Topologické prostory

Definice: Topologie

Nechť X je množina, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$.
Řekneme, že $\mathcal{T}$ je topologie na X, pokud platí:

① $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
② $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{T}: \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{T}$
③ $\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{T}, |\mathcal{F}| < \infty: \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{T}$

Uspořádanou dvojici $(X, \mathcal{T})$ nazýváme topologický prostor.

Prvky $\mathcal{T}$ se nazývají otevřené množiny

Množinu $c\mathcal{T} := \{X \setminus G \mid G \in \mathcal{T}\}$ nazýváme katopologií a její prvky nazýváme uzavřené množiny.

Definice: Vnitřek množiny, uzávěr množiny

Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, $M \subset X$.
Pak vnitřkem množiny M rozumíme největší otevřenou množinu obsaženou v M: $M^\circ := \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{T} \\ A \subset M}} A$

Pak uzávěrem množiny M rozumíme nejmenší uzavřenou množinu, jejíž je M částí: $\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \in c\mathcal{T} \\ M \subset A}} A$

Definice: Okolí

Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, $x \in X$, $U \subset X$.
Řekneme, že U je okolí x, jestliže $x \in U^\circ$

Je-li $U \in \mathcal{T}$, pak U nazýváme otevřeným okolím.

Tvrzení:

Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, $M \subset X$.
Pak $M \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in M : \exists$ okolí $U \ni x : U \subset M$

Důkaz:

$\Rightarrow$ pro libovolné $x \in M$ je M jeho okolím

$\Leftarrow$ $M = \bigcup_{x \in M} U_x \in \mathcal{T}$

Tvrzení:

Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, $M \subset X$.
Potom platí: ① $\overline{X \setminus M} = X \setminus M^\circ$

② $(X \setminus M)^\circ = X \setminus \overline{M}$

Důkaz:

① $$X \setminus M^\circ = X \setminus \bigcup_{\substack{A \subset M \\ A \in \mathcal{T}}} A = \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{T} \\ A \subset M}} \overbrace{(X \setminus A)}^{F} = \bigcap_{\substack{F \in c\mathcal{T} \\ X \setminus M \subset F}} F = \overline{X \setminus M}$$

② $$X \setminus \overline{M} = X \setminus \bigcap_{\substack{A \in c\mathcal{T} \\ M \subset A}} A = \bigcup_{\substack{A \in c\mathcal{T} \\ M \subset A}} \overbrace{(X \setminus A)}^{G} = \bigcup_{\substack{G \in \mathcal{T} \\ G \subset X \setminus M}} G = (X \setminus M)^\circ$$

Definice: Báze topologie

Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.
Řekneme, že $\mathcal{B}$ je báze topologie $\mathcal{T}$, jestliže:
$\forall A \in \mathcal{T} : \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} : \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B = A$

Poznámka:

Alternativní definice báze:
$\forall B \in \mathcal{T} : \forall x \in B : \exists U \in \mathcal{B} : x \in U \subset B$

Důkaz:

$\Rightarrow$ Nechť $\mathcal{B}$ je báze:
Buď $B \in \mathcal{T}$ libovolné, $x \in B$ libovolné: $B = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A \ni x \rightarrow \exists A \in \mathcal{B} : x \in A \subset B$

$\Leftarrow$ Nechť platí: $\forall B \in \mathcal{T} : \forall x \in B : \exists U \in \mathcal{B} : x \in U \subset B$:
Buď $A \in \mathcal{T}$ libovolná: $A = \bigcup_{x \in A} U_x = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$, kde $\mathcal{B}' := \{U_x \in \mathcal{B} \mid x \in A\} \subset \mathcal{B}$

Definice: Hustá podmnožina
Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor, $M \subset X$.
Řekneme, že M je hustá v X, jestliže $\overline{M} = X$.

Poznámka:
M je hustá v $X \overset{1}{\iff} \overline{M} = X \overset{2}{\iff} (X \setminus M)^{\circ} = \emptyset$
$\overset{3}{\iff} \forall B \in \mathcal{T}; B \neq \emptyset : B \cap M \neq \emptyset$

Důkaz:
1, 2 jasné
3 : Nechť M je hustá v X:
Nechť $\exists B \in \mathcal{T} : B \cap M = \emptyset$:
$B \cap M \subset \overline{B \cap M} \subset \overline{B} \cap \overline{M} \Rightarrow y \in G \Rightarrow y \notin \overline{M} = X$, spor

Nechť platí: $\forall B \in \mathcal{T}, B \neq \emptyset : B \cap M \neq \emptyset$:
Chceme: $\forall y \in X : y \in \overline{M}$:
Buď $y \in X$ libovolné: $\forall U_y \in \mathcal{T} \Rightarrow U_y \cap M \neq \emptyset \Rightarrow y \in \overline{M}$

Definice: Separabilní prostor
Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor.
Řekneme, že X je separabilní, jestliže existuje spočetná hustá podmnožina.

Definice: 2. axiom spočetnosti
Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor.
Řekneme, že X splňuje 2. axiom spočetnosti, jestliže v X existuje spočetná báze.

Poznámka:
- 1. axiom spočetnosti:
$\forall (X,\mathcal{T})$ existuje spočetná lokální báze

- Lokální báze v bodě $x \in X$
Systém okolí $\mathcal{O}_x$ je báze $\iff \forall U$ okolí x $\exists V \in \mathcal{O}_x : V \subset U$

Tvrzení:
Nechť $(X,\mathcal{T})$ topologický prostor splňuje 2. axiom spočetnosti.
Pak X je separabilní.

Důkaz:
Nechť $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ je spočetná báze:
$\to$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ vybereme $x_k \in B_k$ a položme $M := \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$
Chceme ukázat, že $X = \overline{M} \Leftrightarrow X \setminus \overline{M} = \emptyset$:

Nechť $X \setminus \overline{M} \neq \emptyset$:
Pak $\exists y \in X \setminus \overline{M} \in \mathcal{T} \to X \setminus \overline{M} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_{m_k} \to \exists m \in \mathbb{N}: B_m \subset X \setminus \overline{M} \to x_m \in X \setminus \overline{M}$
Spor!

Definice: Hromadný bod
Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor, $M \subset X$, $x \in X$.
Řekneme, že x je hromadný bod M, jestliže platí:
$\forall U$ okolí x: $M \cap (U \setminus \{o\}) \neq \emptyset$

Tvrzení:
Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor, $M \subset X$.
Pak M je uzavřená $\Leftrightarrow$ M obsahuje všechny své hromadné body.

Platí:
$x \in \overline{M} \setminus M \Leftrightarrow x \notin M$ a x je hromadný bod

Důkaz:
$\Rightarrow$ $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall U_x \in \mathcal{T}: U_x \cap M \neq \emptyset \overset{x \notin M}{\Rightarrow} \forall U_x \in \mathcal{T}: U_x \setminus \{x\} \cap M \neq \emptyset$
$\Leftarrow$ x je hromadný bod $\Leftrightarrow \forall U_x \in \mathcal{T}: U_x \setminus \{x\} \cap M \neq \emptyset \underset{x \notin M}{\Rightarrow} \forall U_x \in \mathcal{T}: U_x \cap M = \emptyset \Rightarrow x \in \overline{M}$

Důkaz tvrzení:
$x \in \overline{M} \Leftrightarrow x$ je izolovaný v M
nebo x je hromadný v $M \wedge x \in M$
nebo x je hromadný v $M \wedge x \notin M$
Speciálně: M nemá hromadné body $\Rightarrow M$ je uzavřená

Definice: Relativní topologie

Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, $Y \subset X$.
Potom $\mathcal{T}_Y := \{ Y \cap B \,/\, B \in \mathcal{T} \}$ je topologie na Y a nazýváme ji relativní topologií.

$(Y, \mathcal{T}_Y)$ je topologický podprostor $(X, \mathcal{T}_X)$

Definice: Spojité zobrazení

Nechť $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ jsou topologické prostory, $f: X \to Y$.
Řekneme, že f je spojité, jestliže vzory otevřených množin jsou otevřené množiny: $\forall B \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$

Platí:

Složení spojitých zobrazení je spojité zobrazení

Definice: Spojitost v bodě

Nechť $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ jsou topologické prostory, $x_0 \in X$, $f: X \to Y$.
Řekneme, že f je spojité v bodě x_0, jestliže platí:
$\forall$ V okolí $f(x_0)$: $\exists$ okolí $U \ni x_0$: $f(U) \subset V$

Poznámka:

Alternativně: $\forall V \in \mathcal{T}_Y, f(x_0) \in V : \exists U \in \mathcal{T}_X, x_0 \in U : f(U) \subset V$

Věta:

Nechť $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ jsou topologické prostory, $f: X \to Y$.
Potom f je spojité právě tehdy, když je spojité v každém bodě.

Důkaz:

$\Rightarrow$ Buď $x_0 \in X$ libovolný:
Buď $V \in \mathcal{T}_Y, f(x_0) \in V$ libovolná $\to f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \wedge x_0 \in f^{-1}(V) \to f(\underbrace{f^{-1}(V)}_{U}) \subset V$

$\Leftarrow$ Buď $B \in \mathcal{T}_Y$ libovolná:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{\substack{y \in B \\ f^{-1}(y) \subset U_y}} U_y \in \mathcal{T}_X$$

Definice: Axiomy oddělení

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{T})$ je:

- T_1 prostor, jestliže:
  $\forall x, y \in X, x \neq y : \exists U \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \notin U$
- T_2 prostor – Hausdorffův, jestliže:
  $\forall x, y \in X, x \neq y : \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V \neq \emptyset$
- Regulární prostor, jestliže
  $\forall A \in \mathcal{C}\mathcal{T} : \forall x \in X \setminus A : \exists U, V \in \mathcal{T} : A \subset U \wedge x \in V \wedge U \cap V = \emptyset$
- T_3 prostor, jestliže je regulární a T_1
- Normální prostor, jestliže:
  $\forall A, B \in \mathcal{C}\mathcal{T}, A \cap B = \emptyset : \exists U, V \in \mathcal{T} : A \subset U \wedge B \subset V \wedge U \cap V = \emptyset$
- T_4 prostor, jestliže je normální a T_1

Poznámka:

$T_1 \Leftrightarrow$ Každá jednobodová množina je uzavřená

Věta:

Nechť X je neprázdná množina, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$.

Pak $\mathcal{B}$ je báze nějaké topologie na X, právě když platí:

① $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

② $\forall A, B \in \mathcal{B} : \forall x \in A \cap B : \exists U \in \mathcal{B} : x \in U \subset A \cap B$

Důkaz:

$\Rightarrow$ Nechť $\mathcal{B}$ je báze topologie na X:

① jasné

② $\mathcal{B}$ báze $\rightarrow A \cap B$ otevřené $\rightarrow \exists U \in \mathcal{B} : x \in U \subset A \cap B$

$\Leftarrow$ Nechť platí ①, ②:

Ukážeme, že systém, který $\mathcal{B}$ generuje je topologie:

- $\emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$
- $X \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$

· Buď I libovolná množina indexů: $A_\alpha \in \mathcal{T}(\mathcal{B}), \forall \alpha \in I$

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}\Big(\bigcup_{B\in\mathcal{B}_\alpha} B\Big) = \bigcup_{A\in\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{B}_\alpha} A \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$$

· Buďte $A,B\in\mathcal{T}(\mathcal{B})$ libovolné:

$$A\cap B = \Big(\bigcup_{G\in\mathcal{B}_A} G\Big)\cap\Big(\bigcup_{F\in\mathcal{B}_B} F\Big) = \bigcup_{\substack{G\in\mathcal{B}_A\\ F\in\mathcal{B}_B}}(G\cap F)\in\mathcal{T}(\mathcal{B})$$

Poznámka:

$A,B\in\mathcal{B} \Rightarrow A,B\in\mathcal{T}(\mathcal{B})$: $A\cap B = \bigcup_{x\in A\cap B} U$

Definice kompaktnost

Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor.
Řekneme, že X je kompaktní, jestliže každé otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.

Věta:

Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor.
Potom X je kompaktní právě tehdy když platí, že pro každý systém $\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}\subset \mathcal{C}\mathcal{T}$ platí:

$$\forall I'\subset I, |I'|<\infty: \bigcap_{\alpha\in I'} A_\alpha \neq\emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\neq\emptyset$$

Důkaz:

$\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}\subset \mathcal{C}\mathcal{T} \Rightarrow \{X\setminus A_\alpha \mid \alpha\in I\}\subset\mathcal{T}$

$$I'\subset I, |I'|<\infty: \bigcap_{\alpha\in I'} A_\alpha\neq\emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha\in I'} X\setminus A_\alpha \neq X \overset{\text{kompaktnost}}{\Rightarrow} \bigcup_{\alpha\in I}(X\setminus A_\alpha)\neq X \Leftrightarrow \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\neq\emptyset$$

Věta:
Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor, $A=\bar{A}\subset X$.
Je-li X kompaktní, pak A je kompaktní v relativní topologii.

Důkaz:
$\mathcal{T}_A=\{A\cap B \mid B\in\mathcal{T}\}$

Buď $S=\{B_\alpha \mid \alpha\in I\}\subset\mathcal{T}_A$ pokrytí A:

$\rightarrow \forall\alpha\in I\ \exists G_\alpha\in\mathcal{T}: B_\alpha=A\cap G_\alpha$

$\rightarrow A=\bar{A} \Rightarrow X\setminus A\in\mathcal{T} \rightarrow (X\setminus A)\cup(\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha)\supseteq X$

$\rightarrow \exists I'\subset I, |I'|<\infty: (\bigcup_{\alpha\in I'}G_\alpha)\cup(X\setminus A)=X$

$\rightarrow \bigcup_{\alpha\in I'}B_\alpha=A \rightarrow A$ kompaktní

Věta: Existence hromadného bodu
Nechť $(X,\mathcal{T})$ je kompaktní topologický prostor, $M\subset X$.
Pokud $|M|=\infty$, pak M má hromadný bod.

Důkaz:
(sporem):
Nechť $|M|=\infty$ a M nemá hromadný bod:
$\rightarrow \exists (x_k)_{k\geq 1}\subset M: j\neq k \Rightarrow x_j\neq x_k$
$\{x_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ nemá hromadný bod

položme $X_n:=\{x_k \mid k\geq n\}, \forall n\in\mathbb{N}$

$\rightarrow X_n$ nemá hromadný bod $\Rightarrow X_n=\overline{X_n}$
$X_1\supset X_2\supset X_3\supset\dots \rightarrow \forall m\in\mathbb{N}: \bigcap_{k=1}^{m}X_k=X_m\neq\emptyset$
$\rightarrow \forall S\subset\mathbb{N}, |S|<\infty: \bigcap_{n\in S}X_n\neq\emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty}X_n\neq\emptyset$
Zároveň ale $\bigcap_{n=1}^{+\infty}X_n=\emptyset$, spor

Věta:
Nechť $(X,\mathcal{T})$ je Hausdorffův topologický prostor, $A \subset X$.
Je-li A kompaktní, pak A je uzavřená.

Důkaz:
Buď A kompaktní:
A je uzavřená $\Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{T}$:

Buď $y \in X \setminus A$ libovolný bod:

$\rightarrow \forall x \in A : \exists U_x \in \mathcal{T}, x \in U_x : \exists V_x \in \mathcal{T}, y \in V_x : U_x \cap V_x = \emptyset$

$A \subset \bigcup_{x \in A} U_x \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \{x_1, \dots, x_n\} \subset A : \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k} \supset A$

$\rightarrow V := \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k} \rightarrow V \cap A = \emptyset \rightarrow y \in V \subset X \setminus A$, $V \in \mathcal{T}$

Věta:
Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní prostor

Důkaz:
Buďte $(X, \mathcal{T}_X)$ kompaktní, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologické prostory, $f : X \rightarrow Y$ spojité:

Buď $S \subset \mathcal{T}_Y$ libovolné pokrytí Y

$\rightarrow Y = \bigcup_{B \in S} B \rightarrow f^{-1}(Y) = \bigcup_{B \in S} f^{-1}(B) = X \rightarrow \exists S' \subset S, |S'| < \infty$:

$X = \bigcup_{B \in S'} f^{-1}(B) \rightarrow Y = \bigcup_{B \in S'} B$

Definice: Lokální kompaktnost

Nechť $(X,\mathcal{T})$ je ~~lokálně kompaktní~~ topologický prostor.
Řekneme, že X je lokálně kompaktní, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje kompaktní okolí

Definice: Konvergence posloupnosti

Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor, $(x_n) \subset X$ posloupnost v X.
Řekneme, že (x_n) konverguje k bodu $x_0 \in X$, jestliže v každém okolí bodu x_0 leží (x_n) až na konečně mnoho výjimek.

Poznámka:
V Hausdorffově prostoru má každá posloupnost nejvýše jednu limitu

Definice: Sekvenciální kompaktnost

Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor.
Řekneme, že X je sekvenciálně kompaktní, jestliže z každé posloupnosti $(x_n) \subset X$ lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Poznámka:
Obecně jsou pojmy kompaktnost a sekvenciální kompaktnost nezávislé. Pro metrické prostory jsou ekvivalentní.

Definice: Součin topologií

Nechť $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ jsou topologické prostory.
Potom $\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ je báze topologie na $X \times Y$.
Tuto topologii nazýváme součinovou topologií na $X \times Y$.

Poznámka:

Množina $\mathcal{B}$ z předchozí definice opravdu je bází topologie na $X \times Y$:

① $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \times Y$

② $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : \forall z \in B_1 \cap B_2 : \exists B_3 \in \mathcal{B} : z \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$:

$B_1 = U_1 \times V_1$, $B_2 = U_2 \times V_2$, $z = (x,y) \in B_1 \cap B_2$:
$B_1 \cap B_2 = (U_1 \cap U_2 \times V_1 \cap V_2) =: B_3 \in \mathcal{B}$

· $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ báze $X, Y \to \mathcal{B} := \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ báze $X \times Y$

· $\mathcal{T}_{X \times Y}$ je nejslabší (nejhrubší) topologie taková, že:
projekce $p_X : X \times Y \to X : (x,y) \mapsto x$ jsou spojitá zobrazení.
$p_Y : X \times Y \to Y : (x,y) \mapsto y$

$\to U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) = p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V)$

Lemma 1:

Nechť $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ je topologický prostor, $\mathcal{T}_{X \times Y}$ součinová topologie, $x_0 \in X$.
Potom $f : Y \to X \times Y : y \mapsto (x_0, y)$ je spojité

Důkaz:

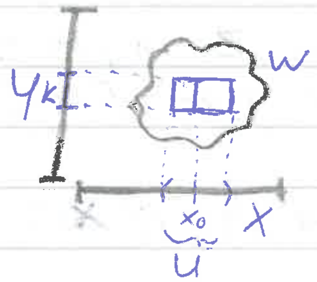
Buď $W \subset X \times Y$ otevřená taková, že $(x_0, \cdot) \in W$
$\to \exists U \in \mathcal{T}_X, x_0 \in U$: $\to U \times V \subseteq W$
$\exists V \in \mathcal{T}_Y$:

$\to V = f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_Y$

Lemma 2:

Nechť $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ jsou topologické prostory, $K\subset Y$ kompaktní, $W\in\mathcal{T}_{X\times Y}$, $x_0\in X$ tak, že $\{x_0\}\times K\subset W$.
Potom existuje okolí $U\in\mathcal{T}_X, x_0\in U$: $U\times K\subset W$.

Důkaz:
W je otevřená:
$\forall y\in K : \exists U_y\in\mathcal{T}_X, x_0\in U : \exists V_y\in\mathcal{T}_Y, y\in V_y$
tak, že $U_y\times V_y\subset W$



$\Rightarrow \bigcup_{y\in K} V_y \supset K$ pokrytí K

$\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N} : \{y_1,\dots,y_n\}\subset K : \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}\supset K$

Položme $U := \bigcap_{j=1}^{n} U_{y_j}$, $x_0\in U\in\mathcal{T}_X$

Ověřujme $U\times K\subset W$:
$x\in U, y\in K \Rightarrow \exists k\in\hat{n} : y\in V_{y_k} \wedge x\in U\subset U_{y_k}$

$\Rightarrow (x,y)\in U_{y_k}\times V_{y_k}\subset W \Rightarrow U\times K\subset W$

Věta: Součin kompaktních prostorů

Nechť $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ jsou kompaktní topologické prostory.
Pak $(X\times Y,\mathcal{T}_{X\times Y})$ je kompaktní topologický prostor.

Důkaz:
Buď $S=\{B_\alpha \mid \alpha\in I\}\subset\mathcal{T}_{X\times Y}$ libovolné pokrytí $X\times Y$
Buď $x\in X$ libovolné: $\{x\}\times Y$ je kompaktní podmnožina
$\Rightarrow \exists I_x\subset I, |I_x|<\infty : \bigcup_{\alpha\in I_x} B_\alpha\supset\{x\}\times Y$

Lemma 2: $\exists U_x\in\mathcal{T}_X, x\in U_x : U_x\times Y\subset\bigcup_{\alpha\in I_x} B_\alpha \Rightarrow X\times Y=\bigcup_{\alpha\in\bigcup_{x\in X} I_x} B_\alpha$

X kompaktní $\Rightarrow \exists m\in\mathbb{N} : \{x_1,\dots,x_m\}\subset X : X\times Y=\bigcup_{\alpha\in\bigcup_{k=1}^{m} I_{x_k}} B_\alpha$

Metrické prostory

Definice: Metrika

Nechť X je neprázdná množina, $\rho: X \times X \to \mathbb{R}_0^+$.
Řekneme, že ρ je metrika, jestliže platí, $\forall x,y,z \in X$:

① $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
② $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$
③ $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$

Uspořádanou dvojici (X,ρ) nazýváme metrickým prostorem

Poznámka:

Otevřená koule: $B(x,r) := \{y \in X \mid \rho(x,y) < r\}, r > 0$
Uzavřená koule: $\bar{B}(x,r) := \{y \in X \mid \rho(x,y) \leq r\}$

Obecně nemusí platit: $\bar{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$
Platí však: $B(x,r) \subset \overline{B(x,r)} \subset \bar{B}(x,r)$

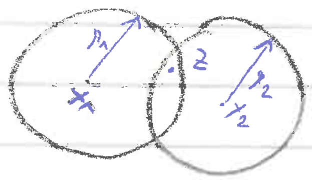
Věta: Báze

Nechť (X,ρ) je metrický prostor.
Potom množina $\mathcal{B} := \{B(x,r) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}^+\}$ je báze topologie.

Důkaz:

① $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$, zřejmé

② $\forall A,B \in \mathcal{B}: \forall x \in A \cap B: \exists C \in \mathcal{B}: x \in C \subset A \cap B$
$\iff \forall x_1, x_2 \in X: \forall r_1, r_2 > 0: \forall z \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2): \exists r > 0: B(z,r) \subset B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$
Buď $z \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$ libovolné:



Stačí volit $r := \frac{1}{2} \cdot \min\{r_1 - \rho(x_1,z), r_2 - \rho(x_2,z)\}$

Poznámka:

- Nechť X je metrický prostor, ρ metrika, $A\subset X$.
A je otevřená $\Leftrightarrow \forall y\in A: \exists r>0: B(y,r)\subset A$

- $(X,\rho_X),(Y,\rho_Y)$ metrické prostory,
jak lze ekvivalentně na $X\times Y$ definovat metriku jako:
- $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \rho_X(x_1,x_2)+\rho_Y(y_1,y_2)$

- $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \max\{\rho_X(x_1,x_2),\rho_Y(y_1,y_2)\}$

- $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{\rho_X^2(x_1,x_2)+\rho_Y^2(y_1,y_2)}$

- ρ,ρ jsou ekvivalentní $\Leftrightarrow \exists 0<A\leq B: \forall u,v\in X$ platí:
$$A\tilde{\rho}(u,v)\leq\rho(u,v)\leq B\tilde{\rho}(u,v)$$
$$\frac{1}{B}\rho(u,v)\leq\tilde{\rho}(u,v)\leq\frac{1}{A}\rho(u,v)$$

Tvrzení:
Topologie na $X\times Y$ indukovaná metrikou ρ je součinová topologie

Důkaz:
Stačí ověřit:
1. $\forall (x,y)\in X\times Y: \forall r>0: \exists r_1,r_2>0: B(x,r_1)\times B(y,r_2)\subset B((x,y),r)$
2. $\forall x,y\in X,Y,\ \forall r_1,r_2>0: \exists r>0: B((x,y),r)\subset B(x,r_1)\times B(y,r_2)$

Věta: Každý metrický prostor je T_4

Důkaz:

Poznámka:

- Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $x \in X$, $U \subset X$.
  U je okolí $x \iff \exists r > 0 : B(x,r) \subset U$

- $(x_n) \subset X$, $x \in X$:
  $x_n \to x \iff \forall r > 0 : (x_n) \subset B(x,r)$ až na konečně mnoho výjimek

Věta:

Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $S \subset X$.
Potom $S = \overline{S} \iff \forall (x_n) \subset S, x_n \to x : x \in S$

Důkaz:

$\Rightarrow$ platí obecně v topologickém prostoru:
Nechť $S = \overline{S}$, $(x_n) \subset S$, $x_n \to x$
Pak $\forall U \in \mathcal{T}, x \in U : \exists n \in \mathbb{N} : \forall m > n : x_m \in U$, zároveň $U \cap S \neq \emptyset$

$\Leftarrow$ Nechť platí: Kdykoli $(x_n) \subset S$, $x_n \to x$, pak $x \in S$:
Chceme ukázat, že $\overline{S} \subset S$:
Buď $x \in \overline{S}$ libovolné:
$\to$ $\forall n \in \mathbb{N}: B(x, \frac{1}{n}) \cap S \neq \emptyset$
pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap S$
$\to$ získali jsme posloupnost $(x_n) \subset S : x_n \to x$ $(\rho(x_n, x) < \frac{1}{n})$
$\to x \in S \to S = \overline{S}$

Poznámka:

Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $x, y \in X$, $x \neq y$
Pak $\rho(x,y) > 0$. Označme $r := \rho(x,y)$:

$x \in B(x, \frac{r}{2})$, $y \in B(y, \frac{r}{2})$, $B(x, \frac{r}{2}) \cap B(x, \frac{r}{2}) = \emptyset$
$\to$ (X,ρ) je Hausdorffův

$\to$ Každá kompaktní podmnožina (X,ρ) je uzavřená.

Věta: Každý metrický prostor je T_4

Důkaz:

Víme, že (X,ρ) je T_2 - Hausdorfův $\Rightarrow (X,\rho)$ je T_1

Stačí ukázat, že (X,ρ) je normální:

Buďte $A,B \in \mathcal{C}\tau, A \cap B = \emptyset$ libovolné!

$\Rightarrow$ Potom $\forall a \in A: a \in X \setminus B \Rightarrow \exists r_a > 0: B(a, r_a) \subset X \setminus B \Rightarrow B(a, r_a) \cap B = \emptyset$

Symetricky: pro $b \in B: \exists r_b > 0: B(b, r_b) \cap A = \emptyset$

Položme $U := \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{r_a}{2})$, $V := \bigcup_{b \in B} B(b, \frac{r_b}{2})$

$\Rightarrow$ Zřejmě $A \subset U, B \subset V$

Nyní stačí ověřit, že $U \cap V = \emptyset$:

Nechť $U \cap V \neq \emptyset: \exists x \in U \cap V \Rightarrow \exists a \in A, b \in B: x \in B(a, \frac{r_a}{2}) \cap B(b, \frac{r_b}{2})$

$\Rightarrow \rho(a,b) \leq \rho(a,x) + \rho(x,b) < \frac{r_a}{2} + \frac{r_b}{2} = \max\{r_a, r_b\} \overset{BÚNO}{=} r_a$

$\Rightarrow b \in B(a, r_a) \Rightarrow$ SPOR, že $B(a, r_a) \cap B = \emptyset$

Věta: Separabilita (X,ρ)

Nechť (X,ρ) je metrický prostor.

Potom X je separabilní $\Leftrightarrow$ X splňuje 2. axiom spočetnosti

Důkaz:

$\Leftarrow$ Platí obecně pro (X,τ)

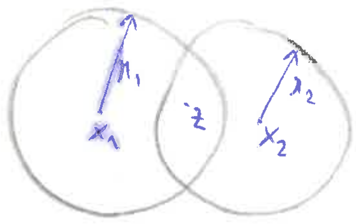
$\Rightarrow$ Nechť (X,ρ) je separabilní: $S \subset X$ spočetná, $\overline{S} = X$

Položme $\mathcal{B} := \{B(x,r) \mid x \in S, r \in \mathbb{Q}^+\}$, $\mathcal{B} \sim \mathbb{N}$

$\mathcal{B}$ báze:

① $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ ✓

② $\forall x_1, x_2 \in S: \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^+: \forall z \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2): \exists s \in S, r \in \mathbb{Q}^+: z \in B(s,r) \subset B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$



$\Rightarrow B(z,r) \subset B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$, kde $r := \min\{r_i - \rho(z,x_i) \mid i = 1,2\}$

S je hustá v X: $\exists s \in S: s \in B(z, \frac{r}{3}) \Rightarrow B(s, \frac{r}{4}) \subset B(z,r)$

$\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$: $\exists t \in \mathbb{Q}^+: B(s,t) \subset B(s, \frac{r}{4}) \wedge z \in B(s,t)$ ✓

Definice: Omezená množina

Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $A\subset X$.
Řekneme, že A je omezená, jestliže: $\exists x\in X: \exists r>0: A\subset B(x,r)$

Poznámka:

- Sjednocení konečně mnoha omezených množin je omezená množina.

Definice: ε-síť

Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $M\subset X$, $\varepsilon>0$
Řekneme, že $A\subset X$ je ε-síť pro M, jestliže $M\subset \bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon)$.

Poznámka:

Nepožaduje se, aby $A\subset M$

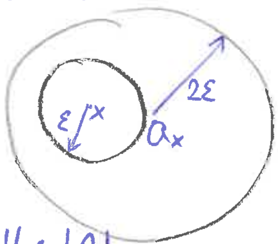
Platí:

Nechť (X,ρ) je topologický prostor, A ε-síť pro $M\subset X$.
Pak existuje $A'\subset M$ 2ε-síť pro M a platí: $|A|<\infty \Rightarrow |A'|<\infty$

Důkaz:
Nechť BÚNO $\forall x\in A: B(x,\varepsilon)\cap M\neq\emptyset$:
Pak pro každé $x\in A$ zvolme $a_x\in B(x,\varepsilon)\cap M$

→ $B(a_x,2\varepsilon)\supset B(x,\varepsilon)$

→ $A' := \{a_x \mid x\in A\}$ je 2ε síť pro M



$\bigcup_{x\in A'} B(a_x,2\varepsilon)\supset\bigcup_{x\in A}B(x,\varepsilon)\supset M$ a platí: $|A'|\leq|A|$

Definice: Totální omezenost

Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $M\subset X$.
Řekneme, že M je totálně omezená, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje konečná ε-síť pro M.

Poznámka:

- Totálně omezená množina je omezená
- V $\mathbb{R}^n$ je každá omezená množina i totálně omezená.

Lemma:

Nechť $(X,\mathcal{T})$ je T_1-topologický prostor, $M\subset X$, x hromadný bod M. Pak každé okolí x obsahuje nekonečně mnoho bodů M.

Důkaz:
(sporem)

Nechť $\exists U\in\mathcal{T}, x\in U: U\setminus\{x\}\cap M =: A$, $|A|<\infty$

$\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}: A=\bigcup_{k=1}^{n}\{x_k\} \xrightarrow{T_1} A$ je uzavřená $\Rightarrow B:=U\setminus A$ je otevřená a $x\in B$

$\Rightarrow B\setminus\{x\}\cap M\neq\emptyset$, zároveň ale platí ~~B~~ $B\setminus\{x\}\cap M=\emptyset$, spor

Lemma: Borel

Jestliže každá nekonečná množina v (X,ρ) má hromadný bod, pak X je totálně omezená.

Důkaz:
(sporem)

Nechť X není totálně omezená, tj: $\exists\varepsilon>0: \forall A\subset X, |A|<\infty: \bigcup_{x\in A}B(x,\varepsilon)\neq X$

sestrojíme posloupnost $(x_n)\subset X: \forall k,l\in\mathbb{N}; k\neq l: \rho(x_k,x_l)\geq\varepsilon$:

Buď x_1 libovolné;

Dále vybereme $x_{n+1}\in X\setminus\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\varepsilon)$ libovolné $\Rightarrow \rho(x_k,x_l)\geq\varepsilon, \forall k\neq l$

$\Rightarrow M:=\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ je nekonečná $\Rightarrow \exists x\in M$, hromadný bod

$\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}: x_n\in B(x,\frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow B(x,\frac{\varepsilon}{2})\subset B(x_n,\varepsilon)$

$\Rightarrow B(x_n,\varepsilon)$ však obsahuje z množiny M pouze x_n, spor a :

ždá kompaktní množina metrického prostoru je totálně omezená.

kaz :

ď M libovolná kompaktní podmnožina (X,ρ).

ž každá nekonečná podmnožina M má hromadný bod.

$\Rightarrow$ M je totálně omezená

ta :

otálně omezený metrický prostor je separabilní

ůkaz :

ro každé $n \in \mathbb{N}$ položme A_n $\frac{1}{n}$-síť:

efinujme $S := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$:

S spočetná ✓

S hustá v X :

hceme ukázat, že $\forall x \in X : \forall r > 0 : B(x,r) \cap S \neq \emptyset$:

Buďte $x \in X, r > 0$ libovolná :

ak $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < r$

A_n je $\frac{1}{n}$-síť $\Rightarrow \exists a \in A_n : x \in B(a, \frac{1}{n}) \Rightarrow \rho(a,x) < \frac{1}{n} < r$

$\Rightarrow a \in B(x,r) \cap B(a,\frac{1}{n}) \Rightarrow B(x,r) \cap B(a,\frac{1}{n}) \neq \emptyset$

Buď $z \in V^{\perp}$ takové, že $\Psi(z) = 1$:

Potom $\forall x \in \mathcal{H}$: $x - \Psi(x) z \in V$

$\Psi(x - \Psi(x)z) = \Psi(x) - \Psi(x) = 0$

$\forall w \in V^{\perp}$: $w - \Psi(w) z \in V^{\perp} \cap V = \{0\}$

$\to w = \Psi(w) z$, (z) je báze $V^{\perp}$

$\to 0 = \langle z | x - \Psi(x) z \rangle = \langle z | x \rangle - \Psi(x) \|z\|^2$

$\to \Psi(x) = \langle \frac{z}{\|z\|^2}, x \rangle$

Věta: Sdružený operátor

Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor,

Potom: $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\ \exists!\, A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \forall x, y \in \mathcal{H} : \langle Ax | y \rangle = \langle x | A^* y \rangle$

Důkaz:

Buď $y \in \mathcal{H}$ libovolné pevné: $\langle y | Ax \rangle \overset{!}{=} \langle A^* y | x \rangle$

Položme $\Psi(x) := \langle y | Ax \rangle, \forall x \in \mathcal{H}$, $\Psi \in \mathcal{H}^*$

Rieszova věta

$\to \exists!\, w_y \in \mathcal{H} : \Psi(x) = \langle w_y | x \rangle$

Pak $A^*_y := w_y$

Věta:
Nech (X,ρ) je metrický priestor.
Potom X je kompaktný, práve tehdy keď každá nekonečná podmnožina X má hromadný bod.

Důkaz:
$\Rightarrow$ Platí pre obecné topologické priestory
$\Leftarrow$ Nech každá nekonečná podmnožina má hromadný bod:
(I) Ukážeme, že liboválné pokrytí má spočetné podpokrytí:
$\rightarrow (X,\rho)$ je totálně omezený $\rightarrow (X,\rho)$ je separabilní $\rightarrow$
$\rightarrow (X,\rho)$ splňuje 2. axiom spočetnosti:

Buď $\mathcal{B}$ spočetná báze (X,ρ):
Nech $\mathcal{U}$ je liboválné pokrytí X:

$\rightarrow \forall x \in X : \exists G_x \in \mathcal{U} : x \in G_x \xrightarrow{\mathcal{B}\text{ báze}} \exists B_x \in \mathcal{B}, x \in B_x : B_x \subset G_x$

$\rightarrow \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}' := \{B_x \mid x \in X\}$, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B = X$

$\rightarrow \forall B \in \mathcal{B}' : \exists G_B \in \mathcal{U} : B \subset G_B \rightarrow \mathcal{U}' := \{G_B \mid B \in \mathcal{B}'\} \subset \mathcal{U}$
$\rightarrow \mathcal{U}'$ spočetné podpokrytí

(II) Ukážeme, že spočetné pokrytí má konečné podpokrytí.
Označme $\mathcal{U}' := \{U_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ spočetné pokrytí X:
Nech $\forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_{k=1}^{n} U_k \neq X$:

$\rightarrow$ zvolme pro $n \in \mathbb{N} : x_n \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ libovolně
Označme $M := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\rightarrow M$ má hromadný bod $x \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x \in U_n \rightarrow x \in V := \bigcup_{k=1}^{n} U_k$

$\rightarrow V \in \mathcal{J}, x \in V \rightarrow V \cap M \subset \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, tj.: $|V \cap M| < \infty$, spor

Věta:
Metrický prostor je kompaktní právě když je sekvenciálně kompaktní.

Důkaz:

$\Rightarrow$ Nechť (X, ρ) je kompaktní:
Buď $(x_n) \subset X$ libovolná: Označme $M := \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$

- $|M| < \infty \rightarrow \exists x \in M : x = x_n$ pro ∞ mnoho $n \in \mathbb{N}$
- $|M| = \infty$:

M má hromadný bod x: sestrojíme vybranou $(x_{n_k}) : x_{n_k} \to x$:

Buď $x_{n_1} \in B(x,1) \cap M$ libovolné, $x_{n_1} \neq x$
pro $k \in \mathbb{N}$: zvolme $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k}) \setminus \{x\} \cap M$ libovolně

$\rightarrow \rho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N} \rightarrow x_{n_k} \to x \wedge (x_{n_k}) \subset (x_n)$

$\Leftarrow$ Nechť (X, ρ) je sekvenciálně kompaktní:
Chceme ukázat, že každá nekonečná podmnožina X má hromadný bod:
Buď $M \subset X$, $|M| = \infty$ libovolná
$\rightarrow$ existuje spočetná podmnožina $N := \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$
$\rightarrow (x_k)_{k \geq 1}$ má konvergentní podposloupnost $\rightarrow N$ má hromadný bod
$\rightarrow X$ je kompaktní

Úplnost

Definice: Cauchyovská posloupnost
Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $(x_n) \subset X$.
Řekneme, že $(x_n)_{n\geq 1}$ je Cauchyovská posloupnost, jestliže:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m,n > n_0 : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$

Definice: Úplný metrický prostor
Nechť (X,ρ) je metrický prostor.
Řekneme, že (X,ρ) je úplný, jestliže každá Cauchyovská posloupnost v X má limitu v X.

Platí:
Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $(x_n) \subset X$, $x_n \to x$.
Pak (x_n) je Cauchyovská

Důkaz:
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné:
Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > 0 : \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall n,m > n_0 : \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \varepsilon$

Tvrzení:
Nechť (X,ρ) je úplný metrický prostor, $Y \subset X$.
Pak $(Y, \rho|_{Y\times Y})$ je úplný právě tehdy když $Y = \overline{Y}$.

Důkaz:
$\Rightarrow$ Buď $(x_n) \subset Y$ libovolná konvergentní posloupnost, $x_n \to x$.
Pak (x_n) je Cauchyovská $\Rightarrow$ (x_n) má limitu v Y, tj. $x \in Y \Rightarrow Y = \overline{Y}$

$\Leftarrow$ Buď $(x_n) \subset Y$ libovolná Cauchyovská posloupnost v Y
$\Rightarrow (x_n)$ je Cauchyovská v $X \Rightarrow (x_n)$ má limitu $x \in X$ $\wedge$
$\Rightarrow (x_n) \subset Y$, $x_n \to x$, $Y = \overline{Y} \Rightarrow x \in Y \Rightarrow$ Cauchyovská posloupnost v Y má limitu v Y.

Tvrzení:
Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $(x_n) \subset X$ Cauchyovská, $x \in X$.
Jestliže existuje vybraná posloupnost (x_{n_k}): $x_{n_k} \to x$, potom $x_n \to x$.

Důkaz:
$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x)$

Věta: Každý ~~metrický~~ kompaktní metrický prostor je úplný

Důkaz:
Buď (X,ρ) je kompaktní:
$\to$ (X,ρ) sekvenciálně kompaktní

Nechť $(x_n) \subset X$ je Cauchyovská posloupnost:
Pak $\exists (x_{n_k})$ vybraná konvergentní podposloupnost

$\to$ (x_n) má limitu v X

Věta:
Metrický prostor je kompaktní právě tehdy když je úplný a totálně omezený.

Důkaz:
$\Rightarrow$ Každý kompaktní metrický prostor je úplný a totálně omezený

$\Leftarrow$ Nechť (X,ρ) je úplný a totálně omezený:
Ukážeme, že X je sekvenciálně kompaktní:
Buď $(x_n) \subset X$ libovolná posloupnost:

Konstrukce vybrané posloupnosti $(x_n^{(k)})$:
$(x_n^{(0)}) := (x_n)$
pro $k \in \mathbb{N}$: $\exists A_k \subset X$ $\frac{1}{k}$-síť (konečná) $\to \exists a_k \in A_k : \exists \infty n \in \mathbb{N} : x_n^{(k-1)} \in B(a_k, \frac{1}{k})$

$\to$ Položme $(x_n^{(k)}) := (x_n^{(k-1)}) \cap B(a_k, \frac{1}{k})$

Definujme $y_k := x_k^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$, $(y_k) \subset (x_n)$

→ (y_k) Cauchyovská?
Buďte $k, l \in \mathbb{N}$, $k \geq l$:

→ $y_l, y_k \in B(a_l, \frac{1}{l})$

→ $\rho(y_k, y_l) \leq \rho(y_k, a_l) + \rho(a_l, y_l) < \frac{2}{l}$

→ Obecně: $\forall k, l \in \mathbb{N}: \rho(y_k, y_l) < \frac{2}{\min\{k,l\}} \xrightarrow{k,l \to +\infty} 0$

→ X sekvenciálně kompaktní → X kompaktní

Důsledek:
Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor, $M \subset X$.
Pak M je kompaktní právě tehdy když M je uzavřená a totálně omezená.

Definice: Prekompaktnost
Nechť $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffův topologický prostor, $M \subset X$.
Řekneme, že M je prekompaktní, jestliže $\overline{M}$ je kompaktní

Platí:
Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$.
M je totálně omezená $\Rightarrow$ $\overline{M}$ je totálně omezená.

Důkaz:
M totálně omezená $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists A \subset X, |A| < \infty : M \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$
Chceme $\overline{M} \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$:
Buď $x \in \overline{M}$ libovolné:

→ $x \in \overline{M}$ → $\exists (x_n) \subset M : x_n \to x$ → $\exists y \in M : \rho(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \exists a \in A : \rho(a,y) < \frac{\varepsilon}{2}$

→ $\rho(x, a) \leq \rho(y,x) + \rho(y,a) < \varepsilon$ → $y \in B(a, \varepsilon)$

Důsledek:
Nechť (X,ρ) je metrický prostor, který je úplný, $M \subset X$.
Potom M je překompaktní právě tehdy když M je totálně omezená.

Definice: Izometrie
Nechť $(X,\rho_X),(Y,\rho_Y)$ jsou metrické prostory, $f: X \to Y$.
Řekneme, že f je izometrie, jestliže platí:
$\forall x_1,x_2 \in X: \rho_X(x_1,x_2) = \rho(f(x_1),f(x_2))$.

Poznámka:
Každé izometrické zobrazení je prosté, spojité a zobrazuje Cauchyovské posloupnosti na Cauchyovské posloupnosti.

Definice: Izometrické prostory
Nechť $(X,\rho_X),(Y,\rho_Y)$ jsou metrické prostory.
Řekneme, že prostory X,Y jsou izometrické, jestliže existuje izometrická bijekce $f: X \to Y$.

Lemma:
Nechť $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ jsou topologické prostory, Y Hausdorffův, $f: X \to Y$, $g: X \to Y$ spojitá zobrazení, $M \subset X$.
Potom je-li $\overline{M} = X \wedge f|_M = g|_M$, pak $f = g$.

Důkaz.
(sporem)
Nechť $\exists x \in X: f(x) \neq g(x)$:

$\Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}_Y, f(x) \in U; \exists V \in \mathcal{T}_Y, g(x) \in V: U \cap V = \emptyset \Rightarrow x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$

$\overline{M} = X \Rightarrow M \cap (f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in M \cap (f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V))$

$\Rightarrow f(y) = g(y) \wedge f(y) \in U \wedge g(y) \in V, U \cap V = \emptyset \Rightarrow f(y) \neq g(y)$, spor

Definice: Zúplnění metrického prostoru

Nechť (X,ρ) je metrický prostor.
Zúplněním (X,ρ) rozumíme dvojici (X^*,ρ^*) a $f: X \to X^*$, kde (X^*,ρ^*) je metrický (úplný) prostor a f izometrie, taková že: $\overline{f(X)} = X^*$.

Věta: O zúplnění metrického prostoru

Ke každému metrickému prostoru existuje zúplnění, které je dáno jednoznačně až na izometrickou bijekci.

Důkaz:

I Jednoznačnost

Mějme $((X_1^*,\rho_1^*),f_1)$, $((X_2^*,\rho_2^*),f_2)$ dvě zúplnění (X,ρ)

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1^* \arrow[rr, "g"'] & & X_2^*
\end{tikzcd}$$

· Definujme $g: X_1^* \to X_2^*$ následovně:

$x_1^* \in X_1^* \to \exists (x_n) \subset X: f_1(x_n) \to x_1^*$

$(f_1(x_n))$ má limitu v $X_1^* \to (x_n)$ je Cauchyovská $\to (f_2(x_n))$ je Cauchyovská $\to$
$\to (f_2(x_n))$ má limitu v X_2^*, označme $x_2^* := \lim_{n\to+\infty} f_2(x_n)$

Položme $g(x_1^*) := x_2^*$

· Ověřme korektnost definice:

Nechť $(\tilde{x}_n) \subset X$ $f_1(\tilde{x}_n) \to x_1^* \wedge (\tilde{x}_n) \neq (x_n)$:

$$\rho_1^*(f_1(x_n), f_1(\tilde{x}_n)) \leq \rho_1^*(f_1(x_n), x_1^*) + \rho_1^*(x_1^*, f(\tilde{x}_n)) \to 0$$

$$f_1 \text{ izometrie} \to \rho(x_n, \tilde{x}_n) \to 0 \xrightarrow{f_2 \text{ izometrie}} \rho_2^*(f_2(x_n), f_2(\tilde{x}_n)) \to 0$$

$$\to \rho_2^*(f_2(\tilde{x}_n), x_2^*) \leq \rho_2^*(f_2(\tilde{x}_n), f_2(x_n)) + \rho_2^*(f(x_n), x_2^*) \to 0$$

$$\to \lim_{n\to+\infty} f_2(\tilde{x}_n) = x_2^*$$

• g je izometrie:
Buďte $x_1^*, y_1^* \in X_1^*$ libovolné

$\Rightarrow \exists (x_n), (y_n) \subset X : f_1(x_n) \to x_1^* \wedge f_1(y_n) \to y_1^*$:

$$\rho_2^*(g(x_1^*), g(y_1^*)) = \lim_{n\to+\infty} \rho_2^*(f_2(x_n), f_2(y_n)) \overset{f_2 \text{ izometrie}}{=} \lim_{n\to+\infty} \rho(x_n, y_n) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \rho_1^*(f_1(x_n), f_1(y_n)) = \rho_1^*(x_1^*, y_1^*)$$

• $f_2 = g \circ f_1$:
Buď $x \in X$ libovolné, položme $x_n := x$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\Rightarrow x_1^* = \lim_{n\to+\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f_1(x) = f_1(x)$
$g(x_1^*) = \lim_{n\to+\infty} f_2(x_n) = f_2(x)$

$\Rightarrow g(f_1(x)) = f_2(x)$, $\forall x \in X$

I) Existence

• Konstrukce množiny (X^*, ρ^*):

Definujme množinu $\tilde{X} := \{(x_n) \subset X \mid (x_n) \text{ Cauchyovská}\}$
a na ní relaci $\sim$: $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$

Relace $\sim$ je ekvivalence na $\tilde{X}$:
1) Reflexivita ✓
2) Symetrie ✓
3) Transitivita ✓

Položme $X^* := \tilde{X}/\sim \; = \{[(x_n)] \mid (x_n) \in \tilde{X}\}$

a pro $x^* = [(x_n)]$, $y^* = [(y_n)]$

klademe $\rho^*(x^*, y^*) := \lim_{n\to+\infty} \rho(x_n, y_n)$

· Definice $f : X \to X^*$:

položme $f(x) = [(x)_{n\geq 1}]$, $\forall x \in X$

Plat!:
Je-li $(x_n) \subset X$, (x_n) Cauchyovská, pak $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = x^* = [(x_n)] \in X^*$.

Důkaz:
$x^* = [(x_k)_{k\geq 1}]$
$f(x_n) = [(x_n)_{k\geq 1}]$

$\rho^*(f(x_n), x^*) = \lim_{k\to+\infty} \rho(x_n, x_k)$

$\lim_{n\to+\infty} \rho^*(f(x_n), x^*) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \rho(x_n, x_k) = 0$

· $\overline{f(X)} = X^*$:

$\forall x^* \in X^*$, $x^* = [(x_n)_{n\geq 1}]$, (x_n) Cauchyovská
podle předchozího platí: $x^* = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \in \overline{f(X)}$

· X^* úplný:

Buď $(x_n^*) \subset X^*$ libovolná Cauchyovská posloupnost:

pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $x_n \in X$, tak aby: $\rho^*(f(x_n), x_n^*) < \frac{1}{n}$,
potom $(x_n) \subset X$ je Cauchyovská:

$\rho(x_n, x_m) = \rho^*(f(x_n), f(x_m)) \leq \rho^*(f(x_n), x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \rho^*(x_m, f(x_m)) <$

$< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \rho^*(x_n^*, x_m^*) \xrightarrow{n,m\to+\infty} 0$

Položme $x^* := [(x_n)] \in X^*$: $\rho^*(x_n^*, x^*) \leq \rho^*(x_n^*, f(x_n)) + \rho^*(f(x_n), x^*) <$

$< \frac{1}{n} + \rho^*(f(x_n), x^*) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Topologické vektorové prostory

Definice: Topologický vektorový prostor
Nechť V je vektorový prostor nad T ($\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$).
Řekneme, že V je topologický vektorový prostor,
jestliže operace $\oplus: V \times V \to V$, $\odot\, T \times V \to V$ jsou spojitá zobrazení.

Poznámka:
Připomenutí:
Nechť $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$ topologické prostory, $f: X \times Y \to Z$ spojité, $x_0 \in X$.
Potom $f_{x_0}: Y \to Z: y \mapsto f(x_0, y)$ je spojité

- Uvažujme $y \in V$ libovolné:
Pak $f(x) := y + x$ je spojité $\forall x \in V$
$\to f^{-1}(x) := -y + x$ je spojité $\wedge$ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$
$\to f$ je homeomorfismus, $\forall y \in V$

- Uvažujme $\lambda \in T$ libovolné:
Pak $g(x) := \lambda x$ je spojité $\forall x \in X$
$\to g^{-1}(x) := \frac{1}{\lambda} x$ je spojité $\wedge$ $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = id$
$\to g$ je homeomorfismus

- Buď $U \subset V$ libovolná otevřená
Pak $f(U) = y + U$, $g(U) = \lambda U$ jsou otevřené množiny ve V

- Buď $M \subset V$ libovolná uzavřená
Pak $f(M) = y + M$, $g(M) = \lambda M$ jsou uzavřené množiny ve V

- Buď $U \subset V$ libovolná otevřená, $A \subset V$ libovolná
Pak $A + U$ je otevřená: $A + U = \bigcup_{a \in A} (a + U) \in \mathcal{T}$

- V definici se nepožaduje T_1 axiom

Speciální případ $O \in U$:
Pak $A = A + O \subset A + U$

· Buď $\lambda \in T$ libovolné pevné:
Pak $f_\lambda : V \times V \to V : (x,y) \mapsto x + \lambda y$ je spojité,

Speciální případ $\lambda = -1$:
$f_{-1} : V \times V \to V : (x,y) \mapsto x - y$ je spojité

Důsledek:
Buď $U \in \mathcal{T}$, $O \in V$ libovolné otevřené okolí O.
Pak existují $W_1, W_2 \ni O$ otevřené okolí O tak že: ① $W_1 + W_1 \subset U$
② $W_2 - W_2 \subset U$

$W_1 + W_1 = \{x + y \mid x, y \in W_1\} \subset U$
$W_2 - W_2 = \{x - y \mid x, y \in W_2\} \subset U$

Důkaz
① Označme $P : V \times V \to V : (x,y) \mapsto x + y$;
$P(0,0) = O \in U \to P^{-1}(U) \ni (0,0)$ otevřené okolí $(0,0)$.
$\to \exists A, B \in \mathcal{T} : A + B \subset P^{-1}(U) \to W_1 := A \cap B$ splňuje $W_1 + W_1 \subset U$

② Označme $P : V \times V \to V : (x,y) \mapsto x - y$;
$P(0,0) = O \in U \to P^{-1}(U) \ni (0,0)$ otevřené okolí $(0,0)$
$\to \exists A, B \in \mathcal{T} : A + B \subset P^{-1}(U) \to W_2 := A \cap B$ splňuje $W_2 - W_2 \subset U$

Věta:
Každý topologický vektorový prostor je regulární, je-li navíc T_1 pak je T_3.

Důkaz
Buďte $x \in V$, $A \subset V$, $A = \bar{A} \wedge x \notin A$, BÚNO $x = O$:
$\to x \in V \setminus A \in \mathcal{T} \to \exists W \ni O$ otevřené: $W - W \subset V \setminus A$
$\to A \subset A + W$ otevřené okolí A
$\to$ Buď $z \in W \cap (A + W)$ libovolné: $z = x + y$, $x \in A$, $y \in W \to x = z - y \in W - W \subset V \setminus A$, spor
$\to W \cap (A + W) = \emptyset$

Minkowského funkcionál, konvexní množiny

Poznámka:
Připomenutí:
Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $X \subset V$.
Pak konvexní obal množiny X je množina $[X]_k$, nejmenší konvexní množina obsahující X.

Platí:
$[X]_k := \{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \mid m \in \mathbb{N}, x_k \in X, \alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1\}$

X konvexní $\Rightarrow [X]_k = X$

Věta:
Nechť V je vektorový (topologický) prostor nad $\mathbb{R}$, $A \subset V$.
Potom platí: $A = A^\circ \Rightarrow [A]_k = [A]_k^\circ$

Důkaz:
Ukážeme, že $[A]_k$ je otevřená:
Buď $a \in [A]_k$ libovolné:
$a = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in A$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$: $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$

$\rightarrow A = A^\circ \rightarrow \forall k \in \hat{m} : \exists U_k \in \mathcal{T}, x_k \subset U_k \subset A$

$\rightarrow a \in U := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k U_k \subset [A]_k$

Věta:
Nechť V je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $M \subset V$
Je-li M konvexní, pak $M^\circ, \overline{M}$ jsou konvexní

Důkaz:
- M°: $M^\circ \subset [M^\circ]_k \subset [M]_k = M \rightarrow M^\circ \subset [M^\circ]_k \subset M \rightarrow M^\circ = [M^\circ]_k$

Maximalita vnitřku

$\cdot\ \overline{M}$: Buďte $x_0, y_0 \in \overline{M}$ libovolné; $\alpha \in (0,1)$ libovolné
Chceme ukázat, že $x_0\alpha + y_0(1-\alpha) \in \overline{M}$:

$\rightarrow \alpha x_0 + (1-\alpha)y_0 \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T}, \alpha x_0 + (1-\alpha)y_0 \in U.\ U \cap M \neq \emptyset$

Buď U libovolné takové:

$f: V \times V \to V: (x,y) \mapsto \alpha x + (1-\alpha)y$ je spojité

$\rightarrow f(x_0, y_0) = \alpha x_0 + (1-\alpha)y_0 \in U \rightarrow \exists W_{x_0}, W_{y_0} \in \mathcal{T}, x_0 \in W_{x_0}, y_0 \in W_{y_0}\ f(W_{x_0} \times W_{y_0}) \subset U$
$x_0 \in \overline{M}: \exists x_1 \in W_{x_0} \cap M$
$y_0 \in \overline{M}: \exists y_1 \in W_{y_0} \cap M$

$\rightarrow f(x_1, y_1) = \alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 \in f(W_1 \times W_2) \subset U$
$\wedge\ \alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 \in M$, M konvexní

$\rightarrow U \cap M \neq \emptyset$

Definice: Konvexní funkcionál
Nechť V je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $\rho: V \to \langle 0, +\infty)$
Řekneme, že ρ je konvexní funkcionál, jestliže platí:
1. $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$
2. $\forall x \in V, \forall \lambda \geq 0: \rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$

Věta:
Nechť V je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, p konvexní funkcionál na V, $k > 0$.
Potom $E := \{x \in V \mid p(x) < k\}$, $F := \{x \in V / p(x) \leq k\}$ jsou konvexní množiny.
Navíc platí: $\forall x \in V: \exists \varepsilon > 0: \forall \lambda \in [0, \varepsilon): \lambda x \in E$

Důkaz:
Buďte $x, y \in E$, $\alpha \in (0,1)$ libovolná:
$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) < k \leq k \rightarrow E, F$ jsou konvexní.

Chceme nyní ukázat:
$\forall x \in V : \exists \varepsilon > 0 : \forall \lambda \in [0, \varepsilon) : \lambda x \in E$:

Buď $x \in V$ libovolné:
zvolme $\varepsilon > 0$, tak aby $\varepsilon p(x) \le k$:

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) = \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \varepsilon p(x) \le \frac{\lambda}{\varepsilon} k < k$$

Definice Minkowského funkcionál

Nechť V je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $M \subset V$ konvexní.
a nechť platí $\forall x \in V : \exists \varepsilon > 0 : \forall \lambda \in [0, \varepsilon) : \lambda x \in M$:

Položme pro každé $x \in V$: $p(x) := \inf \{ \lambda > 0 \mid \frac{1}{\lambda} x \in M \}$

Pak $p : V \to [0, +\infty)$ nazveme Minkowského funkcionálem.

Věta:

Minkowského funkcionál je konvexní funkcionál.

Důkaz:
1. $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in V$:

Buďte $x, y \in V$ libovolná:
položme $A_x = \{ \lambda > 0 \mid \frac{1}{\lambda} x \in M \}$, $A_y := \{ \lambda > 0 \mid \frac{1}{\lambda} x \in M \}$

Pro $\varepsilon > 0$ libovolné
zvolíme $\alpha \in A_x$: $\alpha < p(x) + \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{1}{\alpha} x \in M$
$\beta \in A_y$: $\beta < p(y) + \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{1}{\beta} y \in M$

M je konvexní $\to \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{1}{\alpha} x \right) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \left(\frac{1}{\beta} y \right) = \frac{1}{\alpha+\beta} (x+y) \in M$

$\to \alpha + \beta \in A_{x+y}$

$\to p(x+y) = \inf A_{x+y} \le \alpha + \beta < p(x) + \frac{\varepsilon}{2} + p(y) + \frac{\varepsilon}{2} = p(x) + p(y) + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in V: p(\lambda x) = \lambda p(x)$

Buďte $\lambda > 0, x \in V$ libovolné:

$$\alpha \in A_{\lambda x} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\lambda x \in M \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\alpha} x \in M \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\lambda} \in A_x \Leftrightarrow \alpha \in \lambda A_x$$

$\Rightarrow p(\lambda x) = \lambda p(x)$

Definice: Omezená množina

Nechť V je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $M \subset V$.
Řekneme, že M je omezená, jestliže pro každé okolí 0, U
existuje $\lambda > 0$: $M \subset \lambda U$

Věta:

Nechť V je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
Pak V je normovatelný, tj. topologie na V je určena normou,
právě tehdy když: ① V je T_1 prostor
② Existuje neprázdná konvexní otevřená množina

Důkaz:

$\Rightarrow$ jasné, norma je konvexní funkcionál

$\Leftarrow$ pomocí Minkowského funkcionálu

Věta:

Pro dané $n \in \mathbb{N}$ jsou všechny n-rozměrné T_1 topologické vektorové prostory nad stejným tělesem ($\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) topologicky izomorfní

Bez důkazu

Zornovo lemma:

Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina
Jestliže v $(M, \leq)$ má každý řetězec horní závoru, pak v M existuje maximální prvek.

Věta: Hahn-Banachova

Nechť V je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $V_0 \subset\subset V$, p konvexní funkcionál na V, f_0 lineární funkcionál na V_0, takový, že platí: $\forall x \in V_0 \; f_0(x) \leq p(x)$.

Potom existuje lineární funkcionál f na V tak, že:
① $\forall x \in V_0 : f(x) = f_0(x)$
② $\forall x \in V : f'(x) \leq p(x)$

Důkaz:
Nechť BÚNO $V_0 \neq V$:
Buď $z \in V \setminus V_0$ libovolné:

Položme $V' := V_0 + \mathbb{R} z$:
Najdeme f', rozšíření f_0 na V':

Nechť $c \in \mathbb{R}$ je zatím blíže nespecifikovaná konstanta:

Pak $\forall x \in V_0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ položme $f'(x + \lambda z) := f_0(x) + \lambda c$:
① splněno ✓
② $\forall x \in V_0 : \forall \lambda \in \mathbb{R} : f_0(x) + \lambda c \overset{?}{\leq} p(x + \lambda z)$

3 případy: a) $\lambda = 0$ ✓

b) $\lambda > 0$: $f_0(\frac{1}{\lambda} x) + c \leq p(\frac{1}{\lambda} x + z)$
$\rightarrow \forall x \in V_0 : c \leq p(x+z) - f_0(x)$

c) $\lambda < 0$: $f_0(\frac{1}{\lambda} x) + c \geq -p(-\frac{1}{\lambda} x - z)$
$\rightarrow \forall x \in V_0 : c \geq -p(-x-z) - f_0(x)$

· Volba $c \in \mathbb{R}$:

Chceme:

$\forall x \in V_0: \ c \geq -p(-x-z) - f_0(x) \wedge c \leq p(x+z) - f_0(x)$

$\rightarrow \sup_{x \in V_0} (-p(-x-z) - f_0(x)) \leq \inf_{x \in V_0} (p(x+z) - f_0(x))$

$\rightarrow \forall x, y \in V_0: -p(-x-z) - f_0(x) \leq p(y+z) - f_0(y)$

$\rightarrow \forall x, y \in V_0: \ f_0(y-x) \leq p(y+z) + p(-x-z)$

ale platí:

$f_0(y-x) \leq p(y-x) = p(y+z+(-x-z)) \leq p(y+z) + p(-x-z)$ ✓

Zároveň všechny úpravy byly ekvivalentní:

$\rightarrow$ Takové $c \in \mathbb{R}$ existuje a ② je splněna

Takto budeme pokračovat dále $\rightarrow$ Zornova lemma:

Definujme množinu $\mathcal{F}$:

$\mathcal{F} := \{(W, g) \mid V_0 \subset\subset W \subset\subset V, g$ lineární funkcionál$\}$

g splňuje: $g|_{V_0} = f_0 \ \wedge \ \forall x \in W: g(x) \leq p(x)$

Množina všech prodloužení

Na $\mathcal{F}$ definujme relaci uspořádání $\leq$:

$(W_1, g_1) \leq (W_2, g_2) \Leftrightarrow W_1 \subset\subset W_2 \wedge g_2|_{W_1} = g_1$

① Reflexivita ✓

② Antisymetrie ✓

③ Transitivita ✓

Ověřujeme předpoklady Zornova lemmatu:
Buď $\mathcal{L} = \{(W_\alpha, g_\alpha) \mid \alpha \in I\} \subset \mathcal{F}$ řetězec, I libovolná indexová množina

Konstrukce horní závory:

$$W := \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$$

$\forall x \in W: \exists \alpha \in I: x \in W_\alpha$, pak položíme $g(x) := g_\alpha(x)$

- korektnost definice g:
nechť $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in I: x \in W_{\alpha_1} \wedge x \in W_{\alpha_2}$:
pak BÚNO $W_1 \leq W_2 \Rightarrow g_1 = g_2|_{W_1}$

- W je podprostor V
Buďte $x, y \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ libovolné:
pak $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in I: x \in W_{\alpha_1} \wedge y \in W_{\alpha_2}$, nechť BÚNO $W_{\alpha_1} \leq W_{\alpha_2} \Rightarrow x, y \in W_{\alpha_2}$
W_{α_2} podprostor $V \Rightarrow x + \lambda y \in W_{\alpha_2} \subset V$

- g je lineární:
$\forall \alpha \in I: g_\alpha$ lineární

- $\forall x \in W: g(x) \leq p(x)$
$\forall \alpha \in I: g$ je prodloužení $g_\alpha \wedge W_\alpha \subset W \Rightarrow \forall \alpha \in I: W_\alpha \leq W$

$\Rightarrow$ Existuje maximální prvek (V, f)

Definice: Seminorma

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$), $p: V \to [0,+\infty)$

Řekneme, že p je seminorma (pseudonorma), jestliže platí:

① $\forall x,y \in V: p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

② $\forall x \in V: \forall \lambda \in T: p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

Věta: Hahn-Banachova v $\mathbb{C}$

Nechť V je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, $V_0 \subset\subset V$, p seminorma na V, f_0 lineární funkcionál na V_0, takový, že platí:

$\forall x \in V_0: |f_0(x)| \leq p(x)$.

Potom existuje lineární funkcionál f na V tak, že:

① $\forall x \in V_0: f(x) = f_0(x)$

② $\forall x \in V: |f(x)| \leq p(x)$

Důkaz:

Převedeme na reálný případ:

$\mathbb{C}$ zúžíme na $\mathbb{R}$: $V_{\mathbb{R}} = V$, $V_{0\mathbb{R}} = V_0$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$

seminorma p bude konvexní funkcionál

Položme $f_{0\mathbb{R}} := Re(f_0)$, $f_{0\mathbb{R}}$ reálný lineární funkcionál na $V_{0\mathbb{R}}$

Pak $\forall x \in V_{0\mathbb{R}}: f_{0\mathbb{R}}(x) \leq p(x)$

Hahn-Banach
$\rightarrow$ $\exists f_{\mathbb{R}}$ lineární funkcionál na $V_{\mathbb{R}}$ (nad $\mathbb{R}$): ① $\forall x \in V_{0\mathbb{R}}: f_{\mathbb{R}}(x) = f_{0\mathbb{R}}(x)$ $(= Re(f_0(x)))$

② $\forall x \in V_{\mathbb{R}}: f_{\mathbb{R}}(x) \leq p(x)$

Položme nyní: $f(x) := f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix)$, $\forall x \in V$

· f je aditivní, neboť $f_{\mathbb{R}}$ je aditivní

· f je homogenní vzhledem k násobení $\alpha \in \mathbb{C}$:

stačí ověřit pro i: $f(ix) = f_{\mathbb{R}}(ix) - i f_{\mathbb{R}}(-x) = i(-i f_{\mathbb{R}}(ix) + f_{\mathbb{R}}(x)) = i f(x)$

• $\forall x \in V_0 : f'(x) = f_0'(x)$:

Buď $x \in V_0$ libovolné!:

$Re(f'(x)) = f_{\mathbb{R}}'(x) = f_{0\mathbb{R}}'(x) = Re(f_0'(x))$

$Im(f'(x)) = -f_{\mathbb{R}}'(ix) = -f_{0\mathbb{R}}'(ix) = -Re(f_0'(ix)) = -Re(if_0'(x)) = -Im(f_0'(x))$

• $\forall x \in V : |f'(x)| \leq p(x)$

Buď $x \in V$ libovolné!:

zvolme $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1 : \alpha f'(x) \geq 0$:

$|f'(x)| = |\alpha f'(x)| = \alpha f'(x) = f'(\alpha x) = Re(f'(\alpha x)) = f_{\mathbb{R}}'(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x)$

$\rightarrow |f'(x)| \leq p(x)$

Metrické vektorové prostory

Definice: Invariantní metrika
Nechť V je vektorový prostor nad T, ρ metrika na V.
Řekneme, že ρ je invariantní, jestliže platí:
$\forall x,y,z \in V: \rho(x,y) = \rho(x+z, y+z)$

Definice: Metrický vektorový prostor
Nechť V je vektorový prostor nad T, ρ invariantní metrika na V.
Řekneme, že (V,ρ) je metrický vektorový prostor, jestliže
V s topologií určenou metrikou ρ je topologický vektorový prostor

Poznámka:
Vektorové prostory se spočetným systémem seminorem:
Mějme vektorový prostor nad $\mathbb{C}(\mathbb{R})$:

$\forall p \in \mathbb{N}: \|\cdot\|_p$ jsou seminormy na V a nechť platí:

$\forall x \in V: (\forall p \in \mathbb{N}: \|x\|_p = 0 \Rightarrow x = 0)$, rozlišuje mezi body

Potom $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ určuje topologii $\mathcal{T}$ na V

Pro $n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ klademe $U(n,\varepsilon) := \{x \in V \mid \|x\|_p < \varepsilon, p \in \hat{n}\}$

Pak $\mathcal{B} := \{x + U(n,\varepsilon) \mid x \in V, n \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ je báze $\mathcal{T}$

Navíc platí:

$$\rho: V \times V \to \mathbb{R}^+ : (x,y) \mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \frac{\|x-y\|_p}{1+\|x-y\|_p}$$

je metrika na V a platí: $\mathcal{T}_\rho = \mathcal{T}$

Definice: Frechetův prostor

Nechť V je vektorový prostor nad T se spočetným systémem seminorem $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathbb{N}}$, který rozlišuje mezi body, ρ metrika ($\tau_\rho = \tau$). Řekneme, že (V,ρ) je Frechetův prostor, jestliže (V,ρ) je úplný.

Příklad: Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$

$$\|f\|_p := \max_{1\le k\le p} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^p \left|\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|, \quad \forall p\in\mathbb{N}_0, \forall f\in C^\infty(\mathbb{R})$$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) :\Longleftrightarrow \forall p\in\mathbb{N}_0 : \|f\|_p < \infty$

ekvivalentně: $k,\ell\in\mathbb{N}_0$; $\|f\|_{\ell,k} := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\ell \frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|$

Normované vektorové prostory

Definice: Norma

Nechť V je vektorový prostor nad T ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$), $\|\cdot\|: V \to [0, +\infty)$
Řekneme, že zobrazení $\|\cdot\|$ je norma na V jestliže platí:

1. $\forall x, y, z \in V: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\forall x \in V\ \forall \lambda \in T: \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\forall x \in V: \|x\| = 0 \iff x = 0$

Definice: Normovaný vektorový prostor

Nechť V je vektorový prostor nad T, $\|\cdot\|$ norma na V.
Pak uspořádanou dvojici $(V, \|\cdot\|)$ nazýváme ~~vektorový~~ normovaným vektorovým prostorem.

Poznámka:

Značení:
Nechť X, Y jsou vektorové prostory nad T ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$)
Pak množinu všech lineárních zobrazení X do Y značíme $\mathcal{L}(X, Y)$

- $\mathcal{L}(X, Y)$ je vektorový prostor nad T

Definice: Norma zobrazení, omezené zobrazení

Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované vektorové prostory nad T.
Řekneme, že $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ je omezené, jestliže existuje $M \geq 0$, tak, že $\forall x \in X: \|Ax\| \leq M\|x\|$.

Normou zobrazení $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ rozumíme číslo $\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\|$

Tvrzení:
Nechť X, Y jsou normované prostory, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ omezené, $X \neq \{0\}$
Pak platí: ① $\|A\| = \min\{M \geq 0 \mid \forall x \in X, \|Ax\| \leq M\|x\|\}$

② $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

③ $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Důkaz:
$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \|Ax\| \frac{1}{\|x\|} =$

$= \sup_{x \neq 0} \|A \frac{x}{\|x\|}\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

Tj: ② $\Leftrightarrow$ ③

① $\forall x \in X, x \neq 0$: $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$, přitom $\|A\|$ je optimální takové

$\rightarrow M \geq 0 : \forall x \in X \; \|Ax\| \leq M\|x\| \Rightarrow \|A\| \leq M$

Definice: Množina omezených zobrazení
Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory nad T,
Pak množinu všech omezených lineárních zobrazení značíme $\mathcal{B}(X,Y)$.

Věta: $\mathcal{B}(X,Y)$ je normovaný vektorový prostor

Důkaz:
Buďte $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$, $\lambda \in T$ libovolné:

$\forall x \in X$: $\|(A+\lambda B)x\| \leq \|Ax\| + \lambda\|Bx\| \leq \|A\|\|x\| + \lambda\|B\|\|x\| =$
$= (\|A\| + \lambda\|B\|)\|x\|$

Věta:

Nechť X, Y, Z jsou normované vektorové prostory, $A \in \mathcal{B}(X,Y), B \in \mathcal{B}(Y,Z)$.
Pak $BA \in \mathcal{B}(X,Z)$ a platí: $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$

Důkaz:

$\forall x \in X: \|BAx\| \leq \|B\| \|Ax\| \leq \|B\| \|A\| \|x\|$

Poznámka:

$\mathcal{B}(X)$ je normovaná algebra

Věta:

Nechť X, Y jsou normované prostory, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.
Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

① A je omezené

② A je spojité

③ A je spojité v nějakém bodě $x_0 \in X$.

Důkaz:

① => ②

Buď $(x_n) \subset X, x_n \to x$ libovolná:

$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq \|A\| \|x_n - x\| \to 0$

②=>③ jasné

③ => ①

Nechť BÚNO $x_0 = 0$:

tj. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X, \|x\| < \delta : \|Ax\| < \varepsilon$

Buď $x \in X$ libovolné:

$\|Ax\| = \|A \frac{x}{\|x\|}\| \|x\| = \|A \frac{x}{\|x\|} \delta\| \frac{\|x\|}{\delta} < \frac{\varepsilon}{\delta} \|x\|$

Definice: Ekvivalence norem

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou normy na X.
Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, jestliže existují $m, M > 0 : \forall x \in X : m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$

Věta:

Každé dvě normy na konečně rozměrném vektorovém prostoru jsou ekvivalentní.

Důkaz:

Nechť X je vektorový prostor, $\dim X = n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow$ existuje $\mathcal{X}$ báze X, $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$

pro každé $x \in X$ položme $\|x\|_0 := |\xi_1| + \dots + |\xi_n|$,
kde $x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$ je rozklad x v bázi $\mathcal{X}$

$\cdot \|\cdot\|_0$ je norma na X

Ukážeme, že všechny normy na X jsou s $\|\cdot\|_0$ ekvivalentní:
Buď $\|\cdot\|$ libovolná norma na X:

I) Nechť $x \in X$ libovolné:

$$\cdot \|x\| = \|\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n\| \leq |\xi_1|\|x_1\| + \dots + |\xi_n|\|x_n\| \leq \|x\|_0 \max\{\|x_i\| \mid i \in \hat{n}\}$$

II) Definujme $f : T^n \to [0, +\infty) : (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \|\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n\|$

$\cdot f$ spojitá:
Buďte $\xi, \eta \in T^n$ libovolná:

$$|f(\xi) - f(\eta)| = \left| \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k\right\| - \left\|\sum_{k=1}^{n} \eta_k x_k\right\| \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k| \|x_k\| \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k| \|x_k\| \leq M \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|$$

Označme $K := \{\xi \in T^n \,/\, |\xi_1| + \dots + |\xi_n| = 1\} \subset T^n$, kompaktní

$\to \forall \xi \in K : f(\xi) > 0 \to \exists m > 0 : m = \min_{\xi \in K} f(\xi) > 0$

Buď $\xi \in T^n$ libovolné, $\xi \neq 0$:
Označme $c := |\xi_1| + \dots + |\xi_n| \to \frac{1}{c}\xi \in K$

$\to m \leq f(\frac{1}{c}\xi) = \| \frac{1}{c}(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)\|$

$\to mc = m\|x\|_0 \leq \|x\|$

$\to m\|x\|_0 \leq \|x\| \leq M\|x\|_0$

Důsledek:
Každý konečně rozměrný normovaný vektorový prostor je úplný.

Důkaz:
$\mathbb{R}^n$ s eukleidovskou normou je úplný, $\forall n \in \mathbb{N}$

Důsledek:
Nechť X je normovaný vektorový prostor, $V \subset\subset X$.
Pak $\dim V < \infty \Rightarrow V = \overline{V}$

Definice: Rozšíření, zúžení operátoru
Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, $V \subset\subset X$,
$A \in \mathcal{B}(V, Y), B \in \mathcal{B}(X, Y)$ takové, že: $Ax = Bx, \forall x \in V$.
Potom řekneme, že A je zúžení B, resp. B je rozšíření A.

Pozn**á**mka:
Zřejmě platí $\|A\| \leq \|B\|$

Poznámka:

Značení:

Nechť X je normovaný vektorový prostor nad T ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).
Pak zavedeme označení $X^* := \mathcal{B}(X,T)$

Věta: Hahn-Banach pro normované prostory

Nechť X je normovaný vektorový prostor nad T ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $X_0 \subset\subset X$, $f_0 \in X_0^*$.

Pak existuje $f \in X^*$ tak, že: ① $f|_{X_0} = f_0$

② $\|f\| = \|f_0\|$

Důkaz:

Položme $p(x) := \|f_0\| \, \|x\|$, $\forall x \in X$

→ p je konvexní funkcionál pro $T = \mathbb{R}$

p je seminorma pro $T = \mathbb{C}$

→ $\forall x \in X_0$: $|f_0(x)| \leq \|f_0\| \, \|x\| = p(x)$ ✓

Obecná H.B.

→ $\exists f$, lineární funkcionál: ① $f|_{X_0} = f_0$

② $\forall x \in X: |f(x)| \leq p(x)$ ($\mathbb{C}$)

$\forall x \in X: f(x) \leq p(x)$ ($\mathbb{R}$)

→ V obou případech $\|f\| \leq \|f_0\| \to \|f\| = \|f_0\|$

Důsledek:

Nechť X je normovaný vektorový prostor, $x, y \in X$, $x \neq y$.

Potom: ① $\exists f \in X^*: f(x) \neq f(y)$

② $\forall z \in X \setminus \{0\}: \exists g \in X^*: \|g\| = 1 \wedge g(z) = \|z\|$

Důkaz:

② $z = 0$: g libovolný funkcionál; $\|g\| = 1$:

· Nechť $z \neq 0$:

Definujme $X_0 := Tz = [z]_\lambda \subset\subset X$

položme $g_0(\lambda z) := \lambda \|z\|, \forall \lambda \in T \to g_0 \in X_0^*$

$$\|g_0\| = \sup_{\lambda \in T \setminus \{0\}} \frac{g_0(\lambda z)}{\|\lambda z\|} = \sup_{\lambda \in T \setminus \{0\}} \frac{\lambda}{|\lambda|} = 1$$

Hahn-Banach $\to \exists g \in X^*: \; g(z) = \|z\| \wedge \|g\| = 1$

① Nechť $x, y \in X$, $x \neq y$ jsou libovolné:

$x \neq y \to z := x - y$

$\overset{②}{\to} \exists f \in X^*: \; f(x) - f(y) = f(x-y) = f(z) = \|z\| \neq 0$

Banachovy prostory

Definice: Banachův prostor

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný vektorový prostor nad T.
Řekneme, že $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, jestliže $(X, \|\cdot\|)$ je úplný.

Věta:

Nechť $\mathcal{X}$ je Banachův prostor, $(x_n) \subset \mathcal{X}$.
Jestliže $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ konverguje v $\mathcal{X}$.

Důkaz:

Označme $S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$

$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ konverguje v $\mathcal{X}$ právě tehdy když (S_n) je Cauchyovská

Řešení (úplné)

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon$$

Definice: Lipschitzovské zobrazení

Nechť $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ jsou metrické prostory, $f: X \to Y$.
Řekneme, že f je lipschitzovské zobrazení, jestliže
$\exists L \geq 0 : \forall x_1, x_2 \in X : \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L \rho_X(x_1, x_2)$.

f nazýváme L-lipschitzovské

Poznámka:

- L-lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité
- Lipschitzovské zobrazení zobrazuje Cauchyovské posloupnosti na Cauchyovské posloupnosti

Věta A:

Nechť X je normovaný vektorový prostor nad T, Y Banachův prostor, $A \in \mathcal{B}(V,Y)$, $V \subset\subset X$.

Jestliže $\overline{V} = X$, pak existuje právě jedno $B \in \mathcal{B}(X,Y)$, tak, že platí: ① $B|_V = A$

② $\|B\| = \|A\|$

Věta B:

Nechť (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) jsou metrické prostory, $V \subset X$, $f: V \to Y$ a nechť Y je úplný, f L-lipschitzovské.

Jestliže $\overline{V} = X$, potom existuje právě jedno spojité zobrazení $g: X \to Y$ tak, že: ① $g|_V = f$

② g je L-lipschitzovské

Důkaz:

I) Jednoznačnost

Buďte $g_1, g_2 : X \to Y$ dvě různá rozšíření:

$$g_1|_V = g_2|_V \wedge \overline{V} = X \Rightarrow g_1 = g_2$$

II) Konstrukce g:

Buď $x \in X$ libovolný:

$\Rightarrow \overline{V} = X \Rightarrow \exists (x_n) \subset V : x_n \to x \Rightarrow (x_n)$ je Cauchyovská

f je L-lipschitzovské

$\Rightarrow (f(x_n))$ je Cauchyovská v úplném prostoru Y

$\Rightarrow \exists y \in Y : (f(x_n))$ má za limitu y, $f(x_n) \to y$

definujme $g(x) := \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$

• g dobře definované:
Buď $(\tilde{x}_n) \subset V$, $\tilde{x}_n \to x$ jiná Cauchyovská posloupnost:

Označme $\tilde{y} := \lim_{n\to+\infty} f(\tilde{x}_n)$

$\rho_Y(y,\tilde{y}) = \lim_{n\to+\infty} \rho_Y(f(x_n), f(\tilde{x}_n)) \leq \lim_{n\to+\infty} L\rho_X(x_n,\tilde{x}_n) \to 0 \Rightarrow y = \tilde{y}$.

• $g|_V = f$:
Buď $x \in V$ libovolné
zvolím $(x_n) \subset V$: $x_n =: x$, $\forall n \in \mathbb{N}$

• g L-lipschitzovské:
Buďte $x, \tilde{x} \in X$ libovolné:

$\rho_Y(g(x), g(\tilde{x})) = \lim_{n\to+\infty} \rho_Y(f(x_n), f(\tilde{x}_n)) \leq L \cdot \lim_{n\to+\infty} \rho(x_n, \tilde{x}_n) = L\rho(x,\tilde{x})$

Důkaz věty A:

$\forall x_1, x_2 \in V$: $\|Ax_1 - Ax_2\| \leq \|A\| \|x_1 - x_2\| \to A$ je $\|A\|$-lipschitzovské

Věta B $\Rightarrow$ $\exists! B\ X \to Y$: $B|_V = A \wedge B$ je $\|A\|$-lipschitzovské

• B je omezené:
Buď $x \in X$ libovolné:

$\|Bx\| \leq \|A\| \|x\| \leftarrow B$ je $\|A\|$-lipschitzovské

• B je lineární:
Buďte $x, y \in X$, $\lambda \in T$ libovolné:

$B(x+\lambda y) = B \lim_{n\to+\infty}(x_n + \lambda y_n) = \lim_{n\to+\infty} B(x_n + \lambda y_n) = $

$= \lim_{n\to+\infty} (Ax_n + \lambda Ay_n) = Bx + \lambda By$

L^p prostory

Definice: σ - algebra
Nechť X je libovolná množina, $\mathcal{M} \subset P(X)$.
Uspořádanou dvojici $(X, \mathcal{M})$ nazveme σ-algebrou, jestliže platí:
① $\emptyset \in \mathcal{M}$
② $\forall (A_n) \subset \mathcal{M}: \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$
③ $\forall A \in \mathcal{M}: \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$

Definice: Míra
Nechť $(X, \mathcal{M})$ je σ-algebra, $\mu: \mathcal{M} \to [0, +\infty)$.
Řekneme, že μ je míra na X, jestliže platí:
① $\mu(\emptyset) = 0$
② $\forall (A_n) \subset \mathcal{M}, A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m: \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$

Definice: L^p-norma
Nechť X je prostor s mírou μ.
Pro $p \in [1, +\infty)$, f měřitelnou funkci na X definujeme
L^p-normu $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty]$

Pro $p = +\infty$ klademe:
$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf \{\sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| \mid N \subset X, \mu(N) = 0\}$

Jestliže $\|f\|_p$ říkáme (nepřesně), že $f \in L^p(X, d\mu)$.
Pro $p < \infty$ říkáme, že f je L^p-integrabilní

Poznámka:
Míru $\mu: \mathcal{M} \to \mathbb{N}: \mu(M) := |M|$ nazýváme aritmetickou mírou
Integrál $\to$ řada, z
Značíme $\ell^p(X, d\mu)$

Věta: Hölderova a Minkowského nerovnost

Nechť X je prostor s mírou μ, $f,g: X \to [0,+\infty)$ měřitelné, $p,q \in (1,\infty)$: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Potom platí:

① $\int_X f\cdot g \, d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ Hölderova nerovnost

② $\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ Minkowského nerovnost

Lemma:

Nechť $p,q \in (1,+\infty)$ jsou reálná čísla: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Potom $\forall a,b \geq 0$: $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

Důkaz:

· $a=0 \vee b=0 \to$ triviální

· $a,b>0$:

Označme $c := a^p$, $d := b^q$

Chceme: $c^{\frac{1}{p}} \cdot d^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}c + \frac{1}{q}d$

$\to \ln\left(c^{\frac{1}{p}} \cdot d^{\frac{1}{q}}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{p}c + \frac{1}{q}d\right)$

$\to \frac{1}{p}\ln(c) + \frac{1}{q}\ln(d) \leq \ln\left(\frac{1}{p}c + \frac{1}{q}d\right)$

$\to -\ln\left(\frac{1}{p}c + \frac{1}{q}d\right) \leq \frac{1}{p}(-\ln(c)) + \frac{1}{q}(-\ln(d))$

$h(x) := -\ln(x) \to h''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ pro $x>0 \to h$ je konvexní

$\to \forall x,y>0;\ \forall \alpha,\beta>0, \alpha+\beta=1: h(\alpha x+\beta y) \leq \alpha h(x) + \beta h(y)$ ✓

Důkaz věty:

- klademe $0 \cdot \infty := 0$

① Hölderova nerovnost

- $\int_X f^p d\mu = 0 \vee \int_X g^q d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ s.v. $\vee g = 0$ s.v. $\Rightarrow fg = 0$ s.v.
- $\int_X f^p d\mu = \infty \vee \int_X g^q d\mu = \infty \Rightarrow \int_X fg d\mu = \infty$
- $\int_X f^p d\mu, \int_X g^q d\mu \in \mathbb{R}^+$:

Označíme $A := \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, B := \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \wedge F := \frac{f}{A}, G := \frac{g}{B}$

Pak platí $\int_X F^p d\mu = 1 \wedge \int_X G^q d\mu = 1$

$\xrightarrow{\text{Lemma}} FG \leq \frac{1}{p}F^p + \frac{1}{q}G^q$

$\Rightarrow \int_X FG d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X F^p d\mu + \frac{1}{q}\int_X G^q d\mu = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{AB}\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X \left(\frac{f}{A}\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X \left(\frac{g}{B}\right)^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$

$\Rightarrow \int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$

② Minkowského nerovnost

- $\int_X f^p d\mu = 0 \vee \int_X g^p d\mu = 0 \rightarrow f = 0$ s.v. $\vee g = 0$ s.v. $\rightarrow f+g = f \vee f+g = g$ (s.v.

- $\int_X f^p d\mu = \infty \vee \int_X g^p d\mu = \infty \rightarrow \int_X (f+g)^p d\mu = \infty$

- $\int_X f^p d\mu, \int_X g^p d\mu \in \mathbb{R}^+$:

Označme $A := \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, $B := \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, $F := \frac{f}{A}$, $G := \frac{g}{B}$

$\rightarrow \int_X F^p d\mu = 1, \int_X G^p d\mu = 1$

Položme $h(x) := x^p$, $p > 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$
$h''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$

$\rightarrow \left(\frac{A}{A+B} F + \frac{B}{A+B} G\right)^p \leq \frac{A}{A+B} F^p + \frac{B}{A+B} G^p$

$\rightarrow \int_X \left(\frac{A}{A+B} F + \frac{B}{A+B} G\right)^p d\mu \leq \int_X \frac{A}{A+B} F^p d\mu + \int_X \frac{B}{A+B} G^p d\mu = 1$

$\rightarrow \left(\int_X \left(\frac{A}{A+B} F + \frac{B}{A+B} G\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$

$\rightarrow \frac{1}{A+B} \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 = \frac{1}{A+B}(A+B) = \cancel{\frac{A+B}{A+B}}$

$= \frac{1}{A+B} \left[\left(\int_X (AF)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X (BG)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right] =$

$= \frac{1}{A+B} \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]$

$\rightarrow \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

Poznámka:

Připomenutí: Fatouovo lemma

Buď X prostor s mírou μ, (f_n) posloupnost měřitelných funkcí $f_n : X \to [0, +\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Potom platí: $\int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu$

Věta:

Buďte X prostor s mírou μ, $p \in \mathbb{N}$.

Potom $L^p(X, d\mu)$ je Banachův prostor.

Důkaz:

pro $p \in \mathbb{N}$:

Buď $(f_n) \subset L^p(X, d\mu)$ libovolná Cauchyovská:

Hledáme kandidáta na limitu:

Zvolme: $n_1 \in \mathbb{N} : \forall m, n > n_1 \ \|f_m - f_n\| < \frac{1}{2}$

$n_2 \in \mathbb{N} : \forall m, n > n_2 : \|f_m - f_n\| < \frac{1}{2^2}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$n_k \in \mathbb{N} : \forall m, n > n_k : \|f_m - f_n\| < \frac{1}{2^k}$

Položme $g_k = \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$

$$g = \sum_{j=1}^{+\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| = \lim_{k \to +\infty} g_k$$

→ pro každé $k \in \mathbb{N}$: $\|g_k\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} < 1$

→ $(\|g\|_p)^p = \int_X |g|^p \, d\mu = \int_X \lim_{k \to +\infty} |g_k|^p \, d\mu \leq \liminf_{k \to +\infty} \int_X |g_k|^p \, d\mu = \liminf_{k \to +\infty} \|g_k\|^p < 1$

→ $g \in L^p(X, d\mu)$

Definujme $f(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) =$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))\right) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x)$$

- $\| f_{n_k} \|_p = \| f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) \| \leq \| f_{n_1} \|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \| < \| f_{n_1} \| + 1$

- $(\| f \|_p)^p = \int_X |f|^p d\mu = \int_X \lim_{k\to+\infty} |f_{n_k}|^p d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X |f_{n_k}|^p d\mu = \liminf_{k\to+\infty} \| f_{n_k} \| < \| f_{n_1} \| < 1$

$\Rightarrow f \in L^p(X, d\mu)$

- $f_n \to f$:

(f_n) Cauchyovská:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall m, n > n_0 : \| f_m - f_n \| < \varepsilon \Rightarrow \int_X |f_m - f_n|^p d\mu < \varepsilon^p$

$\forall n > n_0 : \int_X |f - f_n|^p d\mu = \int_X \lim_{k\to+\infty} |f_{n_k} - f_n|^p d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X |f_{n_k} - f_n|^p d\mu < \varepsilon^p$

$\Rightarrow f_n \to f$ v $L^p(X, d\mu)$

Poznámka:
Věta platí i pro $p = \infty$

Hilbertovy prostory

Definice: Hilbertův prostor
Úplný vektorový prostor se skalárním součinem se nazývá Hilbertův prostor. (nad $\mathbb{C}$)

Poznámka:
Pythagorova věta: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x|y\rangle$

Rovnoběžníková rovnost: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Věta:
Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor, $M \subset \mathcal{H}$ konvexní uzavřená, $M \neq \emptyset$.
Potom v M existuje právě jeden vektor s nejmenší normou.

Důkaz.
Označme $t := \operatorname{dist}(0,M) = \inf(\|x\| \mid x \in M)$

$\to \exists (x_n) \subset M$ ~~...~~ $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = t$

Pro $m,n \in \mathbb{N}$ platí: $\frac{1}{4}\|x_n - x_m\|^2 = \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m\|^2 - \|\frac{1}{2}(x_n+x_m)\|^2 \leq$

$$\leq \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m\|^2 - t^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

$\to (x_n)$ je Cauchyovská

$\to \exists \lim x_n = x \in M$

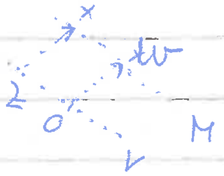
Jednoznačnost:
Nechť $x, \tilde{x} \in M$: $\|x\| = \|\tilde{x}\| = t$

$\frac{1}{4}\|x-\tilde{x}\| = \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|\tilde{x}\| - \|\frac{1}{2}(x+\tilde{x})\|^2 \leq 0 \to x = \tilde{x}$

Věta: o OG projekci

Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor, $V = \overline{V} \subset\subset \mathcal{H}$.
Potom $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$

Důkaz:



Buď $x \in \mathcal{H}$ libovolné:

- $\exists! w \in x+V : \|w\| = \mathrm{dist}(0, x+V)$

Označme $z := x-w$: $\|x-z\| = \mathrm{dist}(0, x+V)$

$\|x-z\| = \mathrm{dist}(-x, V) = \mathrm{dist}(x, -V) = \mathrm{dist}(x, V)$

$\rightarrow \exists! z \in V \; \|x-z\| = \mathrm{dist}(x,V)$

Platí: $w = x-z \in V^\perp : \Leftrightarrow \forall u \in V, \forall t>0 : \|x-z\|^2 \leq \|x-z-tu\|^2$

$\|x-z\|$ je minimální vzdálenost x a V.

$\|x-z\|^2 \leq \|x-z\|^2 + t^2\|u\|^2 + 2t \, \mathrm{Re} \langle x-z | u \rangle$

$\rightarrow \forall t>0 \; \mathrm{Re}\langle x-z|u\rangle \leq \frac{t}{2}\|u\|^2$

$t \to 0_+ \Rightarrow \mathrm{Re}\langle x-z|u\rangle \leq 0$ $\quad \rightarrow \quad \mathrm{Re}\langle x-z|u\rangle = 0$

$u \mapsto -u \Rightarrow -\mathrm{Re}\langle x-z|u\rangle \geq 0$

$u \mapsto iu \Rightarrow \mathrm{Im}\langle x-z|u\rangle = 0 \rightarrow \mathrm{Im}\langle x-z|u\rangle = 0$

$\rightarrow \forall u \in V : \langle x-z|u\rangle = 0 \rightarrow x-z \in V^\perp$

$\rightarrow \forall x \in \mathcal{H} : x = z + (x-z) \in V \oplus V^\perp = \mathcal{H}$ $\quad \boxed{Px = z}$

Důsledek:

Označme P projekci $\mathcal{H}$ na V podle $V^\perp$.

Potom: ① Px je jediný vektor ve V : $(x-Px) \perp V$

② Px je jediný vektor ve V : $\|x-Px\| = \mathrm{dist}(x,V)$

Důsledek:

$V^{\perp\perp} := (V^{\perp})^{\perp} = V$

Důkaz:

- $V \perp V^{\perp} \Rightarrow V \subset V^{\perp\perp}$

- $V^{\perp\perp} \subset V$:

Buď $x \in V^{\perp\perp}$ libovolné:

$x = z + w \in V + V^{\perp}$

- $z \in V \subset V^{\perp\perp}$
- $w \in (V^{\perp})^{\perp} \cap V^{\perp} \Rightarrow w = 0$

Důsledek: (Obecnější)

Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor, $V \subset\subset \mathcal{H}$.

Potom $V^{\perp\perp} = \overline{V}$

Důkaz. $V^{\perp\perp} = (V^{\perp})^{\perp} = (\overline{V})^{\perp\perp} = \overline{V}$

Důsledek:

$\overline{V} = \mathcal{H} \Leftrightarrow V^{\perp} = \{0\}$

Důsledek:

Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor, $V \subset\subset \mathcal{H}$, $\dim V = n \in \mathbb{N}$.

Buď $\mathcal{X}$ ON báze na V, $\mathcal{X} = \{u_k \mid k \in \hat{n}\}$

Potom $\forall x \in \mathcal{H}$: $Px = \sum_{k=1}^{n} \langle x | u_k \rangle u_k$

Poznámka:

$f: A \to [0, +\infty)$: $\sum_{x \in A} f(x) := \sup_{\substack{B \subset A \\ |B| < \infty}} \sum_{x \in B} f(x)$

Věta: Besselova nerovnost

Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor, $A \subset \mathcal{H}$ ON podmnožina.
Potom $\forall x \in \mathcal{H}: \sum_{u \in A} |\langle u | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Důkaz:
Buď $B \subset A$, $|B| = n \in \mathbb{N}$ libovolná.
$B = \{u_k \mid k \in \hat{n}\}$

$\rightarrow \|x\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2 \geq \|\sum_{k=1}^{n} \langle u_k | x \rangle u_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |\langle u_k | x \rangle|^2$

$\rightarrow \sum_{u \in A} |\langle u_k | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Definice: ON báze

Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor, $A \subset \mathcal{H}$.
Řekneme, že A je ON báze $\mathcal{H}$, jestliže: ① A je ON
② $\overline{\operatorname{span} A} = \mathcal{H}$

Věta:

V každém hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ existuje ON báze a všechny ON báze mají stejnou mohutnost

Věta:

V Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ existuje ON spočetná báze, právě tehdy když $\mathcal{H}$ je separabilní

Důkaz:
$\Leftarrow$ Nechť $\mathcal{H}$ je separabilní: $\overline{S} = \mathcal{H}$
Gramm-Schmidt

$\Rightarrow$ U spočetná ON báze: $\overline{\operatorname{span} U} = \mathcal{H}$
$S = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} U$ spočetná $\rightarrow \overline{S} = \mathcal{H}$

Věta: Parsevalova rovnost

Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor, $U \subset \mathcal{H}$ ON podmnožina.
Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

1. U je báze ($\Leftrightarrow U^{\perp} = \{0\}$)
2. $\overline{\operatorname{span} U} = \mathcal{H}$ (U je totální)
3. $\forall x \in \mathcal{H}, \|x\|^2 = \sum_{u \in U} |\langle x | u \rangle|^2$ (Parsevalova rovnost)

Důkaz

① $\Leftrightarrow$ ②

② $\Rightarrow$ ③:

Platí Besselova nerovnost: $\|x\|^2 \geq \sum_{u \in U} |\langle x | u \rangle|^2$

$\overline{\operatorname{span} U} = \mathcal{H} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \{u_k | k \in \hat{n}\} \subset U ; \exists (\lambda_k)_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C} : \|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\| < \varepsilon$

Optimální aproximace:

$\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x | u_k \rangle u_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\| < \varepsilon$

Pythagorova věta:

$$\|x\|^2 = \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x | u_k \rangle u_k\|^2 + \|\sum_{k=1}^{n} \langle x | u_k \rangle u_k\|^2 <$$

$$< \varepsilon^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x | u_k \rangle|^2 \leq \varepsilon^2 + \sum_{u \in U} |\langle x | u \rangle|^2$$

$\varepsilon \to 0_+ : \|x\|^2 \leq \sum_{u \in U} |\langle x | u \rangle|^2$

$\Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{u \in U} |\langle x | u \rangle|^2$

③ $\Rightarrow$ ①

Chceme ukázat, že $U^{\perp} = \{0\}$:

Buď $x \in U^{\perp}$ libovolné.

$\|x\|^2 = \sum_{u \in U} |\langle x | u \rangle|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ✓

Separabilní Hilbertovy prostory

Věta: Fourierova řada
Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor, $(u_n)_{n=1}$ ON báze $\mathcal{H}$.
Potom $\forall x \in \mathcal{H}: x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u_n | x \rangle u_n$

Důkaz:
~~konvergence~~:

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle u_k | x \rangle u_k\|^2 = \|x\|^2 - \|\sum_{k=1}^{n} \langle u_k | x \rangle u_k\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle u_k | x \rangle|^2 \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Věta:
Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor, $(u_n)_{n=1}$ ON soubor v $\mathcal{H}$, $(\lambda_n)_{n=1} \subset \mathbb{C}$.
Potom $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$

Důkaz:
$\Leftarrow$: Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$
Označme $s_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_n u_n$: (s_n) konverguje $\Leftrightarrow (s_n)$ je Cauchyovská:

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_n u_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_n|^2 < \varepsilon \ \checkmark$$

$\Rightarrow$ Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$ konverguje v $\mathcal{H}$.
Označme $y := \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$

$\rightarrow y \in \overline{\text{span}}\, U$, $U := \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$
U je ON bází svého lineárního obalu.

Parsevalova rovnost:
$\rightarrow \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle y | u_n \rangle|^2 = \|\sum_{n=1} \lambda_n u_n\|^2$

lineární kombinace je jednoznačná $\rightarrow \lambda_n = \langle y | u_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N}$

Věta:
Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor, $U = \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ON soubor v $\mathcal{H}$, $(\lambda_n)_{n=1} \subset \mathbb{C}$.
Nechť řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$ konverguje k $x \in \mathcal{H}$.
Potom: ① $\forall k \in \mathbb{N}: \langle u_k | x \rangle = \lambda_k$
② Součet řady nezávisí na pořadí sčítanců

Důkaz:
① $\langle u_k | x \rangle = \langle u_k | \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n \rangle = \langle u_k | \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n u_n \rangle =$

$= \lim_{m \to +\infty} \langle u_k | \sum_{n=1}^{m} \lambda_n u_n \rangle = \lambda_k$

②) Buď $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce:

$(u_n)_{n=1}$ ON báze span U $\Rightarrow$ $(u_{\sigma(n)})_{n=1}$ ON báze span U

Fourierův rozklad:

$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u_n | x \rangle u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u_{\sigma(n)} | x \rangle u_{\sigma(n)}$

Věta: Rieszova věta o reprezentaci funkcionálu

Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor, $x \in \mathcal{H}$.

Pro dané $x \in \mathcal{H}$ definujeme lineární funkcionál

$\varphi_x : \mathcal{H} \to T : y \mapsto \langle x|y \rangle$.

Potom ① $\varphi_x \in \mathcal{H}^*$

② $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^* : x \mapsto \varphi_x$ je antilineární izometrický izomorfismus.

Důkaz:

Chceme ukázat, že:

$\forall \psi \in \mathcal{H}^* : \exists! x \in \mathcal{H} : \psi = \varphi_x \wedge \|\psi\| = \|x\|$

• Izometrie:

$$\|\varphi_x\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\varphi_x(y)}{\|y\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{|\langle x|y \rangle|}{\|y\|} \leq \frac{\|x\|\|y\|}{\|y\|} = \|x\|$$

$$\to \forall y \in \mathcal{H} : |\varphi_x(y)| \leq \|\varphi_x\| \|y\| \to \forall y \in \mathcal{H} : \|\varphi_x\| \geq \frac{|\langle x|y \rangle|}{\|y\|}$$

$$\to \|\varphi_x\| \geq \|x\| \to \|\varphi_x\| = \|x\| \quad \checkmark$$

• Antilinearita ✓

• φ prosté:

Buďte $\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}$ různé, nechť $\varphi_{x_1} = \varphi_{x_2}$:

$$\langle x_1|y \rangle = \langle x_2|y \rangle \to \langle x_1 - x_2|y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{H} \to x_1 - x_2 = 0$$

• φ surjektivní:

Buď $\psi \in \mathcal{H}^*$ libovolné ; $\psi \neq 0$:

Označme $V := \ker \psi \subset\subset \mathcal{H}$, $V = \psi^{-1}(\{0\})$

$$\mathcal{H} = V \oplus V^{\perp}, \dim V^{\perp} = 1$$