vhodné se seznámit s používanou konvencí.

3.3 Vlnové balíky a relace neurčitosti

Zdroj kmitající čistě harmonickým průběhem $x(t)$ po neomezenou dobu – zdroj harmonických postupných vln $\psi(z, t)$,

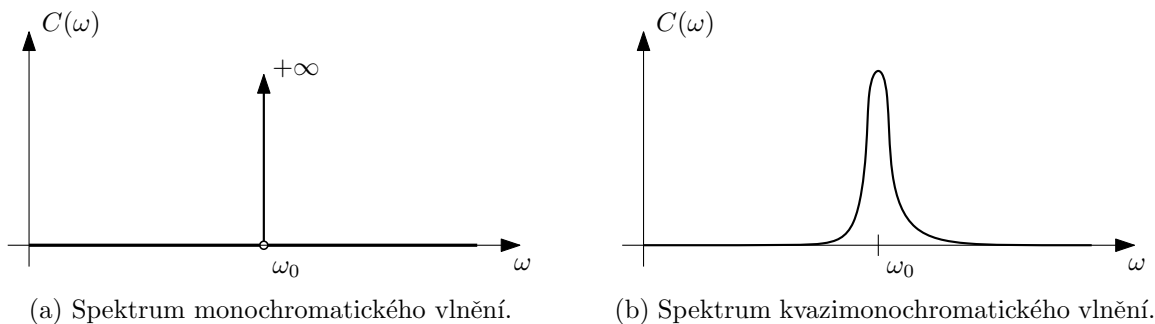
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \psi(z, t) = A \cos(\omega_0 t - k_0 z + \varphi), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.36)$$

– není zcela realistický model. Takové vlnění se nazývá *monochromatické*, jelikož jeho spektrum obsahuje jedinou frekvenci ω_0 , viz obrázek 3.8 (a). Proto zavádíme pojem *kvazimonochromatické* vlny tvaru

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0(t) t + \varphi(t)), \quad \psi(z, t) = A(t_r) \cos(\omega_0(t_r) t - k_0(t_r) z + \varphi(t_r)), \quad (3.37)$$

kde se amplituda A , frekvence ω a fázový posun φ mohou obecně v čase měnit (symbol t_r označuje retardovaný čas). Tyto změny ale musí být dostatečně pomalé tak, aby se v určitém

časovém úseku $\tau \gg T = \frac{2\pi}{\omega}$ tyto parametry daly považovat za téměř konstantní – a tedy vybraný úsek vlny trvání τ dostatečně přesně aproximuje monochromatickou vlnu. Spektrum kvazimonochromatické vlny je soustředěné kolem frekvence ω_0 , ale obsahuje celé kontinuum frekvencí okolo, viz obrázek 3.8 (b).



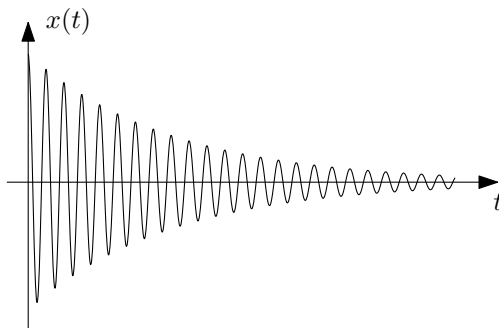
Obrázek 3.8: Spektrum monochromatického a kvazimonochromatického vlnění.

Jedním z možných příkladů je vysílání slabě tlumené harmonické vlny tvaru

$$x(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t), \quad \psi(z, t) = e^{-\alpha(t - \frac{z}{v})} \cos(\omega_0 t - k_0 z), \quad (3.38)$$

viz obrázek 3.9. Podmínka slabého tlumení je zde definována tím, že doba útlumu $\tau = \frac{1}{\alpha}$ vlny na $1/e$ hodnoty amplitudy je mnohem větší než perioda harmonických kmitů:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \gg T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \alpha \ll \omega_0. \quad (3.39)$$



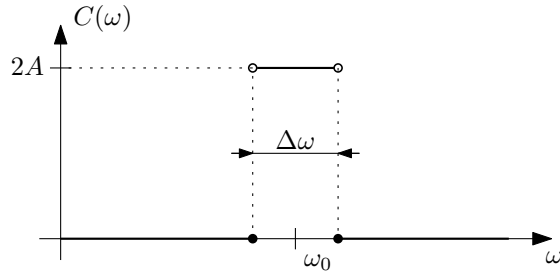
Obrázek 3.9: Exponenciálně tlumené kmitání.

Posledním pojmem, který zde budeme potřebovat je pojem *vlnový balík*. Budeme tím rozumět časově a prostorově ohraničené vlnění. Není tím přímo myšleno, že mimo danou časovou či prostorovou oblast musí vlnění zcela vymizet. Spíše je míněno, aby „hlavní“ část vlnění (s největší amplitudou, s největší energií) byla soustředěna do omezeného časového či prostorového intervalu. Pro vlnové balíky bychom tedy chtěli definovat veličiny Δt – časová šířka balíku – a Δz – prostorová šířka balíku. Tyto dvě veličiny budou mít mezi sebou jednoduchý vztah. Je-li v rychlost pohybu balíku prostředím, bude platit $\Delta z = v \Delta t$.

Vlnové balíky získáme jako spojitou superpozici harmonických vln,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \psi(z, t) = x\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (3.40)$$

Uvažujme jednoduchý model vlnového balíku, kdy zvolíme reálnou spektrální funkci $C(\omega)$ jako na obrázku 3.10. Tedy spektrum vycentrované okolo frekvence ω_0 a šířce spektra $\Delta\omega$.



Obrázek 3.10: Obdélníkové spektrum.

Fourierova transformace tohoto spektra pak vypadá následovně

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t) d\omega = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A \cos(\omega t) d\omega \quad (3.41)$$

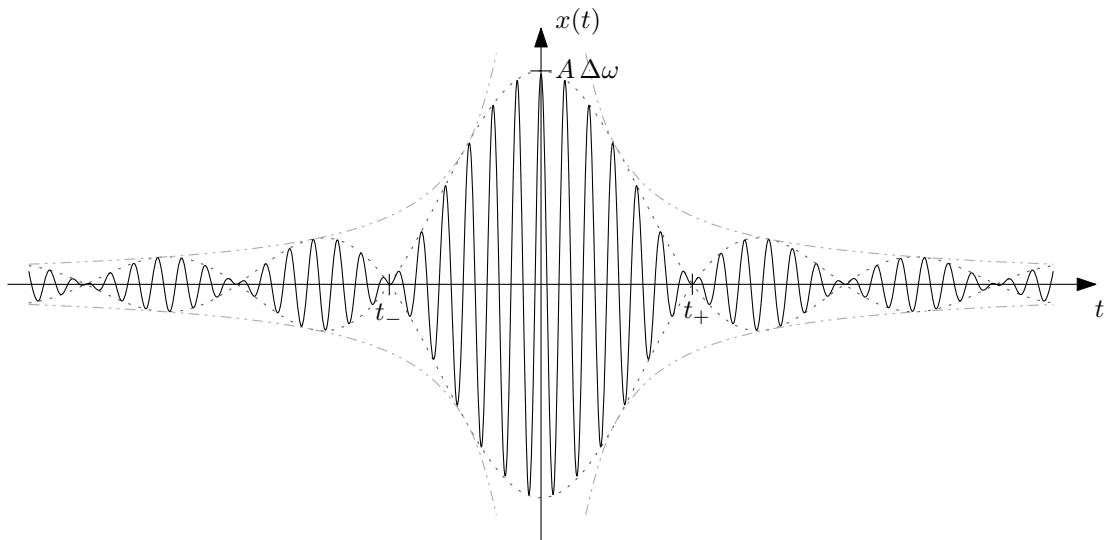
a po výpočtu a úpravě pomocí součtového vzorce (viz cvičení) dostaneme výsledný tvar balíku,

$$x(t) = A\Delta\omega \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}t} \cos(\omega_0 t), \quad (3.42)$$

který je znázorněn na obrázku 3.11. Po jeho vyslání ze zdroje bude mít tvar⁵

$$\psi(z, t) = A\Delta\omega \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t_r\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}t_r} \cos(\omega_0 t - k_0 z), \quad t_r = t - \frac{z}{v}, \quad (3.43)$$

kde t_r je retardovaný čas.



Obrázek 3.11: Vlnový balík vzniklý ze obdélníkového spektra. Vlastní průběh funkce $x(t)$ je znázorněn plnou čarou. Amplitudová obálka je naznačena čárkovaně, obálka daná pouze nepřímou úměrou je naznačena čerchovaně. Časy $t_{\pm}$ označují místa, kdy amplitudová obálka poprvé protíná nulu.

⁵V čase $t = 0$ se funkce spojitě dodefinuje dle limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Funkční tvar vlnového balíku $x(t)$ (3.42) se dá napsat ve tvaru

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t), \quad \text{kde} \quad A(t) = A \Delta \omega \frac{\sin\left(\frac{\Delta \omega}{2} t\right)}{\frac{\Delta \omega}{2} t}. \quad (3.44)$$

To znamená, že vlnový balík je ve tvaru nosné harmonické vlny o frekvenci ω_0 , která je modulovaná amplitudovou obálkou popsanou funkcí $A(t)$ (viz čárkovaná čára na obrázku 3.11 představující funkce $\pm A(t)$). Nalezneme nyní šířku tohoto balíku tak, že spočítáme časy t_+ a t_- ($t_+ > 0$, $t_- < 0$), kdy amplitudová obálka poprvé protne nulu, a rozdíl těchto časů bude představovat šířku tohoto balíku. Sinus má první nuly v $\pm\pi$ a tedy

$$\frac{\Delta \omega}{2} t_{\pm} = \pm\pi. \quad (3.45)$$

Šířka balíku tedy je

$$\Delta t = t_+ - t_- = \frac{4\pi}{\Delta \omega} \quad (3.46)$$

a po přeuspořádání dostaneme vztah

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = 4\pi = \text{konst.} \quad (3.47)$$

Tento vztah říká, že časová šířka balíku a šířka jeho frekvenčního spektra je k sobě v nepřímé úměře! Čím kratší je vlnový balík, tím více potřebujeme frekvencí na jeho vytvoření (a naopak). Konkrétní hodnota konstanty na pravé straně závisí na konkrétní definici hodnot Δt a $\Delta \omega$ a není příliš důležitá. Hlavní je onen kvalitativní vztah nepřímé úměry.

Obecně se dá dokázat následující tvrzení, které se nazývá *relace neurčitosti*:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \pi. \quad (3.48)$$

Součin časové šířky Δt a šířky spektra $\Delta \omega$ nikdy nebude menší než určitá konstanta (nezávislá⁶ od tvaru signálu či spektra). V teorému jsou samozřejmě veličiny Δt a $\Delta \omega$ rigorózně definovány. Zde na to bohužel není prostor. Uveďme ale jednoduché tvrzení z teorie Fourierovy analýzy, které intuitivně ilustruje platnost relací neurčitosti, přestože je v žádném případě nedokazuje:

Mějme funkci $f(t)$ a k ní příslušnou spektrální funkci $C(\omega)$. Uvažujme konstantu $a \in \mathbb{R}^+$. Potom platí, že k funkci $f(at)$ je spektrální funkce tvaru $\frac{1}{a} C\left(\frac{\omega}{a}\right)$. Dokažme toto tvrzení. Označme $C_a(\omega)$ spektrální funkci k funkci $f(at)$. Z definice Fourierova integrálu máme

$$C_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt \quad (3.49)$$

Provedeme-li substituci $t' = at$, dostaneme tvrzení věty:

$$C_a(\omega) = \frac{1}{a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-i\frac{\omega}{a} t'} dt' = \frac{1}{a} C\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (3.50)$$

Nyní si uvědomme, co tato věta prakticky tvrdí. Nechť je časová šířka vlnového balíku $f(t)$ velikosti Δt a k ní příslušná šířka frekvenčního spektra $\Delta \omega$,

$$\Delta t \quad \dots \quad f(t) \quad \leftrightarrow \quad C(\omega) \quad \dots \quad \Delta \omega. \quad (3.51)$$

Násobení argumentu funkce f konstantou $a > 0$ představuje škálování časové osy. Pro $a > 1$ se funkce na časové ose smršťuje, pro $a < 1$ se funkce roztahuje. Časová šířka funkce $f(at)$ je

⁶Konstanta je naopak závislá od konkrétní použité konvence ve Fourierově transformaci.

tedy $\frac{\Delta t}{a}$. Z tvrzení věty je spektrum naškálované funkce tvaru $\frac{1}{a}C\left(\frac{\omega}{a}\right)$, škálování frekvenčního spektra tedy probíhá inverzně než u časového průběhu funkce. Je-li původní šířka frekvenčního spektra $\Delta\omega$, u naškálované funkce bude $a\Delta\omega$,

$$\frac{\Delta t}{a} \quad \dots \quad f(at) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{a}C\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \dots \quad a\Delta\omega. \quad (3.52)$$

Součin časové šířky a spektrální šířky tedy zůstává konstantní pro libovolné číslo a :

$$\left(\frac{\Delta t}{a}\right)(a\Delta\omega) = \Delta t \Delta\omega. \quad (3.53)$$

3.4 Grupová rychlost

3.4.1 Superpozice dvou postupných harmonických vln

Nejprve si fenomén *grupové rychlosti* ukážeme na nejjednodušším možném příkladu – superpozici dvou postupných harmonických vln. Uvažujme prostředí s disperzním vztahem $\omega(k)$ a vezměme postupné vlny s vlnovými čísly k_1 a k_2 , k nim pak z disperzního vztahu získám příslušné úhlové frekvence:

$$k_1, k_2 \longrightarrow \omega_1 = \omega(k_1), \omega_2 = \omega(k_2). \quad (3.54)$$

Vezměme následující superpozici vln se stejnou amplitudou a bez fázového posuvu⁷ a upravme ji součtovým vzorcem:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= A \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A \cos(\omega_2 t - k_2 z) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} z\right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Nyní uvažujme k_1 blízke k_2 , BÚNO $k_1 > k_2$. Označíme si

$$k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad k_{mod} = \frac{k_1 - k_2}{2}. \quad (3.56)$$

Potom platí $k_{mod} \ll k_0$ díky blízkosti hodnot k_1, k_2 . Dále si označíme

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad (3.57)$$

díky blízkosti k_1 a k_2 budou blízke i ω_1 a ω_2 a tedy $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_0$. Dále upravujeme

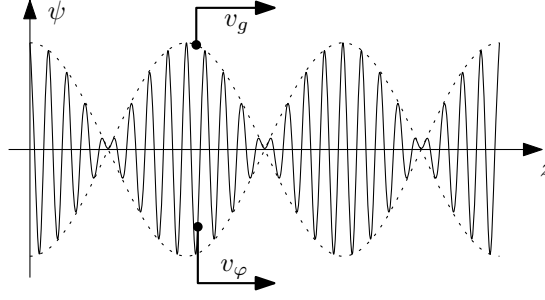
$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{d\omega}{dk}(\xi) k_{mod} \approx \frac{d\omega}{dk}(k_0) k_{mod}, \quad (3.58)$$

kde jsme použili Lagrangeovu větu o přírůstku funkce, $\xi \in (k_1, k_2)$ a následně derivaci aproxi-
movali náhradou ξ za k_0 . Superpozice (3.55) pak bude mít přibližně tvar

$$\psi(z, t) \approx 2A \cos(\omega_0 t - k_0 z) \cos(\omega'(k_0) k_{mod} t - k_{mod} z). \quad (3.59)$$

Tato superpozice má tvar součinu dvou postupných harmonických vln. První z nich je *nosná vlna* s (vysokou) úhlovou rychlostí ω_0 a velkým vlnovým číslem k_0 (malou vlnovou délkou λ_0). Druhá je *modulační vlna*, která moduluje amplitudu nosné vlny – tvoří její amplitudovou obálku. Tato vlna má mnohem větší vlnovou délku λ_{mod} (menší vlnové číslo k_{mod}). Dostaneme tvar periodicky se opakujících vlnových balíků. Viz obrázek 3.12.

⁷Fázový posuv nepřináší nic navíc, kromě delšího psaní.



Obrázek 3.12: Superpozice dvou postupných harmonických vln.

Jaké jsou fázové rychlosti nosné a modulační vlny? Dle vztahu $v = \frac{\omega}{k}$ dosadíme příslušné úhlové frekvence a vlnová čísla jednotlivých vln a dostaneme:

$$v_{\text{nosná}} = v_{\varphi} = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad v_{\text{modulační}} = v_g = \frac{\omega'(k_0)k_{\text{mod}}}{k_{\text{mod}}} = \frac{d\omega}{dk}(k_0). \quad (3.60)$$

Fázovou rychlost modulační vlny nazýváme *grupová rychlost*. Tato udává rychlost pohybu vlnových balíků, resp. jejich amplitudové obálky, skrze prostředí.

V případě, že máme lineární disperzní vztah tvaru $\omega = vk$, fázová rychlost nosné vlny a grupová rychlost se rovnají. Jinak se obecně mohou lišit.

Fázové rychlosti původních harmonických vln jsou

$$v_{\varphi 1} = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega(k_1)}{k_1}, \quad v_{\varphi 2} = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega(k_2)}{k_2}. \quad (3.61)$$

Díky blízkosti k_1 a k_2 jsou tyto rychlosti blízké fázové rychlosti nosné vlny, $v_{\varphi} \approx v_{\varphi 1} \approx v_{\varphi 2}$.

3.4.2 Obecný vlnový balík

Uvažujme nyní obecný vlnový balík, který je spojitou superpozicí harmonických vln. Nechť je v prostředí umístěn zdroj, který vysílá signál tvaru

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.62)$$

kde funkce spektra $C(\omega)$ je soustředěna kolem frekvence ω_0 , viz obrázek 3.13. Zdroj vyzařuje postupné vlny, tudíž z každé harmonické složky se stane postupná vlna:

$$f(t) \propto e^{i\omega t} \longrightarrow \psi(z, t) \propto e^{i(\omega t - kz)}, \quad (3.63)$$

kde $k = k(\omega)$ je dané z disperzního vztahu. Plná superpozice postupujících vln pak má tvar

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega. \quad (3.64)$$

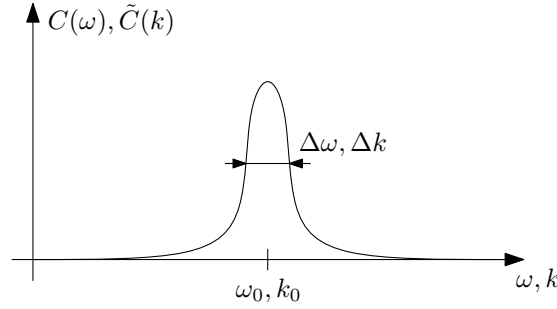
Nám se bude hodit integrovat spíše přes vlnová čísla k , takže substitucí,

$$\omega = \omega(k), \quad d\omega = \frac{d\omega}{dk} dk, \quad \tilde{C}(k) := C(\omega(k)) \frac{d\omega}{dk}, \quad (3.65)$$

přejdeme ke tvaru, kde sčítáme vlny pomocí jejich vlnových délek (vlnových čísel):

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}(k) e^{i(\omega(k)t - kz)} dk. \quad (3.66)$$

Spektrální funkce $\tilde{C}(k)$ je také soustředěna kolem jednoho vlnového čísla $k_0 = k(\omega_0)$, ještě jednou viz obrázek 3.13.



Obrázek 3.13: Spektrum vlnového balíku. Schematicky znázorněné spektrální funkce $C(\omega)$ a $\tilde{C}(k)$.

Nyní rozvineme disperzní vztah do Taylorovy řady se středem k_0 ,

$$\omega(k) = \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} + \frac{d\omega}{dk}(k_0)(k - k_0) + O((k - k_0)^2), \quad (3.67)$$

a tento dosadíme do jednotlivých harmonických složek tvořící celkovou vlnu:

$$\begin{aligned} e^{i(\omega(k)t - kz)} &= \underbrace{e^{ik_0z} e^{-ik_0z}}_{=1} e^{i\omega_0 t} e^{i(\omega'(k_0)(k - k_0)t - kz)} e^{iO((k - k_0)^2)t} \\ &= e^{i(\omega_0 t - kz)} e^{i(\omega'(k_0)(k - k_0)t - (k - k_0)z)} e^{iO((k - k_0)^2)t}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

kde jsme si výraz vynásobili vhodnou jedničkou a přeuspořádali členy tak, že jsme vytkli komplexní nosnou vlnu. Dosadíme předchozí výraz do integrálu (3.66) a pro zkrácení zápisu označíme $k' = k - k_0$:

$$\psi(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}(k' + k_0) e^{i(\omega'(k_0)k't - k'z)} e^{iO(k'^2)t} dk. \quad (3.69)$$

Nyní využijeme toho, že spektrální funkce $\tilde{C}(k)$ je soustředěna kolem vlnového čísla k_0 (s šířkou spektra Δk). Můžeme tedy aproximovat funkci $\psi(z, t)$ tak, že omezíme obor integrace pouze na $k \in \langle k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2} \rangle$. Jelikož jsme se tím omezili na hodnoty k blízké k_0 , můžeme dále zanedbat vyšší řády Taylorova rozvoje, $e^{iO(k'^2)t}$. Výsledkem je:

$$\psi(z, t) \approx e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} \tilde{C}(k' + k_0) \underbrace{e^{i(\omega'(k_0)k't - k'z)}}_{e^{-ik'(z - \omega'(k_0)t)}} dk. \quad (3.70)$$

Celý komplikovaný výraz pod integrálem závisí na proměnných z a t jen na jediném místě: v exponenciále je výraz $z - \omega'(k_0)t$, který je z hlediska integrace konstantní. Můžeme tedy definovat funkci $F(x)$,

$$F(x) = \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} \tilde{C}(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.71)$$

a psát výslednou vlnu $\psi(z, t)$ jako

$$\psi(z, t) \approx e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} F(z - \omega'(k_0)t). \quad (3.72)$$

Toto je analogický výsledek jako u superpozice dvou harmonických vln. Máme zde nosnou vlnu $e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$ postupující fázovou rychlostí $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$ a tato je amplitudově modulována modulační

funkcí $F(x)$, která postupuje rychlostí $\omega'(k_0)$ (vzpomeňte na d'Alembertovo řešení $F(z - vt)$). Máme tedy stejné výrazy pro *fázovou a grupovou rychlost* (jako u superpozice dvou harmonických vln):

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0), \quad (3.73)$$

představující rychlosti postupu nosné a modulační vlny.

3.4.3 Rozplývání vlnového balíku

V předchozí kapitole jsme po zanedbání vyšších řádů Taylorova rozvoje obdrželi postupující vlnový balík, jehož amplitudová obálka má časově neměnný tvar $F(x)$. Pod integrálem jsme zanedbali člen tvaru

$$\exp \left[i \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0} \cdot (k - k_0)^2 + O((k - k_0)^3) \right) t \right], \quad (3.74)$$

který způsobuje, že funkce $F(x)$ není v čase konstantní, ale má dodatečnou časovou závislost,

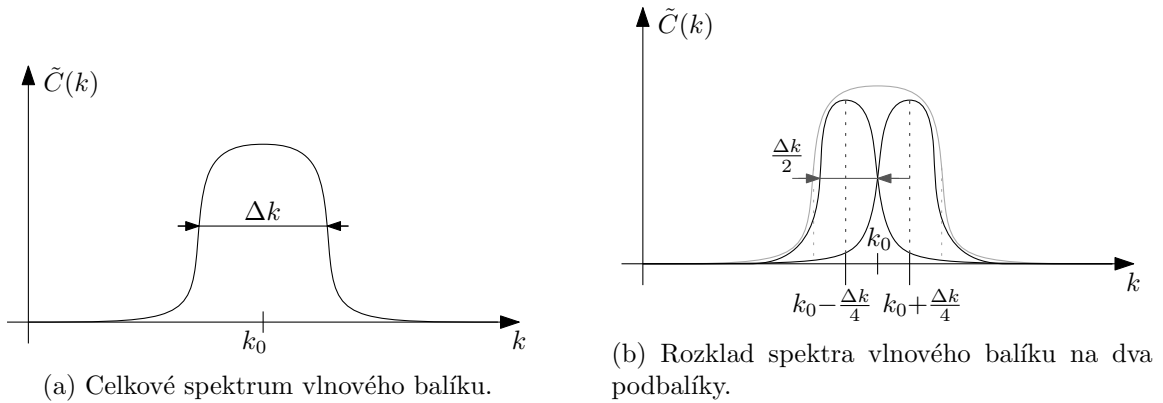
$$F(x) \longrightarrow F(x, t). \quad (3.75)$$

Tato dodatečná časová závislost způsobuje, že postupující amplitudová obálka $F(z - v_g t, t)$ v čase mění svůj tvar – deformuje se. Tomuto jevu se říká *rozplývání vlnových balíků*. Pokusme se tento jev elementárně kvantifikovat.

Uvažujme opět spektrum vlnového balíku (znovu znázorněné na obrázku 3.14 (a)) soustředěného okolo vlnového čísla k_0 o frekvenční šířce Δk a k němu odpovídající vlnový balík $\psi(z, t)$. Rozložme ho na superpozici dvou balíků,

$$\psi(z, t) = \psi_-(z, t) + \psi_+(z, t), \quad (3.76)$$

kde balík ψ_- je soustředěn okolo $k_0 - \frac{\Delta k}{4}$ a ψ_+ okolo $k_0 + \frac{\Delta k}{4}$, oba s šířkou spektra $\frac{\Delta k}{2}$, viz obrázek 3.14 (b).



Obrázek 3.14: Rozklad spektra pro studium rozplývání vlnového balíku.

Každý z těchto podbalíků se může pohybovat jinou grupovou rychlostí:

$$v_{g-} = \frac{d\omega}{dk}(k_-), \quad v_{g+} = \frac{d\omega}{dk}(k_+), \quad (3.77)$$

kde v_{g-} , resp. v_{g+} , označuje grupovou rychlost ψ_- , resp. ψ_+ . Jaký bude rozdíl těchto rychlostí Δv_g ?

$$\Delta v_g = v_{g+} - v_{g-} = \frac{\omega'(k_+) - \omega'(k_-)}{k_+ - k_-} (k_+ - k_-) = \omega''(\xi) \frac{\Delta k}{2} \approx \omega''(k_0) \frac{\Delta k}{2} = \frac{dv_g}{dk}(k_0) \frac{\Delta k}{2}, \quad (3.78)$$

při úpravách jsme použili Lagrangeovu větu o přírůstku funkce a fakt, že $\xi \in (k_-, k_+)$, $\xi \approx k_0$, a spektrální středy jednotlivých podbalíků jsme označili $k_- = k_0 - \frac{\Delta k}{4}$, resp. $k_+ = k_0 + \frac{\Delta k}{4}$. Platí tedy

$$\Delta v_g = \frac{1}{2} v'_g(k_0) \Delta k. \quad (3.79)$$

Označíme (prostorovou) šířku balíku v čase t jako $\Delta z(t)$ a napišme, jak se tato bude měnit. Necht' je časová šířka původního signálu $f(t)$ vysílaného zdrojem Δt . Jeho počáteční šířka je pak

$$\Delta z(0) = v_g \Delta t, \quad (3.80)$$

jelikož se pohybuje rychlostí v_g a jeho vyslání trvá přibližně Δt . Středy balíků se od sebe vzdalují rychlostí Δv_g , takže šířka balíku v čase t je

$$\Delta z(t) = \Delta z(0) + \Delta v_g t \approx \Delta z(0) + \frac{1}{2} \omega''(k_0) \Delta k t. \quad (3.81)$$

Rozplývání vlnových balíků je jev, který obecně znehodnocuje náš vyslaný signál. V případě, že vysíláme řadu balíků za sebou, dojde vlivem jejich rozplývání k jejich překryvu a nemožnosti ze zdeformované signalu rozpoznat, zda balík je či není přítomen (tímto způsobem můžeme primitivně kódovat binární signál).

Literatura

- [1] J. Tolar, *Vlnění, optika a atomová fyzika (Základní kurz fyziky FJFI)*, <https://physics.fjfi.cvut.cz/files/predmety/02VOAF/VOAF2017.pdf>, 2017
- [2] J. Tolar, J. Koníček, *Sbírka řešených příkladů z fyziky, Vlnění*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2005
- [3] F. S. Crawford Jr., *Berkeley Physics Course, Volume 3, Waves (In SI Units)*, McGraw Hill Education (India) Private Limited, New Delhi, 2016
- [4] H. Georgi, *The Physics of Waves*, <http://www.people.fas.harvard.edu/~hgeorgi/new.htm>, 2015
- [5] E. Hecht, *Optics*, Pearson Education Limited, Harlow, 2017
- [6] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics, Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light*, Pergamon Press, Oxford, 1964
- [7] I. Štoll, J. Tolar, *Teoretická fyzika*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004