

1) Necht $A = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Definujeme relaci $\sim$ takto:

$a \sim b$, pokud $7x \perp n$ tak, že $ax \equiv b \pmod n$.

Dokažte, že $\sim$ je ekvivalence. Určete třídy ekvivalence pro $n=12$.

2) Necht $R = \{(1,4), (1,2), (2,2), (3,3), (4,3)\}$.

Najděte R^{-1} , $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$, $R \circ R$.

3) Necht $\sim_1, \sim_2$ jsou ekvivalence $\sim_1 \times \sim_2$. Relaci $\sim$ na X definujeme: $a \sim b$, když $a \sim_1 b_1$ a $a \sim_2 b_2$.

Dokažte, že $\sim$ je ekvivalence na X a platí

$[a]_{\sim} = [a]_{\sim_1} \cap [a]_{\sim_2}$. Co by se stalo, kdyby místo $\sim$ bylo $\sim$ definici $\vee$?

4) Necht $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Sestrojte relaci, která je reflexivní, ale ne tranzitivní.

b) $\rightarrow$ je reflexivní, symetrická, ale ne tranzitivní.

c) $\rightarrow$ je tranzitivní a ireflexivní, $\nexists (a,a) \in R$ pro žádné a .

d) Najděte nějakou ekvivalenci na B příslušný rozklad B na třídy této ekvivalence.

5) Definujeme relaci R na $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ takto: $(a,b)R(c,d)$, když $ad = bc$.

Dokažte, že R je ekvivalence a nalezněte třídy R .

6) Definujeme relaci R na $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$: $(a,b)R(c,d)$ když $a+d = b+c$.

Dokažte, že R je ekvivalence a najměte 5 prvků $\times$ třídy $[(1,4)]_R$.

7) Rozhodněte, jestli následující relace na dvojce množinách jsou uspořádaní:

a) $(N \times N, \leq)$, kde $(a,b) \leq (c,d)$ když $a \leq c$

b) $(N \times N, \leq)$, kde $(a,b) \leq (c,d)$ když $a \leq c$, $b \geq d$

8) Mějme $X = \{\{1,3\}, \{2,3\}, \{4,3\}, \{1,2,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$

a uspořádaním inkluzí. Najděte

a) všech maximálních prvků

b) všech minimálních prvků

c) nejmenší a největší prvek

d) všech horních a všech množin $\{\{2,3\}, \{4,3\}\}$

e) všech dolních a všech množin $\{\{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$.

9) Pro množiny A, B dokažte ekvivalenci $P(A) \subset P(B) \Leftrightarrow A \subset B$

10) O následující rozhodněte, zda jsou pravdivé:

a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ✓ f) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ✓

b) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ ✓ g) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ✓

c) $\emptyset = \{\emptyset\}$ ✗ h) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ ✗ $\emptyset \subset A$

d) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ ✗ i) $\{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}\}$ ✗ $\nexists A$

e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset\}$ ✓ j) $\{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}\}$ ✗

11) Najděte sjednocení všech prvků množiny $P(P(\emptyset))$.

12) jsou-li X, Y, S, T množiny a $\sim$ ekvivalence množin, dokažte:

a) $(S \times T)^X \simeq S^X \times T^X$

b) $S^{X \times Y} \simeq (S^X)^Y$

c) $S^{X \cup Y} \simeq S^X \times S^Y$

$P(P(\emptyset)) = P(\{\emptyset\}) = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$
 $\{\emptyset\} \cup \emptyset = \{\emptyset\}$ ✓