Kapitola 1

Topologický prostor, metrický prostor, úplnost, kompaktnost

1.1 Topologické prostory

Značení 1.1.1. Buď X množina. *Potenční množinu* množiny X označíme

$$\mathcal{P}(X) := \{A;\, A \subset X\}.$$

Poznámka. Potenční množina $\mathcal{P}(X)$ se často ztotožňuje s množinou

$$2^X := \{f;\, f\colon X \to \{0,1\}\}.$$

Každé zobrazení $f \in 2^X$ je totiž charakteristickou funkcí právě jedné podmnožiny $A \subset X$. Toto označení ale v dalším používat nebudeme.

Definice 1.1.2. Buďte X množina. Systém podmnožin množiny X, $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, nazveme *topologií* na X, jestliže jsou splněny axiomy
(1) $\emptyset, X \in \tau$,
(2) pro libovolnou indexovou množiny $\mathscr{A}$ platí implikace

$$(\forall \alpha \in \mathscr{A},\, G_\alpha \in \tau) \implies \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} G_\alpha \in \tau,$$

(3) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí implikace

$$(\forall k \in \{1,2,\dots,n\},\, G_k \in \tau) \implies \bigcap_{k,\, 1 \le k \le n} G_k \in \tau.$$

Prvky topologie τ nazýváme *otevřené podmnožiny* množiny X. O uspořádané dvojici (X,τ) budeme mluvit jako o *topologickém prostoru*.

Poznámka. Můžeme shrnout, že axiomy nám říkají následující. Prázdná množina a celá množina X jsou otevřené, sjednocení libovolného (!) systému otevřených množin je otevřená množina a průnik libovolného konečného systému otevřených množin je otevřená množina.

Abychom ověřili, že systém podmnožin τ splňuje axiom (3), stačí se omezit na $n{=}2$, to jest stačí ukázat, že průnik každých dvou množin z τ patří do τ. Pomocí matematické indukce lze pak snadno rozšířit uzavřenost na průnik pro libovolný konečný počet množin z τ.

Definice 1.1.3. Buďte X množina a τ topologie na X. Systém podmnožin množiny X, který je tvořen doplňky otevřených množin, označíme

$$\mathrm{c}\tau := \{F;\, F = X \setminus G,\, G \in \tau\}.$$

Prvky $\mathrm{c}\tau$ nazveme *uzavřené podmnožiny* množiny X.

Ověření následujícího tvrzení je snadné a je ponecháno na čtenáři.

Tvrzení 1.1.4. *Buďte X množina a τ topologie na X. Potom platí*
(1) $\emptyset, X \in c\tau$,
(2) pro libovolnou indexovou množiny $\mathscr{A}$ platí implikace

$$(\forall \alpha \in \mathscr{A},\, F_\alpha \in c\tau) \implies \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} F_\alpha \in c\tau,$$

(3) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí implikace

$$(\forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\, F_k \in c\tau) \implies \bigcup_{k,\, 1 \le k \le n} F_k \in c\tau.$$

Poznámka. Toto tvrzení nám tedy říká následující. Prázdná množina a celá množina X jsou uzavřené, průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina a sjednocení libovolného konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Poznámka 1.1.5. Buď X množina. Potenční množina $\mathcal{P}(X)$ je uspořádaná inkluzí $\subset$. Mluvíme-li o *nejmenší* nebo *největší* podmnožině X s danou vlastností, potom „nejmenší“ či „největší“ se myslí vzhledem k tomuto uspořádání.

Tvrzení 1.1.6. *Buď (X, τ) topologický prostor. Pro každou podmnožinu $M \subset X$ platí*
(1) existuje největší otevřená podmnožina G v X taková, že $G \subset M$,
(2) existuje nejmenší uzavřená podmnožina F v X taková, že $M \subset F$.

Důkaz. (1) Položme

$$G := \bigcup_{A \in \tau,\, A \subset M} A.$$

Sjednocení napravo je přes neprázdný systém množin, neboť existuje alespoň jedna otevřená množina $A \in \tau$ s vlastností $A \subset M$, a sice $A = \emptyset$. Z druhého axiomu v definici topologie (definice 1.1.2) plyne, že množina G je otevřená, a zřejmě $G \subset M$. Ze zavedení G je také patrné, že kdykoliv nějaká otevřená množina $G' \subset X$ splňuje $G' \subset M$, potom $G' \subset G$.

(2) Ověření je velmi podobné jako v bodě (1). Tentokrát položíme

$$F := \bigcap_{A \in c\tau,\, M \subset F} A.$$

Doplnění dalších podrobností je ponecháno na čtenáři. $\square$

Definice 1.1.7. Buďte (X, τ) topologický prostor, $M \subset X$ podmnožina. Největší otevřenou podmnožinu obsaženou v M nazýváme *vnitřkem* množiny M a značíme ji M^o. Nejmenší uzavřenou množinu obsahující M nazýváme uzávěrem množiny M a značíme ji $\overline{M}$.

Definice 1.1.8. Buďte (X, τ) topologický prostor, $x \in X$, $U \subset X$. Řekneme, že U je okolím bodu x, jestliže $x \in U^o$.

Poznámka. Někteří autoři navíc požadují, aby okolí U bodu x bylo otevřenou množinou. My se přidržíme výše uvedené definice. Budeme-li se chtít omezit v některých úvahách na otevřené okolí, musíme to vyslovit jako další požadavek.

Z definice je zřejmé, že neprázdná otevřená množina je otevřeným okolím každého svého bodu. Také je zřejmé, že je-li U okolím bodu x v nějakém topologickém prostoru, pak U^o je otevřeným okolím bodu x. Proto se kdykoliv podle potřeby můžeme omezit jen na otevřená okolí. Otevřené množiny v topologickém prostoru lze charakterizovat pomocí okolí jejích bodů, jak je vysloveno v následujícím (snadném) cvičení.

Cvičení 1.1.9. Buď (X, τ) topologický prostor.
(1) Buď dále $G \subset X$. Potom množina G je otevřená, právě když splňuje

$$\forall x \in G,\ \exists\, \text{okolí } U_x \ni x,\ U_x \subset G.$$

Vyjádřeno slovně: množina G je otevřená, právě když s každým svým bodem obsahuje i nějaké jeho okolí.
(2) Buďte dále $S \subset X$, $x \in S$. Potom $x \in \overline{S}$, právě když platí

$$\forall \text{okolí } U_x \ni x,\ U_x \cap S \neq \emptyset.$$

Vyjádřeno slovně: bod patří do uzávěru nějaké množiny, právě když každé jeho okolí tuto množinu protíná.

Příklad 1.1.10. Buď X množina.

(1) $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ je *nejslabší* (*nejhrubší*) topologie na X. Topologie τ_1 obsahuje pouze povinné prvky (podle prvního axiomu z definice topologie) $\emptyset$ a X a nic víc.

(2) $\tau_2 = \mathcal{P}(X)$ je *nejsilnější* (*nejjemnější*) topologie na X. Tato topologie se také nazývá *diskrétní topologií*. Každá podmnožina X je v této topologii otevřená.

Tvrzení 1.1.11. *Buďte (X, τ) topologický prostor, $M \subset X$. Potom platí*
(1) $X \setminus M^o = \overline{X \setminus M}$,
(2) $X \setminus \overline{M} = (X \setminus M)^o$.

Důkaz. Důkaz bude proveden na cvičení. □

1.2 Báze topologie

Definice 1.2.1. Buď (X, τ) topologický prostor. Řekneme, že systém otevřených množin $\mathcal{G} \subset \tau$ je *bází topologie* τ, jestliže splňuje

$$\forall U \in \tau,\ \exists \mathcal{G}' \subset \mathcal{G},\ U = \bigcup_{G \in \mathcal{G}'} G.$$

Poznámka 1.2.2. $\mathcal{G} \subset \tau$ je tedy bází topologie τ, jestliže každou otevřenou podmnožinu v X lze vyjádřit jako sjednocení množin z nějakého podsystému $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$. To znamená, že topologii τ lze popsat pomocí její báze $\mathcal{G}$ takto

$$\tau = \Big\{ \bigcup_{G \in \mathcal{G}'} G\,;\ \mathcal{G}' \subset \mathcal{G} \Big\}. \tag{1.1}$$

Speciálně musí platit

$$X = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G. \tag{1.2}$$

Druhým extrémním případem je $\mathcal{G}' = \emptyset$. Sjednocení prázdného systému množin je prázdná množina, a tak

$$\emptyset = \bigcup_{G \in \emptyset} G. \tag{1.3}$$

Podmínku na bázi topologie lze přepsat, jak je rozebráno v následující poznámce.

Poznámka 1.2.3. Buďte (X, τ) topologický prostor, $\mathcal{G} \subset \tau$. Potom $\mathcal{G}$ je bází τ, právě když splňuje

$$\forall U \in \tau, \forall x \in U, \exists G \in \mathcal{G}, x \in G \subset U. \tag{1.4}$$

Skutečně, podmínka (1.4) je nutná, jak je zřejmé přímo z definice báze topologie, to jest z rovnice (1.1). Ukažme, že je také postačující. Předpokládejme tedy, že (1.4) platí. Máme ukázat, že platí rovněž (1.1). Mějme dánu libovolnou otevřenou množinu $U \in \tau$. Pro každé $x \in U$ zvolme $G_x \in \mathcal{G}$ tak, že $x \in G_x \subset U$. Potom zřejmě

$$U = \bigcup_{x \in U} G_x.$$

Zadávat topologii pomocí báze je běžné a pohodlné. Proto je dobré podívat se na vztah topologie a báze z opačné strany. Mějme dánu množinu X a systém podmnožin $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$. Můžeme se ptát, za jakých podmínek je $\mathcal{G}$ bází nějaké topologie, čili kdy existuje topologie τ na X taková, že $\mathcal{G}$ je bází τ. Odpověď dává následující věta.

Věta 1.2.4. *Buďte X množina, $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$. Potom $\mathcal{G}$ je bází nějaké topologie τ na X, právě když splňuje*
(1) $X = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G$,
(2) $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, $\forall x \in G_1 \cap G_2$, $\exists G_3 \in \mathcal{G}$, $x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

Důkaz. Již jsme si řekli v poznámce 1.2.2, že pokud τ existuje, tak je dána rovnicí (1.1), a je tedy určena jednoznačně.

Zdůvodněme nejprve, že podmínky (1), (2) jsou nutné. Nechť $\mathcal{G}$ je bází topologie τ. Podmínku (1) jsme již také probrali v poznámce 1.2.2, viz rovnice (1.2). Dále jsou-li G_1, G_2 dvě množiny z $\mathcal{G} \subset \tau$, pak jsou otevřené a rovněž $G_1 \cap G_2$ musí být otevřená množina. Podle poznámky 1.2.3 (nebo rovnice (1.1)) existuje $G_3 \in \mathcal{G}$ tak, že $x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

Ukažme dále, že podmínky (1), (2) jsou postačující. Nechť jsou tedy splněny a definujme τ rovnicí (1.1). Máme ukázat, že τ je topologií na X. Všimněme si, že podmínka (2) nám říká: jestliže $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, potom $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

(i) Určitě $X \in \tau$ podle podmínky (1). Rovněž $\emptyset \in \tau$, viz rovnice (1.3).

(ii) Nechť jsou dány množiny

$$U_\alpha = \bigcup_{G\in\mathcal{G}_\alpha} G \in \tau \text{ pro } \alpha \in \mathscr{A},$$

kde $\mathscr{A}$ je nějaká indexová množina a $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}$ pro každé α. Potom

$$\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} U_\alpha = \bigcup_{G\in\tilde{\mathcal{G}}} G\,, \text{ kde } \tilde{\mathcal{G}} := \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} \mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G},$$

a tedy $\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} U_\alpha \in \tau$.

(iii) Nechť jsou dány množiny $U_1, U_2 \in \tau$,

$$U_k = \bigcup_{G\in\mathcal{G}_k} G \text{ pro } k = 1, 2,$$

kde $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}$. Potom z distributivního zákona pro průniky a sjednocení plyne

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{G_1\in\mathcal{G}_1,\, G_2\in\mathcal{G}_2} G_1 \cap G_2.$$

Jak bylo zmíněno výše, jestliže $G_1 \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$, $G_2 \in \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}$, potom podle podmínky (2) je $G_1 \cap G_2 \in \tau$, a tak podle již dokázaného bodu (ii) je $U_1 \cap U_2 \in \tau$. □

Poznámka 1.2.5. Uvažme situaci, kdy na množině X jsou zadány dvě báze $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Jim příslušné topologie označíme po řadě τ_1 a τ_2. Přirozeně vzniká otázka, za jakých podmínek se topologie τ_1 a τ_2 shodují. Vzhledem k tomu, jak topologie definována pomocí báze, je zřejmé následující tvrzení.

K tomu, aby $\tau_1 = \tau_2$, je nutné a stačí, aby platilo

$$\mathcal{B}_1 \subset \tau_2 \ \textit{ a současně } \ \mathcal{B}_2 \subset \tau_1.$$

Vyjádřeno slovně: každá množina z báze $\mathcal{B}_1$ musí být otevřená v topologii τ_2 a naopak.

Následující pojem uvádíme pouze pro informaci, pracovat s ním dále nebudeme.

Definice 1.2.6. Buďte (X, τ) topologický prostor, $x \in X$. Řekneme, že systém otevřených okolí $\mathcal{B}_x$ bodu x je *bází okolí bodu x* nebo také *lokální bází v bodě x*, jestliže

$$\forall \,\text{okolí } U \text{ bodu } x,\ \exists B \in \mathcal{B}_x,\ B \subset U.$$

Topologii na množině X lze zadávat tak, že v každém bodě $x \in X$ zadáme bázi okolí $\mathcal{B}_x$ tohoto bodu, přičemž množina $\mathcal{G} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ by měla splňovat podmínky na bázi topologie.

1.3 Relativní topologie

Definice 1.3.1. Buďte (X, τ) topologický prostor, $Y \subset X$. Potom

$$\tau_Y := \{G \cap Y;\, G \in \tau\}$$

je topologie na Y (*samostatně ověřte!*). Nazýváme ji *relativní topologií* na Y. Říkáme, že (Y, τ_Y) je *topologickým podprostorem* prostoru (X, τ).

Poznámka. Při stejném značení jako v definici 1.3.1 buď $M \subset Y$. Při používání topologických pojmů pro množinu M by mělo být vždy jasno, zda máme na mysli původní topologii τ na X nebo relativní topologii τ_Y na Y.

Příklad 1.3.2. Uvažujme reálnou přímku $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Buďte $X := [\,0, 1\,] \subset \mathbb{R}$, $M = Y := (0, 1)$. Potom $\overline{M} = [\,0, 1\,]$ v topologii na X, ale $\overline{M} = (0, 1)$ v topologii na Y. Abychom ve druhém případě zdůraznili, že se jedná o relativní topologii na Y, budeme někdy psát $\overline{M}^Y$ namísto $\overline{M}$.

1.4 Hromadný bod a izolovaný bod množiny

Definice 1.4.1. Buďte (X, τ) topologický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že $x \in X$ je *hromadným bodem* množiny M, jestliže každé okolí bodu x obsahuje alespoň jeden bod množiny

M, který je různý od x. Tuto vlastnost můžeme také zapsat takto

$$\forall U \in \tau,\, x \in U \implies (U \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset.$$

Řekneme, že bod $x \in M$ je *izolovaným bodem* množiny M, jestliže není hromadným bodem. To znamená, že existuje okolí bodu x, které obsahuje z množiny M pouze bod x. Tuto vlastnost můžeme také zapsat takto

$$\exists U \in \tau,\, U \cap M = \{x\}.$$

Povšimněme si, že hromadný bod množiny M může, ale nemusí ležet v M. Naproti tomu podle definice je izolovaný bod množiny M jejím prvkem. Dále z definice okamžitě plyne, že množina M je disjunktním sjednocením svých izolovaných bodů a těch svých hromadných bodů, které do ní patří. Pomocí hromadných a izolovaných bodů můžeme popsat uzávěr množiny M.

Tvrzení 1.4.2. *Buďte (X, τ) topologický prostor, $M \subset X$. Potom uzávěr $\overline{M}$ je disjunktním sjednocením následujících tří množin*
(1) izolované body množiny M,
(2) hromadné body množiny M patřící do M,
(3) hromadné body množiny M nepatřící do M.

Důkaz. Důkaz bude proveden na cvičení. □

Důsledek 1.4.3. *Buďte (X, τ) topologický prostor. Podmnožina $M \subset X$ je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body.*

Speciálně jestliže množina M nemá žádné hromadné body, pak je uzavřená.

Důkaz. Množina M je uzavřená, právě když $\overline{M} = M$. Podle tvrzení 1.4.2 to nastane právě tehdy, jestliže je prázdná třetí množina zde vyjmenovaná, to jest množina všech hromadných bodů množiny M, které nepatří do M. □

1.5 Druhý axiom spočetnosti, separabilita

Definice 1.5.1. Buďte (X, τ) topologický prostor, $S \subset X$. Řekneme, že množina S je *hustá* v X, jestliže $\overline{S} = X$.

Tvrzení 1.5.2. *Buďte (X, τ) topologický prostor, $S \subset X$. Množina S je hustá v X, právě když splňuje podmínku*

$$\forall G \in \tau \setminus \{\emptyset\},\ G \cap S \neq \emptyset.$$

Vyjádřeno slovně: množina je hustá v X, právě když má neprázdný průnik s každou neprázdnou otevřenou množinou.

Důkaz. Důkaz bude proveden na cvičení. □

Definice 1.5.3. Řekneme, že topologický prostor (X, τ) splňuje *druhý axiom spočetnosti*, jestliže τ má spočetnou bázi. Řekneme, že topologický prostor je *separabilní*, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu.

Oba tyto pojmy nejsou zcela nezávislé, lze ukázat implikaci v jednom směru.

Tvrzení 1.5.4. *Jestliže topologický prostor (X, τ) splňuje druhý axiom spočetnosti, pak je separabilní.*

Důkaz. Buď $\mathcal{G} = \{G_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ spočetná báze topologie τ. Můžeme předpokládat, že $\mathcal{G}$ je tvořena pouze neprázdnými množinami. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme jeden bod $s_n \in G_n$ a položme

$$S := \{s_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Tvrdíme, že $\overline{S} = X$. Skutečně, kdyby $X \setminus \overline{S} \neq \emptyset$, pak by tato otevřená množina musela obsahovat alespoň jednu množinu G_n pro jisté $n \in \mathbb{N}$, a tedy i bod s_n. To je spor se zavedením množiny S. □

1.6 Spojitá zobrazení

Definice 1.6.1. Buďte (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) topologické prostory, $f\colon X_1 \to X_2$. Řekneme, že f je *spojité zobrazení* (*spojitá funkce*), jestliže

$$\forall G \in \tau_2,\ f^{-1}(G) \in \tau_1.$$

Vyjádřeno slovně: f je spojité zobrazení, jestliže vzor každé otevřené množiny je otevřená množina.

Poznámka. Zápisem $f\colon X_1 \to X_2$ se rozumí, pokud není upřesněno jinak, že zobrazení f je definováno všude na X_1.

Tvrzení 1.6.2. *Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.*

Důkaz. Buďte (X_1, τ_1), (X_2, τ_2), (X_3, τ_3) topologické prostory, $f\colon X_1 \to X_2$, $g\colon X_2 \to X_3$. Nechť obě zobrazení f, g jsou spojitá. Potom $g \circ f : X_1 \to X_3$ a pro každou otevřenou množinu $G \subset X_3$ z předpokladů plyne, že $g^{-1}(G) \subset X_2$ je otevřená množina, a tedy i

$$(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}\big(g^{-1}(G)\big)$$

je otevřená množina. □

Definice 1.6.3. Buďte (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) topologické prostory, $f : X_1 \to X_2$, $x_0 \in X_1$. Řekneme, že zobrazení f je *spojité v bodě* x_0, jestliže

$$\forall\,\text{okolí } V \ni f(x_0),\ \exists\,\text{okolí } U \ni x_0,\ f(U) \subset V. \tag{1.5}$$

Vezmeme-li v úvahu, že

$$f(U) \subset V \iff U \subset f^{-1}(V),$$

můžeme (1.5) ekvivalentně přepsat

$$\forall\,\text{okolí } V \ni f(x_0),\ x_0 \in f^{-1}(V)^o,$$

nebo také

$$\forall G \in \tau_2,\ f(x_0) \in G \implies x_0 \in f^{-1}(G)^o.$$

Věta 1.6.4. *Buďte (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) topologické prostory, $f\colon X_1 \to X_2$. Potom zobrazení f je spojité, právě když je spojité v každém bodě prostoru X_1.*

Důkaz. Důkaz bude proveden na cvičení. □

1.7 Axiomy oddělování

Definice 1.7.1. Buď (X, τ) topologický prostor.
(1) Řekneme, že X je T_1-*prostor*, jestliže pro každou dvojici navzájem různých bodů $x, y \in X$ existuje otevřené okolí bodu x, které neobsahuje bod y. Formálně zapsáno

$$(\forall x, y \in X,\ x \neq y)(\exists U \in \tau)(x \in U\ \wedge\ y \notin U).$$

(Poznamenejme, že role bodů x, y lze samozřejmě zaměnit.)
(2) Řekneme, že X je T_2-*prostor* nebo také *Hausdorffův prostor*, jestliže pro každou dvojici navzájem různých bodů v X existují otevřená okolí těchto bodů, která jsou disjunktní.

Formálně zapsáno

$$(\forall x, y \in X,\ x \neq y)(\exists U, V \in \tau)(x \in U\ \wedge\ y \in V\ \wedge\ U \cap V = \emptyset).$$

(3) Řekneme, že X je *regulární pros*tor, jestliže pro každý bod $x \in X$ a každou uzavřenou podmnožinu $A \subset X$ neobsahující bod x existují disjunktní otevřené množiny U a V, přičemž U je otevřeným okolím bodu x a V obsahuje množinu A (tj. je otevřeným okolím množiny A). Formálně zapsáno

$$(\forall x \in X)(\forall A \in \mathrm{c}\tau,\ x \notin A)(\exists U, V \in \tau)(x \in U\ \wedge\ A \subset V\ \wedge\ U \cap V = \emptyset).$$

Řekneme, že X je T_3*-prostor*, je-li současně regulární a T_1..

(4) Řekneme, že X je *normální prostor*, jestliže pro každou dvojici disjunktních uzavřených podmnožin prostoru X existují otevřená okolí těchto podmnožin, která jsou také disjunktní. Formálně zapsáno

$$(\forall A, B \in \mathrm{c}\tau,\ A \cap B = \emptyset)(\exists U, V \in \tau)(A \subset U\ \wedge\ B \subset V\ \wedge\ U \cap V = \emptyset).$$

Řekneme, že X je T_4*-prostor*, je-li současně normální a T_1.

Tvrzení 1.7.2. *Topologický prostor (X, τ) je T_1, právě když každá jednobodová podmnožina prostoru X je uzavřená.*

Důkaz. Důkaz bude proveden na cvičení. □

Poznámka 1.7.3. Axiomy T_1, T_2, T_3, T_4 pro topologické prostory tvoří „ostře uspořádanou posloupnost“ v tom smyslu, že každý následující axiom je silnější než jeho předchůdce. Přitom pro každé $j = 1, 2, 3$ existuje příklad topologického prostoru, který splňuje axiom T_j, ale nesplňuje T_{j+1}. Symbolicky můžeme psát

$$T_1 \supsetneqq T_2 \supsetneqq T_3 \supsetneqq T_4.$$

1.8 Kompaktnost

Definice 1.8.1. Buď (X, τ) topologický prostor. Řekneme, že prostor X je *kompaktní*, jestliže každé jeho *otevřené pokrytí* (tj. pokrytí prostoru X otevřenými množinami) má konečné podpokrytí. Formálně zapsáno

$$\Big(\forall \mathcal{G} \subset \tau,\ \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = X\Big)\Big(\exists \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}\Big)\Big(|\mathcal{G}'| < \infty\ \wedge\ \bigcup_{G \in \mathcal{G}'} G = X\Big).$$

Zde $|\mathcal{G}'|$ značí počet prvků systému množin $\mathcal{G}'$.

Poznámka 1.8.2. Někteří autoři na rozdíl od nás požadují, aby kompaktní prostor byl navíc Hausdorffův.

Definice 1.8.3. Buďte (X, τ) topologický prostor, $A \subset X$. Řekneme, že podmnožina A je *kompaktní*, jestliže A je kompaktním prostorem v relativní topologii.

Vzhledem k tomu, jak byla relativní topologie zavedena, můžeme definici ekvivalentně přeformulovat takto. Podmnožina A je *kompaktní*, jestliže každé její *otevřené pokrytí* v prostoru X má konečné podpokrytí.

Poznámka 1.8.4. Buďte (X, τ) topologický prostor, $B \subset X$ uzavřená podmnožina. Potom uzávěr každé podmnožiny $A \subset B$ v relativní topologii na B se shoduje s uzávěrem A v prostoru X.

Skutečně, podle definice relativní topologie máme

$$\overline{A}^B = \overline{A} \cap B.$$

Podle předpokladu je B uzavřená, proto $\overline{A} \subset B$ a $\overline{A}^B = \overline{A}$.

Přejdeme-li k doplňkům množin, a tedy od otevřených množin k uzavřeným, dostaneme ekvivalentní popis kompaktních topologických prostorů.

Věta 1.8.5. *Topologický prostor X je kompaktní, právě když každý systém jeho uzavřených podmnožin $\{F_\alpha;\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ ($\mathscr{A}$ je libovolná indexová množina), který splňuje podmínku*

$$\forall \mathscr{B} \subset \mathscr{A},\ |\mathscr{B}| < \infty \implies \bigcap_{\alpha \in \mathscr{B}} F_\alpha \neq \emptyset,$$

má neprázdný průnik.

Důkaz. Položme $G_\alpha := X \setminus F_\alpha$. Naopak máme $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$ a platí

$$\bigcap_{\alpha \in \mathscr{B}} F_\alpha \neq \emptyset \iff \bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}} G_\alpha \neq X.$$

Znění věty můžeme tedy přeformulovat následovně.

Prostor X je kompaktní, právě když pro každý systém otevřených podmnožin $\mathcal{G} = \{G_\alpha;\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ v prostoru X platí implikace: jestliže $\mathcal{G}$ splňuje podmínku

$$\forall \mathscr{B} \subset \mathscr{A},\ |\mathscr{B}| < \infty \implies \bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}} G_\alpha \neq X,$$

potom $\mathcal{G}$ nepokrývá X.

Ekvivalentní výrok s touto implikací dostaneme, jestliže obě strany implikace znegujeme a implikaci obrátíme. Výsledný výrok zní: jestliže $\mathcal{G}$ pokrývá X, potom

$$\exists \mathscr{B} \subset \mathscr{A},\ |\mathscr{B}| < \infty \wedge \bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}} G_\alpha = X.$$

Jinak řečeno: jestliže $\mathcal{G}$ pokrývá X, potom $\mathcal{G}$ má konečné podpokrytí.

Podle definice 1.8.1 výrok, ke kterému jsme dospěli, skutečně znamená, že X je kompaktní. $\square$

Věta 1.8.6. *Každá uzavřená podmnožina kompaktního topologického prostoru je také kompaktní.*

Důkaz. Buďte X kompaktní topologický prostor, $A \subset X$ uzavřená podmnožina. Vyjdeme z definice 1.8.3 (včetně ekvivalentního přeformulování). Nechť je dáno libovolné pokrytí množiny A systémem otevřených množin (v prostoru X), které označíme $\{G_\alpha;\ \alpha \in \mathscr{A}\}$.

Potom

$$\{G_\alpha;\ \alpha \in \mathscr{A}\} \cup \{X \setminus A\}$$

je zřejmě otevřené pokrytí celého prostoru X, neboť

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} G_\alpha\right) \cup (X \setminus A) \supset A \cup (X \setminus A) = X.$$

Prostor X je kompaktní, a tedy existuje konečná množina indexů $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ taková, že

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}} G_\alpha\right) \cup (X \setminus A) = X = A \cup (X \setminus A).$$

Nutně

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}} G_\alpha \supset A.$$

Zadané pokrytí množiny A má tedy konečné podpokrytí. $\square$

Věta 1.8.7. *V kompaktním topologickém prostoru má každá jeho nekonečná podmnožina alespoň jeden hromadný bod.*

Důkaz. Nejprve si všimněme, že postačí ukázat, že každá spočetná podmnožina kompaktního prostoru v něm má hromadný bod. Je tomu tak, neboť každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu.

Buďte tedy X kompaktní topologický prostor a $S \subset X$ spočetná podmnožina. Body množinu S uspořádáme do posloupnosti,

$$S = \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Položme

$$X_n := \{x_k;\ k \geq n\} \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Množiny $X_1, X_2, X_3, \ldots$ tvoří klesající posloupnost (vzhledem k inkluzi) a zřejmě platí

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \bigcap_{n=1}^{m} X_n = X_m \neq \emptyset \text{ a současně } \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset.$$

Podle kritéria kompaktnosti z věty 1.8.5 nutně existuje alespoň jedno $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že množina X_{n_0} není uzavřená. Důsledek 1.4.3 nám pak říká, že X_{n_0} má alespoň jeden hromadný bod, neboť v opačném případě by tato množina uzavřená byla. □

Věta 1.8.8. *Každá kompaktní podmnožina Hausdorffova topologického prostoru je uzavřená.*

Důkaz. Buďte X Hausdorffův topologický prostor, $A \subset X$ kompaktní podmnožina. Dále buď $y \in X \setminus A$ libovolný bod. Chceme ukázat, že množina A je uzavřená, neboli že $X \setminus A$ je otevřená.

Využijeme vlastnosti Hausdorffova prostoru a pro každý bod $x \in A$ zvolíme otevřená okolí bodů x a y,

$$U_x \ni x,\ V_x \ni y \ \text{tak, že}\ U_x \cap V_x = \emptyset.$$

Zřejmě systém otevřených množin $\{U_x;\, x \in A\}$ pokrývá množinu A. Z kompaktnosti A plyne, že existuje konečně mnoho bodů $x_1, x_2, \dots x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j}.$$

Položme

$$V := \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j}.$$

Potom V je otevřené okolí bodu y, $V \cap U_{x_j} \subset V_{x_j} \cap U_{x_j} = \emptyset$ a

$$V \cap A \subset V \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j} \right) = \bigcup_{j=1}^{n} \left(V \cap U_{x_j} \right) = \emptyset.$$

Zjistili jsme, že $V \subset X \setminus A$, a tak každý bod $y \in X \setminus A$ leží v této množině i s nějakým svým okolím. To znamená, že $X \setminus A$ je otevřená množina. □

Věta 1.8.9. *Spojitý obraz kompaktního prostoru (tj. obraz kompaktního prostoru při spojitém zobrazení) je kompaktní.*

Důkaz. Buďte X, Y topologické prostory, $f : X \to Y$ spojité zobrazení a nechť prostor X je kompaktní. Mějme dáno libovolné otevřené pokrytí $\{V_\alpha;\, \alpha \in \mathscr{A}\}$ množiny $f(X)$ v prostoru Y. Není těžké nahlédnout, že platí ekvivalence

$$f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} V_\alpha \iff X \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} V_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} f^{-1}(V_\alpha).$$

Ze spojitosti zobrazení f plyne, že všechny množiny $f^{-1}(V_\alpha)$ jsou otevřené, a proto $\{f^{-1}(V_\alpha);\, \alpha \in \mathscr{A}\}$ je otevřené pokrytí kompaktního prostoru X. Existuje tedy končená množina indexů $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, pro kterou

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}} f^{-1}(V_\alpha) \iff f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}} V_\alpha.$$

To dokazuje kompaktnost množiny $f(X)$. $\square$

Následující pojem je uváděn jen pro informaci a v dalším výkladu nebude používán, možná s výjimkou jednoho příkladu na cvičení.

Definice 1.8.10. Řekneme, že topologický prostor je *lokálně kompaktní*, jestliže každý jeho bod má kompaktní okolí.

Poznámka 1.8.11. Pro Hausdorffovy prostory je vlastnost „být lokálně kompaktní“ ekvivalentní s následující zdánlivě silnější vlastností. Je-li Hausdorffův prostor lokálně kompaktní, pak pro libovolný jeho bod a každé okolí tohoto bodu existuje kompaktní podokolí.

Definice 1.8.12. Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v topologickém prostoru X *konverguje* k $x_0 \in X$, jestliže každé okolí bodu x_0 obsahuje všechny členy této posloupnosti až na konečně mnoho.

Skutečnost, že nějaká posloupnost $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k x_0 v prostoru X, budeme většinou zapisovat takto

$$x_n \to x_0 \text{ v } X.$$

Poznámka 1.8.13. V Hausdorffových prostorech může mít každá posloupnost nejvýše jednu limitu. Skutečně, dva různé body v Hausdorffově prostoru lze oddělit jejich okolími, která jsou disjunktní, a není možné, aby nějaká posloupnost měla všechny své členy až na konečně mnoho v obou takovýchto okolích současně.

Definice 1.8.14. Řekneme, že topologický prostor X je *sekvenciálně kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti v X lze vybrat podposloupnost, která v tomto prostoru konverguje.

Poznámka 1.8.15. Obecně pojmy „kompaktní“ a „sekvenciálně kompaktní“ jsou nezávislé. To znamená, že existují příklady topologických prostorů, které jsou kompaktní a nejsou sekvenciálně kompaktní a naopak. Jak uvidíme později, v metrických prostorech jsou tyto pojmy ekvivalentní.

1.9 Kartézský součin topologických prostorů

Na kartézském součinu dvou topologických prostorů se zavádí topologie, která je přirozeně odvozena z topologií obou součinitelů, jak popíšeme níže. Takovýto kartézský součin proto budeme vždy považovat také za topologický prostor.

Lemma 1.9.1. *Buďte (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologické prostory. Potom systém množin*

$$\mathcal{B} := \{U \times V;\, U \in \tau_X,\, V \in \tau_Y\} \tag{1.6}$$

je báze topologie na $X \times Y$.

Důkaz. Důkaz se opírá o větu 1.2.4. Potřebujeme ověřit, že jsou splněny podmínky (1), (2) z této věty. Je ale zřejmé, že podmínka (1) je splněna, neboť systém množin $\mathcal{B}$ určitě pokrývá $X \times Y$, dokonce $X \times Y \in \mathcal{B}$.

Pro ověření podmínky (2) stačí uvážit, že pro $U_1, U_2 \in \tau_X$ a $V_1, V_2 \in \tau_y$, tedy pro $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \mathcal{B}$, máme

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}.$$

A tak v podmínce (2) pro $G_1 = U_1 \times V_1$ a $G_2 = U_2 \times V_2$ můžeme jednoduše položit $G_3 = G_1 \cap G_2$ (pro jakýkoliv bod x z $G_1 \cap G_2$). $\square$

Definice 1.9.2. Buďte (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologické prostory. Topologie $\tau_{X\times Y}$ na $X \times Y$ zavádíme jako topologii určenou bází (1.6).

Poznámka 1.9.3. (1) Tento postup, jak zavést topologii na kartézském součinu topologických prostorů, lze jednoduše zobecnit na libovolný konečný počet součinitelů.

(2) Označme

$$p_X \colon X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x, \; p_Y \colon X \times Y \to Y : (x, y) \mapsto y$$

projekce na první a druhou složku v kartézském součinu. Pro zavedenou topologii na $X \times Y$ jsou tyto projekce spojité. Je-li totiž $U \in \tau_X$, potom

$$p_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{B} \subset \tau_{X\times Y}$$

(víme, že $Y \in \tau_Y$). Podobně pro p_Y.

Na druhé straně topologie na $X \times Y$ je zavedena právě jako nejhrubší (nejslabší) topologie, pro kterou jsou projekce p_X, p_Y spojitá zobrazení. Skutečně, jsou-li p_X a p_Y spojitá zobrazení vzhledem k nějaké topologii $\tilde{\tau}$ na $X \times Y$, $U \in \tau_X$ a $V \in \tau_Y$, pak množina

$$p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$$

musí být otevřená, to jest $U \times V \in \tilde{\tau}$. Báze $\mathcal{B}$ zavedená v (1.6) je tvořena množinami právě tohoto tvaru, proto $\mathcal{B} \subset \tilde{\tau}$. Potom ale také $\tau_{X\times Y} \subset \tilde{\tau}$.

Tvrzení 1.9.4. *Buďte (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologické prostory, $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ po řadě báze topologií τ_X a τ_Y. Potom*

$$\mathcal{B}' = \{U \times V;\, U \in \mathcal{F},\, V \in \mathcal{G}\}$$

je báze topologie $\tau_{X\times Y}$.

Důkaz. Důkaz bude proveden na cvičení. □

Věta 1.9.5. *Kartézský součin konečného počtu kompaktních topologických prostorů je kompaktní prostor.*

K důkazu budeme potřebovat dvě lemmata.

Lemma 1.9.6. *Buďte X, Y topologické prostory, $x_0 \in X$. Potom zobrazení*

$$f \colon Y \to X \times Y : y \mapsto (x_0, y)$$

je spojité.

Důkaz. Mějme dánu otevřenou množinu $W \subset X \times Y$. Pro libovolný bod $y \in f^{-1}(W)$ je $f(y) = (x_0, y) \in W$ a vzhledem k definici topologie na $X \times Y$ existují otevřené množiny

$U \subset X$, $V \subset Y$ tak, že

$$(x_0, y) \in U \times V \subset W.$$

Potom platí

$$\forall y' \in V,\ f(y') = (x_0, y') \in W,$$

a tedy $y \in V \subset f^{-1}(W)$. To dokazuje, že $f^{-1}(W)$ je otevřená množina. □

Lemma 1.9.7. *Buďte X, Y topologické prostory, $x_0 \in X$, $K \subset Y$ kompaktní podmnožina, $W \subset X \times Y$ otevřená množina. Nechť $\{x_0\} \times K \subset W$. Potom existuje okolí U bodu x_0 takové, že $U \times K \subset W$.*

Důkaz. Pro každý bod $y \in K$ je $(x_0, y) \in W$, a tak můžeme zvolit otevřené množiny $U_y \subset X$ a $V_y \subset Y$ takové, že

$$(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset W.$$

Je zřejmé, že $K \subset \bigcup_{y \in K} V_y$. Toto otevřené pokrytí má konečné podpokrytí,

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j},\ \text{kde } n \in \mathbb{N},\ y_1, \dots, y_n \in K.$$

Potom $U := \bigcap_{j=1}^{n} U_{y_j}$ je otevřené okolí bodu x_0.

Přitom tvrdíme, že $U \times K \subset W$. Skutečně, pro každý bod $(x, y) \in U \times K$ existuje index j, $1 \le j \le n$, takový, že $y \in V_{y_j}$. Potom $(x, y) \in U_{y_j} \times V_{y_j} \subset W$. □

Důkaz věty 1.9.5. Větu stačí dokázat pro dva kompaktní prostory X a Y. Rozšířit její platnost na libovolný konečný počet kompaktních prostorů lze snadno pomocí matematické indukce.

Mějme dáno nějaké otevřené pokrytí

$$X \times Y = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} W_\alpha,\ \mathscr{A} \text{ je množina indexů.}$$

Pro každé $x \in X$ je podle lemmatu 1.9.6 podmnožina $\{x\} \times Y \subset X \times Y$ spojitým obrazem kompaktního prostoru Y, a proto je také kompaktní, viz věta 1.8.9. Existuje tedy konečná množina indexů $\mathscr{A}(x) \subset \mathscr{A}$ taková, že

$$\{x\} \times Y \subset \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}(x)} W_\alpha.$$

Podle lemmatu 1.9.7 existuje otevřené okolí $U_x \ni x$ takové, že

$$U_x \times Y \subset \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}(x)} W_\alpha.$$

Nyní z otevřeného pokrytí $\{U_x;\, x \in X\}$ kompaktního prostoru X můžeme vybrat konečné podpokrytí $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$. Položme

$$\tilde{\mathscr{A}} := \bigcup_{j=1}^{n} \mathscr{A}(x_j),$$

což je konečná množina indexů. Dostáváme

$$X \times Y = \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j} \right) \times Y = \bigcup_{j=1}^{n} \big(U_{x_j} \times Y\big) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}(x_j)} W_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \tilde{\mathscr{A}}} W_\alpha.$$

Docházíme tak k závěru, že každé otevřené pokrytí topologického prostoru $X \times Y$ má konečné podpokrytí. □

1.10 Metrické prostory

Definice 1.10.1. *Metrický prostor* je uspořádaná dvojice (X, ϱ), kde X je množina a $\varrho\colon X \to [0, +\infty)$, která splňuje axiomy:
(1) $\forall x, y \in X,\ \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
(2) $\forall x, y \in X,\ \varrho(x, y) = 0 \iff x = y$,
(3) $\forall x, y, z \in X,\ \varrho(x, z) \le \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Zobrazení ϱ nazýváme *metrika.*

Poznámka. Axiom (3) se nazývá *trojúhelníková nerovnost.*

Značení 1.10.2. V metrickém prostoru (X, ϱ) zavedeme označení pro *koule* určené ostrou a neostrou nerovností. Pro $x \in X$ a $r > 0$ pokládáme

$$\begin{aligned} B(x, r) &:= \{y \in X;\ \varrho(x, y) < r\}, \\ \bar{B}(x, r) &:= \{y \in X;\ \varrho(x, y) \le r\}. \end{aligned}$$

Do této definice můžeme zahrnout i případ $r = 0$. Potom $B(x, 0) = \emptyset$, $\bar{B}(x, 0) = \{x\}$.

Tvrzení 1.10.3. *Buď (X, ϱ) metrický prostor. Pak systém všech koulí*

$$\mathcal{B} := \{B(x, r);\ x \in X,\ r > 0\}$$

je bází topologie.

Poznámka. Tato báze určuje topologii, o které můžeme říci, že je indukována metrikou. Každý metrický prostor tak automaticky považujeme za topologický prostor. Podmnožina G metrického prostoru (X, ϱ) je otevřená, právě když s každým svým bodem $x \in G$ obsahuje i nějaké jeho kulové okolí $B(x, r)$, $r > 0$.

Důkaz. Důkaz byl proveden na cvičení. □

Poznámka 1.10.4. Je ponecháno čtenáři na rozmyšlení, že koule v metrickém prostoru (X, ϱ) mají následující topologické vlastnosti. Pro $x \in X$ a $r > 0$ je $B(x, r)$ otevřená množina, $\bar{B}(x, r)$ je uzavřená množina. Jako vždy $\overline{B(x, r)}$ značí uzávěr množiny $B(x, r)$. Pro $0 < r_1 < r_2$ platí

$$B(x, r_1) \subset \overline{B(x, r_1)} \subset \bar{B}(x, r_1) \subset B(x, r_2).$$

Poznamenejme ještě, že v některých poměrně speciálních případech může nastat nerovnost $\overline{B(x, r)} \neq \bar{B}(x, r)$ i pro $r > 0$. Příklad byl uveden na cvičení.

Příklad 1.10.5. Každý normovaný vektorový prostor $(V, \|\cdot\|)$ je současně metrickým prostorem. Metrika ϱ na V je definována

$$\forall x, y \in V,\ \ \varrho(x, y) := \|x - y\|.$$

Ověření axiomů metriky je bezprostřední.

Poznámka 1.10.6. (1) Nechť na množině X jsou dány dvě metriky ϱ_1 a ϱ_2, kterým po řadě odpovídají topologie τ_1 a τ_2. Dále označme po řadě $B_1(x, r)$ a $B_2(x, r)$ otevřené koule určené těmito metrikami pro $x \in X$, $r > 0$. Podobně jako v poznámce 1.2.5 se můžeme ptát, kdy $\tau_1 = \tau_2$. Vzhledem k tomu, jak metrika určuje topologii, platí tvrzení

$\tau_1 = \tau_2$, *právě když pro každé* $x \in X$ *a každé* $r > 0$ *existují* $r', r'' > 0$ *takové, že*

$$B_1(x, r') \subset B_2(x, r) \ \ a\ \ B_2(x, r'') \subset B_1(x, r).$$

Jak je snadno vidět, k tomu stačí, aby bylo možné metriky navzájem odhadnout jednu pomocí druhé takto:

existují konstanty $0 < A \leq B$ *takové, že*

$$\forall x, y \in X,\ \ A\, \varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq B\, \varrho_1(x, y).$$

Potom ovšem také

$$\forall x, y \in X,\ \ \frac{1}{B}\, \varrho_2(x, y) \leq \varrho_1(x, y) \leq \frac{1}{A}\, \varrho_2(x, y).$$

V tom případě můžeme říci, že metriky ϱ_1 a ϱ_2 jsou *ekvivalentní.*

(2) Buďte (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) dva metrické prostory. Na kartézském součinu $X \times Y$ pak můžeme zavést metriku vícero způsoby, které jsou však ekvivalentní ve smyslu předchozí

poznámky. Asi nejjednodušší volbou je položit

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ \forall y_1, y_2 \in Y,\ \ \varrho_{X\times Y}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) := \varrho_X(x_1,x_2) + \varrho_Y(y_1,y_2). \tag{1.7}$$

Další ekvivalentní možnosti jsou

$$\varrho_{X\times Y}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) := \max\big\{\varrho_X(x_1,x_2), \varrho_Y(y_1,y_2)\big\}$$

nebo

$$\varrho_{X\times Y}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) := \sqrt{\varrho_X(x_1,x_2)^2 + \varrho_Y(y_1,y_2)^2}\,.$$

Poslední volba metriky se například uplatňuje při kartézském součinu euklidovských prostorů.

Ověření, že tyto volby jsou navzájem ekvivalentní, bude provedeno na cvičení.

(3) Uvažujeme nadále dva metrické prostory (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y), kterým odpovídají po řadě topologie τ_X a τ_Y. Na $X \times Y$ můžeme přirozeně zavést topologii dvěma různými způsoby, a sice buď jako topologii na kartézském součinu dvou topologických prostorů, nebo jako topologii určenou metrikou (1.7). Ve skutečnosti se obě topologie shodují. Abychom rovnost těchto topologií ukázali, stačí ověřit následující dvě podmínky

(i)

$$(\,\forall(x,y) \in X \times Y\,)(\forall r > 0\,)(\,\exists r_1, r_2 > 0\,)(\,B_X(x,r_1) \times B_Y(y,r_2) \subset B_{X\times Y}\big((x,y),r\big)\,),$$

(ii)

$$(\,\forall(x,y) \in X \times Y\,)(\forall r_1, r_2 > 0\,)(\,\exists r > 0\,)(\,B_{X\times Y}\big((x,y),r\big) \subset B_X(x,r_1) \times B_Y(y,r_2)\,).$$

Tento problém opět ponecháme na cvičení.

Tvrzení 1.10.7. *Buďte (X, ϱ) metrický prostor, $x \in X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost v X. Potom*

$$x_n \to x \;\; v\, X \iff \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0.$$

Důkaz. Jedná se jen o přepis definice. Víme, že $x_n \to x$, právě když každé okolí bodu x obsahuje všechny body posloupnosti (x_n) až na konečně mnoho. Přitom $U \subset X$ je okolím bodu x, právě když existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset U$. Můžeme se proto omezit jen na kulová okolí a dostáváme

$$x_n \to x \iff \forall r > 0,\, \exists n_0 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq n_0,\, x_n \in B(x, r).$$

Poslední výrok je ale ekvivalentní s tím, že $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, neboť $x_n \in B(x, r)$ znamená přesně, že $\varrho(x_n, x) < r$. □

Věta 1.10.8. *Buďte (X, ϱ) metrický prostor, $S \subset X$. Potom S je uzavřená množina, právě když pro libovolnou posloupnost $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v X a každé $x \in X$ je splněna implikace*

$$(x_n \to x \;\; v\, X) \wedge (\forall n \in \mathbb{N},\; x_n \in S) \implies x \in S. \tag{1.8}$$

Důkaz. Víme, že $x \in \overline{S}$, právě když každé okolí bodu x protíná S (viz cvičení).

Dokážeme, že podmínka (1.8) je nutná. Předpokládejme tedy, že $S = \overline{S}$ a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost v S taková, že $x_n \to x$ v X. Pro libovolné okolí U bodu x existuje alespoň jedno (dokonce nekonečně mnoho) $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x_n \in U$. Odtud plyne $U \cap S \neq \emptyset$, a tedy $x \in \overline{S} = S$.

Dokážeme, že podmínka (1.8) je postačující. Předpokládejme tedy, že (1.8) je splněno. Pro libovolný bod $x \in \overline{S}$ platí

$$\forall n \in \mathbb{N},\; B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) \cap S \neq \emptyset.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak můžeme zvolit $x_n \in S$ takové, že $\varrho(x_n, x) < 1/n$. Potom ale $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, a tedy $x_n \to x$ v X. Podle (1.8) odtud plyne $x \in S$. To dokazuje, že $\overline{S} \subset S$, čili $\overline{S} = S$. □

Poznámka 1.10.9. (1) Každý metrický prostor (X, ϱ) je T_1 topologický prostor. Skutečně, pro $x, y \in X$, $x \neq y$, položme $r := \varrho(x, y) > 0$. Potom otevřená množina $B(x, r)$ obsahuje x, ale neobsahuje y.

(2) Stejně snadno lze ukázat, že metrický prostor je T_2 topologickým prostorem neboli Hausdorffovým prostorem. Při stejném značení jako v bodě (1) jsou zřejmě koule $B(x, r/2)$ a $B(y, r/2)$ po řadě otevřená okolí bodů x a y. Stačí ukázat, že tato okolí jsou disjunktní.

Skutečně tomu tak je. Kdyby existoval bod $z \in B(x, r/2) \cap B(y, r/2)$, tak by platila nerovnost

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

což je spor.

Následující věta říká, že obě tvrzení z předešlé poznámky lze ještě podstatně zesílit.

Věta 1.10.10. *Každý metrický prostor je normální, a je tedy T_4 topologickým prostorem.*

Důkaz. Buďte (X, ϱ) metrický prostor, $Y, Z \subset X$ uzavřené podmnožiny a nechť $Y \cap Z = \emptyset$.

Množina $X \setminus Z$ je otevřená a $Y \subset X \setminus Z$, a proto pro každé $y \in Y$ existuje poloměr $r'_y > 0$ takový, že $B(y, r'_y) \subset X \setminus Z$, tedy $B(y, r'_y) \cap Z = \emptyset$.

Podobně pro každé $z \in Z$ existuje $r''_z > 0$ tak, že $B(z, r''_z) \cap Y = \emptyset$.

Položme

$$U := \bigcup_{y \in Y} B\Big(y, \frac{r'_y}{2}\Big), \; V := \bigcup_{z \in Z} B\Big(z, \frac{r''_z}{2}\Big).$$

Jistě $U, V \subset X$ jsou otevřené množiny, $Y \subset U$, $Z \subset V$. Tvrdíme, že $U \cap V = \emptyset$.

Abychom to ověřili, pro spor předpokládejme, že existuje $a \in U \cap V$. To znamená, že existují body $y \in Y$ a $z \in Z$, pro které

$$\varrho(y, a) < \frac{r'_y}{2} \;\text{ a }\; \varrho(z, a) < \frac{r''_z}{2}.$$

Pro určitost předpokládejme, že $r'_y \leq r''_z$. Potom

$$\varrho(y, z) \leq \varrho(y, a) + \varrho(z, a) < \frac{r'_y}{2} + \frac{r''_z}{2} \leq r''_z.$$

Dostáváme $\varrho(y, z) < r''_z$ a odtud $y \in B(z, r''_z) \cap Y \neq \emptyset$, což je spor. □

Věta 1.10.11. *Metrický prostor splňuje druhý axiom spočetnosti, právě když je separabilní.*

Důkaz. Důkaz byl proveden na cvičení. □

Poznámka 1.10.12. Jelikož metrický prostor je Hausdorffův, každá jeho kompaktní podmnožina je uzavřená.

Definice 1.10.13. Buďte (X, ϱ) metrický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že množina M je *omezená*, jestliže $M \subset B(x, r)$ pro nějaký střed $x \in X$ a poloměr $r > 0$.

Poznámka 1.10.14. (1) Podmnožina omezené množiny je zřejmě také omezená množina.
(2) V metrickém prostoru mějme dánu kouli $B(x, r)$, kde $x \in X$ a $r > 0$, a další bod $y \in X$. Potom pro dostatečně velké $r' > 0$ je $B(x, r) \subset B(y, r')$. Čtenář se sám snadno přesvědčí, že stačí volit $r' = r + \varrho(x, y)$.

Odtud plyne, že volba středu x v definici 1.10.13 není nijak podstatná. Bude-li to pro nás výhodné, můžeme se omezit na nějaký pevný střed $x_0 \in X$ společný pro všechny omezené množiny. Pro každou omezenou množinu $M \subset X$ pak existuje $r_M > 0$ tak, že $M \subset B(x_0, r_M)$.
(3) Z bodu (2) poznámky je zřejmé, že sjednocení konečného počtu omezených množin je

omezená množina.
(4) Kompaktní podmnožiny metrického prostoru jsou omezené (zdůvodněte!).

Definice 1.10.15. Buďte (X, ϱ) metrický prostor, $M, A \subset X$ podmnožiny a $\varepsilon > 0$. Řekneme, že A je *ε-síť* množiny M, jestliže

$$M \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon).$$

Poznámka 1.10.16. V definici se nekladou žádné požadavky na vzájemnou polohu množin M a A. Připouští se například, že A je podmnožinou množiny M stejně tak, jako že obě množiny jsou disjunktní. Není ale těžké nahlédnout, že platí následující tvrzení.

Je-li A ε-síť množiny M, pak existuje 2ε-síť A' množiny M taková, že $A' \subset M$. Jestliže $|A| < \infty$, pak A' lze volit tak, aby $|A'| \leq |A|$ (zde $|\cdot|$ značí počet prvků).

Skutečně, můžeme předpokládat, že pro každé $x \in A$ je $B(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$. V opačném případě bychom mohli bod x z množiny A vynechat a zmenšená množina by byla stále ε-sítí. Při tomto předpokladu můžeme pro každé $x \in A$ zvolit $y_x \in B(x, \varepsilon) \cap M$. Potom $B(x, \varepsilon) \subset B(y_x, 2\varepsilon)$ (ponecháno čtenáři na ověření). Položíme $A' := \{y_x;\, x \in A\}$ a dostáváme

$$M \subset \bigcup_{y \in A'} B(y, 2\varepsilon).$$

Definice 1.10.17. Buďte (X, ϱ) metrický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že množina M je *totálně omezená*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná (!) ε-síť množiny M.

Poznámka 1.10.18. (1) Je zřejmé, že každá totálně omezená množina je omezená.
(2) Pro totálně omezenou množinu M v metrickém prostoru platí

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{konečná } \varepsilon\text{-síť } A_\varepsilon \subset M \text{ množiny M.}$$

(3) Uzávěr jakékoliv koule v metrickém prostoru je omezená množina, viz poznámka 1.10.4. Proto každá množina je omezená, právě když její uzávěr je omezená množina.
(4) V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ je každá množina totálně omezená, právě když je omezená. Je tomu tak, protože v $\mathbb{R}^n$ prekompaktní množina znamená totéž co omezená množina.

Lemma 1.10.19. *Buďte X topologický T_1 prostor, $M \subset X$, $x \in X$. Je-li x hromadným bodem množiny M, potom každé okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny M.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje okolí $U \ni x$, pro které $|U \cap M| < \infty$. Můžeme navíc předpokládat, že okolí U je otevřené. Potom množina

$$F := M \cap (U \setminus \{x\})$$

je také konečná, a tedy podle tvrzení 1.7.2 je uzavřená. Proto $V := U \setminus F$ je otevřená množina obsahující bod x, čili otevřené okolí bodu x. Přitom z této konstrukce plyne, že $M \cap V \subset \{x\}$, což je spor s definicí hromadného bodu. □

Lemma 1.10.20. *Jestliže v metrickém prostoru má každá nekonečná podmnožina hromadný bod, pak je tento prostor totálně omezený.*

Důkaz. Buď (X, ϱ) metrický prostor, ve kterém má každá nekonečná podmnožina hromadný bod. Pro spor předpokládejme, že existuje $\varepsilon > 0$, pro které neexistuje konečná ε-síť prostoru X.

Tvrdíme, že potom existuje posloupnost $(x_n) \subset X$ s vlastností

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n, \text{ je } \varrho(x_m, x_n) \geq \varepsilon. \tag{1.9}$$

Tuto posloupnost sestrojíme rekurzivně.

(i) $x_1 \in X$ volíme libovolně.

(ii) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a členy posloupnosti $x_1, \ldots, x_n$ byly již zvoleny. Podle předpokladu $\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon) \neq X$. Člen x_{n+1} volíme libovolně tak, aby

$$x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon).$$

Z této konstrukce je zřejmé, že podmínka (1.9) je splněna.

Množina

$$M := \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

je nekonečná, a proto má alespoň jeden hromadný bod $y \in X$. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x_n, y) < \varepsilon/2$ a současně $x_n \neq y$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, dostáváme

$$\varrho(x_m, y) \geq \varrho(x_n, x_m) - \varrho(x_n, y) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

a proto $x_m \notin B(y, \varepsilon/2)$. Dostáváme spor s lemmatem 1.10.19. □

Věta 1.10.21. *Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je totálně omezená.*

Důkaz. Podmnožina metrického prostoru s relativní topologií je také metrickým prostorem. Relativní topologie je určená metrikou, kterou dostaneme jako zúžení metriky z celého prostoru na uvažovanou podmnožinu. Je-li tato podmnožina navíc kompaktní, pak je sama o sobě kompaktním metrickým prostorem. Stačí proto ukázat, že každý kompaktní metrický prostor je totálně omezený.

Z věty 1.8.7 víme, že každá nekonečná množina v kompaktním topologickém prostoru má hromadný bod. Jedná-li se o kompaktní metrický prostor, pak podle lemmatu 1.10.20 tato vlastnost zaručuje, že uvažovaný prostor je totálně omezený. □

Věta 1.10.22. *Totálně omezený metrický prostor je separabilní.*

Důkaz. Buď (X, ϱ) totálně omezený metrický prostor. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme konečnou $(1/n)$-síť $A_n \subset X$ a položíme

$$S := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Množina S je nejvýše spočetná. Tvrdíme, že je hustá v X.

Máme ukázat, že pro libovolné $x \in X$ a každé $r > 0$ je $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$, viz tvrzení 1.5.2. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1/r$. Potom existuje $a \in A_n$ takové, že $x \in B(a, 1/n)$, a tedy $\varrho(x, a) < 1/n \leq r$. To ovšem znamená, že $a \in B(x, r) \cap S \neq \emptyset$. $\square$

Kombinací vět 1.10.21 a 1.10.22 dostáváme okamžitě následující výsledek.

Důsledek 1.10.23. *Každý kompaktní metrický prostor je separabilní.*

Pro metrické prostory lze obrátit implikaci z věty 1.8.7.

Věta 1.10.24. *Metrický prostor je kompaktní, právě když každá jeho nekonečná podmnožina má hromadný bod.*

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$) platí obecně pro všechny kompaktní topologické prostory a byla dokázána ve větě 1.8.7. Dokážeme implikaci ($\Leftarrow$). Buď (X, ϱ) metrický prostor takový, že každá jeho nekonečná podmnožina v něm má hromadný bod. Chceme ukázat, že každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné podpokrytí. Důkaz rozdělíme na dvě části.

(I) Tvrdíme, že každé otevřené pokrytí prostoru X má nejvýše spočetné podpokrytí.

Prostor X je podle lemmatu 1.10.20 totálně omezený, podle věty 1.10.22 je separabilní a podle věty 1.10.11 splňuje druhý axiom spočetnosti. Můžeme tedy zvolit spočetnou bázi topologie $\mathcal{B}$.

Mějme dáno libovolné otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru X,

$$X = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G.$$

Pro každé $x \in X$ zvolme $G_x \in \mathcal{G}$ tak, že $x \in G_x$. Dále zvolíme $B_x \in \mathcal{B}$ takový prvek báze, pro který

$$x \in B_x \subset G_x.$$

Položme

$$\mathcal{B}' := \{B_x;\, x \in X\} \subset \mathcal{B}.$$

$\mathcal{B}'$ je nejvýše spočetný systém otevřených množin, který splňuje

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B = \bigcup_{x \in X} B_x = X.$$

Z konstrukce systému $\mathcal{B}'$ je patrné, pro každé $B \in \mathcal{B}'$ můžeme zvolit $G_B \in \mathcal{G}$ tak, že $B \subset G_B$. Položme

$$\mathcal{G}' := \{G_B;\, B \in \mathcal{B}'\} \subset \mathcal{G}.$$

Potom $\mathcal{G}'$ je nejvýše spočetný podsystém otevřeného pokrytí $\mathcal{G}$, který je také pokrytím, neboť

$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}'} G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} G_B \supset \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B = X.$$

Pokud by pokrytí $\mathcal{G}'$ bylo konečné, jsme hotovi. Uvažujme dále případ, kdy $\mathcal{G}'$ je spočetné pokrytí prostoru X.

(II) Tvrdíme, že spočetné otevřené pokrytí $\mathcal{G}'$ prostoru X má konečné podpokrytí.

Pro spor předpokládejme, že $\mathcal{G}'$ nemá žádné konečné podpokrytí. Očíslujme prvky systému $\mathcal{G}'$,

$$\mathcal{G}' = \{G_k;\, k \in \mathbb{N}\}.$$

Podle našeho předpokladu platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \bigcup_{k=1}^{n} G_k \neq X.$$

Můžeme tedy nalézt posloupnost $(x_n) \subset X$, která splňuje

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} G_k.$$

Potom množina

$$M := \{x_n;\, n \in \mathbb{N}\}$$

je nutně nekonečná (kdyby byla konečná, tak by $M \subset \bigcup_{k=1}^{N} G_k$ pro dostatečné velké $N \in \mathbb{N}$). Podle předpokladu množina M má hromadný bod $x_0 \in X$. K němu existuje $m \in M$ takové, že

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{m} G_k =: U.$$

Množina U je otevřeným okolím bodu x_0. Současně pro každé $n \geq m$ máme $x_n \notin U$. To ovšem znamená, že průnik $M \cap U$ má nejvýše $m-1$ prvků, tedy je konečný. Dostáváme tak spor s vlastností hromadného bodu, viz lemma 1.10.19. □

Věta 1.10.25. *Metrický prostor je kompaktní, právě když je sekvenciálně kompaktní.*

Důkaz. $(\Rightarrow)$ Buď (X, ϱ) kompaktní metrický prostor. Chceme ukázat, že je sekvenciálně kompaktní. Mějme v X dánu libovolnou posloupnost (x_n). Uvažme množinu M, jejímiž prvky jsou členy této posloupnosti, to jest

$$M := \{x_n;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Rozlišíme dva případy.

(i) M je konečná. Potom nutně existuje $y \in M$ takové, že $x_n = y$ pro nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$. Existuje tedy posloupnost (x'_n) vybraná z (x_n), která splňuje $\forall n \in \mathbb{N}$, $x'_n = y$. Potom samozřejmě $x'_n \to y$ v X.

(ii) M je nekonečná množina. Potom podle věty 1.10.24 má M hromadný bod $y \in X$. Tvrdíme, že existuje ostře rostoucí posloupnost indexů $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ splňující podmínku

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ x_{n_k} \in B\left(y, \frac{1}{k}\right). \tag{1.10}$$

Tuto posloupnost můžeme nalézt rekurzivně. Index $n_1 \in \mathbb{N}$ zvolíme libovolně tak, aby bylo splněno (1.10) pro $k = 1$. Nechť jsme již nalezli indexy $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$, $k \geq 2$. Index n_k volíme tak, aby platilo $n_k > n_{k-1}$ a současně (1.10). Podle lemmatu (1.10.19) je taková volba skutečně možná. Položme $x'_k := x_{n_k}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Potom (x'_k) je posloupnost vybraná z (x_n) a z podmínky (1.10) plyne, že $x'_k \to y$ v X.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že X je sekvenciálně kompaktní. Mějme dánu libovolnou nekonečnou podmnožinu $M \subset X$. K ověření kompaktnosti stačí podle věty 1.10.24 ukázat, že M má hromadný bod.

V množině M zvolíme spočetnou podmnožinu, jejíž body očíslujeme indexy z $\mathbb{N}$. Dostaneme tak posloupnost (x_n) v prostoru X, která splňuje
(i) $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset M$,
(ii) všechny členy posloupnosti (x_n) jsou navzájem různé.
Ze sekvenciální kompaktnosti potom plyne, že existuje konvergentní posloupnost (x'_n) vybraná z (x_n), $x'_n \to y \in X$. Každé okolí limitního bodu y proto obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (x_n), a tedy nekonečně mnoho bodů z M. To znamená, že y je hromadným bodem množiny M. $\square$

Poznámka 1.10.26. Připomeňme, jak lze ekvivalentně přepsat pojem „spojité zobrazení" v případě metrických prostorů.

Buďte (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) metrické prostory, $f : X \to Y$. Zobrazení f je spojité, právě když pro každou posloupnost (x_n) v prostoru X platí

$$x_n \to x \in X \implies f(x_n) \to f(x) \in Y.$$

Vyjádřeno slovně: zobrazení mezi metrickými prostory je spojité, právě když zobrazuje konvergentní posloupnosti na konvergentní.

Poznamenejme ještě, že implikace zleva doprava platí obecně i pro topologické prostory.

Důkaz bude rozebrán na cvičení.

1.11 Úplnost

Definice 1.11.1. Posloupnost $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v metrickém prostoru (X, ϱ) se nazývá *cauchyovská*, jestliže

$$\lim_{m,n\to\infty} \varrho(x_m, x_n) = 0.$$

Tuto vlastnost lze ekvivalentně přepsat takto

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon)$$

nebo také

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall k \in \mathbb{N})(\varrho(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon).$$

Poznámka 1.11.2. Každá konvergentní posloupnost v metrickém prostoru je cauchyovská (zopakujte si důkaz!).

Dále ještě jednou připomeňme, že v metrickém prostoru (obecněji v každém Hausdorffově prostoru) má každá posloupnost nejvýše jednu limitu.

Definice 1.11.3. Řekneme, že metrický prostor je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost v něm má limitu.

Poznámka 1.11.4. Buďte (X, ϱ) úplný metrický prostor, $Y \subset X$. Potom Y je také automaticky metrickým prostorem s metrikou zúženou z X na Y. Přitom platí

$$(Y, \varrho|_{Y\times Y}) \text{ je úplný metrický prostor } \iff Y \subset X \text{ je uzavřená podmnožina.}$$

Zdůvodnění je ponecháno na čtenáři.

Poznámka 1.11.5. Občas může být užitečné následující pozorování.

Jestliže z cauchyovské posloupnosti v nějakém metrickém prostoru lze vybrat konvergentní podposloupnost, pak konverguje i celá posloupnost k téže limitě.

Skutečně, buď (x_n) cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru (X, ϱ). Nechť existuje ostře rostoucí posloupnost indexů (n_k) taková, že

$$x_{n_k} \to x \in X \text{ pro } k \to \infty.$$

Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Potom existují $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall k \geq k_0,\ \varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall m, n \geq n_0,\ \varrho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Zvolme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $k \geq k_0$ a $n_k \geq n_0$. Potom pro všechna $n \geq n_0$ dostáváme

$$\varrho(x_n, x) \leq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To dokazuje, že $x_n \to x$.

Věta 1.11.6. *Každý kompaktní metrický prostor je úplný.*

Důkaz. Buď (x_n) cauchyovská posloupnost v kompaktním metrickém prostoru X. Podle věty 1.10.25 je X také sekvenciálně kompaktní, a proto existuje konvergentní posloupnost (x'_n) vybraná z (x_n), $x'_n \to x \in X$. Podle poznámky 1.11.5 máme také $x_n \to x$ v X. □

Věta 1.11.7. *Metrický prostor je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený.*

Důkaz. $(\Rightarrow)$ Podle vět 1.11.6 a 1.10.21 je každý kompaktní metrický prostor úplný a totálně omezený.

($\Leftarrow$) Nechť X je úplný a totálně omezený metrický prostor. Chceme ukázat, že X je sekvenciálně kompaktní, a proto i kompaktní (věta 1.10.25). Pro libovolně zadanou posloupnost (x_n) v X se tedy snažíme nalézt konvergentní podposloupnost. Protože jsme v úplném prostoru, stačí, aby vybraná posloupnost byla cauchyovská.

Konstrukci vybrané posloupnosti je založena na takzvaném *diagonálním výběru*. Rekurzivně nalezneme posloupnost posloupností

$$(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

v prostoru X takovou, že
(i) $(x_n^{(0)})$ je totožná se zadanou posloupností (x_n),
(ii) pro všechna $k \geq 0$ je $(x_n^{(k+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ vybraná z $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$.
Současně nalezneme ještě pomocnou posloupnost bodů $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ v prostoru X. Přitom požadujeme, aby
(iii) pro každé $k \in \mathbb{N}$ byla posloupnost $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ celá obsažena v kouli $B(a_k, 1/k)$, to jest

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varrho(a_k, x_n^{(k)}) < \frac{1}{k}.$$

Popíšeme k-tý krok rekurze, $k \in \mathbb{N}$. Pro $k = 1$ se jedná o počáteční krok. Předpokládejme, že body a_j, $1 \leq j \leq k-1$, a posloupnosti $(x_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leq j \leq k-1$, byly již nalezeny (pro $k = 1$ máme k dispozici pouze posloupnost $(x_n^{(0)})$). Využijeme totální omezenosti a zvolíme konečnou $(1/k)$-síť $A \subset X$. Jistě existuje $a \in A$ takové, že koule $B(a, 1/k)$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(x_n^{(k-1)})_{n\in\mathbb{N}}$. Položíme $a_k := a$ a vybereme posloupnost $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ z posloupnosti $(x_n^{(k-1)})_{n\in\mathbb{N}}$ tak, aby $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n^{(k)} \in B(a_k, 1/k)$.

Poznamenejme, že podle konstrukce takto nalezené posloupnosti mají následující vlastnost: pro všechna $k, \ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq k$, platí

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varrho(a_k, x_n^{(\ell)}) < \frac{1}{k}.$$

Na závěr po této konstrukci rekurzí položíme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n := x_n^{(n)}$$

(jestliže uspořádáme posloupnosti $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, $k \geq 1$, pod sebe do řádků, pak posloupnost (y_n) leží na diagonále). Potom posloupnost (y_n) je také vybraná z původní posloupnosti (x_n) a navíc splňuje

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n \implies \varrho(a_n, y_m) < \frac{1}{n}.$$

Pro libovolné indexy $m, n \in \mathbb{N}$ položíme $p := \min\{m, n\}$ a odhadneme

$$\varrho(y_m, y_n) \leq \varrho(a_p, y_m) + \varrho(a_p, y_n) < \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}\,,$$

čili

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ \varrho(y_m, y_n) < \frac{2}{\min\{m, n\}}\,.$$

Odtud je patrné, že posloupnost (y_n) je cauchyovská. □

Důsledek 1.11.8. *Buďte X úplný metrický prostor, $M \subset X$. Potom M je kompaktní množina, právě když je uzavřená a totálně omezená.*

Důkaz. Podmnožinu M můžeme uvažovat jako metrický podprostor prostoru X. Jak bylo zmíněno v poznámce 1.11.4, tento podprostor je úplný, právě když podmnožina M je uzavřená. Zbytek okamžitě plyne z věty 1.11.7. □

Definice 1.11.9. Buďte X Hausdorffův topologický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že množina M je *prekompaktní*, jestliže $\overline{M}$ je kompaktní.

Poznámka 1.11.10. Je-li M totálně omezená podmnožina metrického prostoru X, potom $\overline{M}$ je také totálně omezená.

Skutečně, stačí uvážit, že pro $\varepsilon > 0$ a $A \subset X$ platí implikace

$$M \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) \implies \overline{M} \subset \bigcup_{a \in A} B(a, 2\varepsilon).$$

Ověření je ponecháno na čtenáři jako cvičení.

Následující důsledek plyne okamžitě z důsledku 1.11.8 a poznámky 1.11.10. Doplnění podrobností je ponecháno na čtenáři.

Důsledek 1.11.11. *Buďte X úplný metrický prostor, $M \subset X$. Potom množina M je prekompaktní, právě když je totálně omezená.*

Definice 1.11.12. Buďte (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je *izometrie*, jestliže splňuje

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad \varrho_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) = \varrho_X(x_1, x_2).$$

Řekneme, že metrické prostory X, Y jsou *izometrické*, jestliže existuje izometrická bijekce $f\colon X \to Y$.

Poznámka 1.11.13. (1) Každé izometrické zobrazení je prosté a spojité. Zdůvodněte!

(2) Složením dvou izometrických zobrazení dostáváme opět izometrii.

Definice 1.11.14. *Zúplněním* (*úplným obalem*) metrického prostoru (X, ϱ) rozumíme dvojici tvořenou úplným metrickým prostorem (X^*, ϱ^*) a izometrií $f : X \to X^*$ takovou, že obraz $f(X)$ je hustý v X^*.

Poznámka 1.11.15. Často se zúplnění zavádí v jednodušší podobě, když se předpokládá, že původní prostor X je vnořen jako hustý podprostor do svého zúplnění X^*. Izometrie f je potom prostě identické zobrazení definované na X s hodnotami v nadprostoru X^*.

Dokážeme, že každý metrický prostor lze zúplnit, a to v podstatě jediným způsobem. Nejprve jeden pomocný výsledek.

Lemma 1.11.16. *Buďte X topologický prostor, Y Hausdorffův topologický prostor, $M \subset X$. Dále buďte $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ spojitá zobrazení. Jestliže $f\big|_M = g\big|_M$ a $\overline{M} = X$, potom $f = g$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje $x \in X$ takové, že $f(x) \neq g(x)$. Podle předpokladu existují otevřená okolí $f(x) \in U$ a $g(x) \in V$, a přitom $U \cap V = \emptyset$. Potom $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$, a tak $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset X$ je neprázdná otevřená podmnožina. Protože M je hustá podmnožina v X, existuje $z \in M \cap f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$. To znamená, že bod $f(z) = g(z)$ leží současně v U a ve V, tedy $U \cap V \neq \emptyset$. Dostáváme spor. $\square$

Věta 1.11.17. *Každý metrický prostor má zúplnění. Toto zúplnění je určeno jednoznačně až na izometrickou bijekci.*

Poznámka 1.11.18. Upřesněme, jak je míněna jednoznačnost až na izometrickou bijekci (nebo krátce jen „až na izometrii“).

Nechť jsou dána dvě zúplnění $\big((X_1^*, \varrho_1^*), f_1\big)$, $\big((X_2^*, \varrho_2^*), f_2\big)$ metrického prostoru (X, ϱ). Jednoznačnost až na izometrickou bijekci znamená, že existuje izometrická bijekce $g\colon X_1^* \to X_2^*$ taková, že následující diagram je komutativní

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1^* \arrow[rr, "g"'] & & X_2^*
\end{tikzcd}$$

Komutativitou diagramu se zde myslí, že $f_2 = g \circ f_1$ (naopak platí $f_1 = g^{-1} \circ f_2$).

Důkaz. Mějme dán metrický prostor (X, ϱ).

(I) *Jednoznačnost.* Nechť k prostoru (X, ϱ) existují dvě zúplnění $\big((X_j^*, \varrho_j^*), f_j\big)$, $j = 1, 2$. Buď $x_1^* \in X_1^*$ libovolný bod. Podle definice zúplnění existuje posloupnost $(x_n) \subset X$ taková, že

$$f_1(x_n) \to x_1^* \text{ v } X_1^*.$$

Posloupnost $\big(f_1(x_n)\big) \subset X_1^*$ je cauchyovská, f_1 je izometrie, a proto i posloupnost (x_n) je cauchyovská. Také f_2 je izometrie, a proto rovněž posloupnost $\big(f_2(x_n)\big) \subset X_2^*$ je cauchyovská. Prostor X_2^* je úplný, existuje tedy $x_2^* \in X_2^*$ tak, že

$$f_2(x_n) \to x_2^* \text{ v } X_2^*.$$

Definujeme $g\colon X_1^* \to X_2^*$ předpisem

$$\forall x_1^* \in X_1^*,\ g(x_1^*) := x_2^*,$$

kde bod x_2^* je přiřazen bodu x_1^* podle právě popsané konstrukce.

Musíme ověřit, že zobrazení g je definováno korektně, čili že hodnota $g(x_1^*)$ nezávisí na konkrétní volbě posloupnosti $(x_n) \subset X$. Nechť $(\tilde{x}_n) \subset X$ je další posloupnost taková, že

$f_1(\tilde{x}_n) \to x_1^*$. Tvrdíme, že potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_2^*\big(f_2(x_n), f_2(\tilde{x}_n)\big) = 0 \tag{1.11}$$

Skutečně, využijeme vlastnosti izometrie a faktu, že metrika je spojité zobrazení, a limitním přechodem $n \to \infty$ dostáváme

$$\varrho_2^*\big(f_2(x_n), f_2(\tilde{x}_n)\big) = \varrho(x_n, \tilde{x}_n) = \varrho_1^*\big(f_1(x_n), f_1(\tilde{x}_n)\big) \to \varrho_1^*(x_1^*, x_1^*) = 0.$$

Je ponecháno na čtenáři jako cvičení, aby sám zdůvodnil, že vzhledem k (1.11) musí mít cauchyovské posloupnosti $\big(f_2(x_n)\big)$ a $\big(f_2(\tilde{x}_n)\big)$ stejnou limitu. Odtud již plyne korektnost definice zobrazení g.

Ukážeme, že g má požadované vlastnosti. Tvrdíme, že g je izometrie, a tudíž prosté zobrazení. Mějme dány dva body $x_1^*, y_1^* \in X_1^*$. Zvolme posloupnosti $(x_n), (y_n) \subset X$ takové, že

$$f_1(x_n) \to x_1^*,\ f_1(y_n) \to y_1^* \text{ v } X_1^*.$$

Podle definice zobrazení g máme

$$f_2(x_n) \to g(x_1^*),\ f_2(y_n) \to g(y_1^*) \text{ v } X_2^*.$$

Odtud a ze spojitosti metriky plyne

$$\begin{aligned}\varrho_2^*\big(g(x_1^*), g(y_1^*)\big) &= \lim_{n\to\infty} \varrho_2^*\big(f_2(x_n), f_2(y_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \varrho_1^*\big(f_1(x_n), f_1(y_n)\big) \\ &= \varrho_1^*(x_1^*, y_1^*).\end{aligned}$$

Dále tvrdíme, že platí $g \circ f_1 = f_2$. Pro libovolné $x \in X$ uvažme konstantní posloupnost: $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n := x$. Potom jistě

$$x_n \to x \text{ v } X,\ f_1(x_n) \to f_1(x) \text{ v } X_1^*,\ f_2(x_n) \to f_2(x) \text{ v } X_2^*.$$

Podle definice zobrazení g je $g \circ f_1(x) = g\big(f_1(x)\big) = f_2(x)$. To dokazuje rovnost, jak jsme tvrdili.

Zbývá dokázat, že g je bijekce. Zaměňme role obou zúplněni X_1^* a X_2^*. Potom obdobně jako výše můžeme tvrdit, že existuje izometrie $h\colon X_2^* \to X_1^*$, která splňuje $h \circ f_2 = f_1$. Dostáváme

$$g \circ h \circ f_2 = g \circ f_1 = f_2.$$

To znamená, že zobrazení (izometrické) $g \circ h\colon X_2^* \to X_2^*$ splňuje $g \circ h\big|_{f_2(X)} = 1_{X_2^*}\big|_{f_2(X)}$ (zde $1_{X_2^*}$ značí identické zobrazení na X_2^*). Podle předpokladu je $\overline{f_2(X)} = X_2^*$ a obě zobrazení $g \circ h$ a $1_{X_2^*}$ jsou spojitá, a tak lemma 1.11.16 zaručuje, že

$$g \circ h = 1_{X_2^*}. \tag{1.12}$$

Z rovnosti (1.12) plyne, že g je surjektivní zobrazení (již výše jsme zjistili, že je prosté). Zdůvodněte!

Poznamenejme, že v posledním kroku jsme mohli uplatnit i následující argument. Obdobně jako (1.12) lze odvodit rovnost $h \circ g = 1_{X_1^*}$. Obě tyto rovnosti pak znamenají, že g a h jsou navzájem inverzní zobrazení.

(II) *Existence.* Níže zkonstruujeme zúplnění, které je tvořeno úplným metrickým prostorem (X^*, ϱ^*) a izometrií $f\colon X \to X^*$. Volně řečeno, abychom získali úplný prostor X^*, musíme k původnímu prostoru X přidat všechny chybějící limitní body pro cauchyovské posloupnosti. Přitom je nutné vzít v úvahu, že některé cauchyovské posloupnosti se k sobě v limitě neomezeně blíží, a budou proto konvergovat ke stejné limitě.

Výchozím bodem je množina

$$\tilde{X} := \{\text{všechny cauchyovské posloupnosti v } X\}.$$

Na $\tilde{X}$zavedeme relaci ekvivalence $\sim$ vztahem

$$\forall (x_n), (y_n) \in \tilde{X}, \ \ (x_n) \sim (y_n) \stackrel{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = 0.$$

Ověření, že se skutečně jedná o ekvivalenci, je snadné a je založeno na přímém výpočtu. Tento krok je přenechán čtenáři jako cvičení. Položíme

$$X^* := \tilde{X}/\sim .$$

Prvky množiny X^* jsou tedy třídy ekvivalence cauchyovských posloupností (x_n) v X, které budeme značit $[(x_n)]$.

Na X^* zavedeme metriku. Pro $x^* = [(x_n)]$, $y^* = [(y_n)] \in X^*$ pokládáme

$$\varrho^*(x^*, y^*) := \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) \in [\,0, +\infty). \tag{1.13}$$

Nejprve musíme zdůvodnit, že tato limita skutečně existuje. Protože $\mathbb{R}$ je úplný metrický prostor, stačí ukázat, že číselná posloupnost $\big(\varrho(x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská. Tato vlastnost okamžitě plyne z nerovnosti

$$|\varrho(x_m, y_m) - \varrho(x_n, y_n)| \le \varrho(x_m, x_n) + \varrho(y_m, y_n). \tag{1.14}$$

Jestliže odstraníme absolutní hodnotu, tato nerovnost v sobě vlastně skrývá dvě nerovnosti, které se snadno dokáží pomocí trojúhelníkové nerovnosti. Postup je úplně stejný, jako při důkazu, že metrika na X představuje spojité zobrazení $\varrho\colon X \times X \to \mathbb{R}$, který byl proveden na cvičení. Doplnění podrobností je ponecháno na čtenáři.

Dále je třeba ověřit, že definice je korektní v tom smyslu, že hodnota limity (1.13) nezávisí na volbě reprezentantů příslušných tříd ekvivalence. Buďte

$$(x_n), (x'_n), (y_n), (y'_n) \in \tilde{X}, \text{ a nechť } (x_n) \sim (x'_n), \ (y_n) \sim (y'_n).$$

Máme ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x'_n, y'_n).$$

To je však okamžitý důsledek nerovnosti

$$|\varrho(x'_n, y'_n) - \varrho(x_n, y_n)| \le \varrho(x'_n, x_n) + \varrho(y'_n, y_n),$$

ve které stačí provést limitní přechod $n \to \infty$. Je to vlastně opět nerovnost (1.14), ve které píšeme všude po řadě x'_n a y'_n namísto x_m a y_m.

Zobrazení $f : X \to X^*$ definujeme tak, že prvku $x \in X$ přiřadíme třídu ekvivalence konstantní posloupnosti, jejíž všechny členy jsou rovny x. Formálně zapsáno:

$$\forall x \in X, \ f(x) := [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$$

Je hned vidět, že f je izometrie. Podle definice (1.13) totiž pro $x, y \in X$ dostáváme

$$\varrho^*\big(f(x), f(y)\big) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x, y) = \varrho(x, y).$$

Pro dokončení důkazu se nám bude hodit následující pomocný výrok:

$$\forall (x_n) \in \tilde{X}, \ \lim_{k\to\infty} f(x_k) = x^*, \text{ kde } x^* := [(x_n)] \in X^*. \tag{1.15}$$

Výrok (1.15) dokážeme. Podle definice máme $f(x_k) = [(x_k)_{n\in\mathbb{N}}]$, a proto

$$\varrho^*\big(f(x_k), x^*\big) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_k, x_n).$$

Zapišme fakt, že posloupnost (x_n) je cauchyovská, takto:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists k_0 \in \mathbb{N}, \ \forall k, n \ge n_0, \ \ \varrho(x_k, x_n) < \varepsilon.$$

Pro $k \ge k_0$ pak nutně platí $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_k, x_n) \le \varepsilon$. To ovšem znamená, že

$$\lim_{k\to\infty} \varrho^*\big(f(x_k), x^*\big) = 0.$$

Tvrdíme, že obraz $f(X)$ je hustý v X^*.

Abychom to ukázali, uvažme libovolný bod $x^* = [(x_n)] \in X^*$, kde (x_n) je cauchyovská posloupnost v X. Vzhledem k (1.15) existuje konvergentní posloupnost $f(x_k) \to x^*$ pro $k \to \infty$. To dokazuje, že $\overline{f(X)} = X^*$.

Konečně tvrdíme, že prostor X^* je úplný.

Mějme dánu cauchyovskou posloupnost (x_n^*) v X^*. S odvoláním na na již dokázanou hustotu $f(X)$ v X^* ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in X$ takové, že

$$\varrho^*\big(f(x_n), x_n^*\big) < \frac{1}{n}\,. \tag{1.16}$$

Pro $m, n \in \mathbb{N}$ odhadneme

$$\begin{aligned} \varrho(x_m, x_n) &= \varrho^*\big(f(x_m), f(x_n)\big) \le \varrho^*\big(f(x_m), x_m^*\big) + \varrho^*\big(x_m^*, x_n^*\big) + \varrho^*\big(x_n^*, f(x_n)\big) \\ &< \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \varrho^*\big(x_m^*, x_n^*\big). \end{aligned}$$

Z odhadu je patrné, že $\varrho(x_m, x_n) \to 0$ pro $m, n \to \infty$, čili (x_n) je cauchyovská posloupnost v X. Položme

$$x^* := [(x_n)] \in X^*.$$

Vzhledem k (1.16) dostáváme

$$\varrho^*(x_n^*, x^*) \le \varrho^*\big(x_n^*, f(x_n)\big) + \varrho^*\big(f(x_n), x^*\big) < \frac{1}{n} + \varrho^*\big(f(x_n), x^*\big).$$

Odtud již podle (1.15) plyne $x_n^* \to x^*$ v X^*, což dokazuje úplnost. $\square$

PŘÍKLAD. (1) $X = \mathbb{Q}$, $\forall p,q \in \mathbb{Q}$, $\rho(p,q) = |p-q|$

$X^* = \mathbb{R}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\rho^*(x,y) = |x-y|$

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : q \mapsto q$

(2) $X = C([a,b])$, $-\infty < a < b < +\infty$

$\forall \varphi, \psi \in X$, $\rho(\varphi,\psi) = \int_a^b |\varphi(t)-\psi(t)|\,dt$ v Riemann. smyslu

$X^* = L^1((a,b), dt)$; $\forall \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in X^*$, $\rho^*(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) = \int_a^b |\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\psi}(t)|\,dt$

Lebesgue. integrál

$f : C([a,b]) \to L^1((a,b), dt) : \varphi \mapsto \tilde{\varphi}$, kde

$\tilde{\varphi}$ = třída ekvivalence fce φ modulo míra 0

Topologické vektorové prostory nad $T = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Definice. Topologický vektor. prostor nad T je vektorový prostor V, který je současně topologickým prostorem, a operace

$+ : V \times V \to V$, $\cdot : T \times V \to V$ jsou spojitá zobrazení.

Pozn. V top. vektor. prostor nad T

(1) Připomenutí: (X, τ_X), (Y, τ_Y) top. prostory, $x_0 \in X$, potom $Y \to X \times Y : y \mapsto (x_0, y)$ je spojité

$y \in V$, $V \to V \times V : x \mapsto (x,y)$ je spojité, $+ : V \times V \to V$

složení $V \to V : x \mapsto x + y$ translace - spojité (a)

$\lambda \in T$, $V \to T \times V : x \mapsto (\lambda, x)$ je spojité, $\cdot : T \times V \to V$

složení $V \to V : x \mapsto \lambda x$ dilatace - spojité (b)

(a) invertovatelné, (b) invertovatelné pro $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow$ homeomorfismy

speciálně : $U \subset V$ otevřená $\Rightarrow y + U$, λU jsou otevřené

$F \subset V$ uzavřená $\Rightarrow y + F$, λF jsou uzavřené

(2) $A \subset V$ lib., $U \subset V$ otevřená $\Rightarrow A + U = \bigcup_{a \in A} (a + U)$ otevřená mn.

$0 \in U \Rightarrow A = A + 0 \subset A + U$ = otevřené okolí mn. A

(3) $\lambda \in T$ pevné, $V \times V \to V \times V : (x,y) \mapsto (x, \lambda y)$ spojité zobr.

složeno s $+$, $V \times V \to V : (x,y) \mapsto x + \lambda y$ je spojité

$\lambda = -1$: $V \times V \to V : (x,y) \mapsto x - y$ — " —

platí: $U \ni 0$ otevřené okolí $\Rightarrow$ (i) $\exists W \ni 0$ otevř. okolí, $W + W \subset U$

(ii) $\exists W \ni 0$ — " — , $W - W \subset U$

Příklad. $(V, \|\cdot\|)$ normovaný vektor. prostor

$\to$ metrika: $\forall x, y \in V$, $\rho(x,y) := \|x - y\| \to$ topologie

V je topolog. vektor. prostor CVIČENÍ

Věta. Každý topolog. vektor. prostor je regulární.

Jestliže top. vekt. prostor V splňuje T_1 axiom oddělování, tak je to T_3 prostor, a tedy i Hausdorffův prostor.

Důkaz. V - top. vekt. prostor

$x \in V$, $F \subset V$ uzavřená, $x \notin F$

BÚNO: $x = 0$, $0 \in V \setminus F$ otevřené okolí vektoru 0

$\Rightarrow \exists W \ni 0$ otevř. okolí, $W - W \subset V \setminus F$

$F \subset F + W$ otevřená mn.

Tvrdíme $W \cap (F + W) = \emptyset$

sporem: nechť $z \in W \cap (F + W)$, $\left.\begin{array}{l} z = y + w, \text{ kde } y \in F, w \in W \\ z \in W \end{array}\right\}$

$\Rightarrow y = z - w \in W - W \subset V \setminus F$, současně $y \in F \Rightarrow (V \setminus F) \cap F \neq \emptyset$ spor

Konvexní množiny, konvexní funkcionály

V vektor. prostor nad $\mathbb{R}$

Připomenutí $\emptyset \neq X \subset V$, konvexní obal X označíme $[X]_K$

$[X]_K$ = nejmenší konvex. podmnožina V obsahující X

Platí: $[X]_K = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \,;\, n \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_n \in V,\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \right\}$

Věta. Buďte V top. vektor. prostor, $G \subset V$ otevřená. Potom

$[G]_K$ je otevřená.

Důkaz. $z \in [G]_K$ lib. $\Rightarrow z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, $x_j \in G$, $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$

$x_j \in G \Rightarrow \exists$ otevř. okolí $x_j \in U_j \subset G$, $j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow z \in U := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j U_j \subset G$, U je otevřená

Tedy G je otevřená

Věta. Buďte V top. vektor. prostor nad $\mathbb{R}$, $M \subset V$ konvexní.

Potom M°, $\overline{M}$ jsou konvexní. ($M \neq \emptyset$)

Důkaz. (1) $M^\circ \subset \underbrace{[M^\circ]_K}_{\text{otevřená}} \subset [M]_K = M$ ← M je konvex.

maximalita $M^\circ \Rightarrow M^\circ = [M^\circ]_K$, tj. M° je konvex.

(2) $x_1, x_2 \in \overline{M}$, $\alpha \in (0,1)$ pevné, $y := \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ leží v $\overline{M}$?

Stačí ukázat, že $\forall$ otevř. okolí $U \ni y$, $U \cap M \neq \emptyset$

$f : V \times V \to V : (v_1, v_2) \mapsto \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2$ je spojité

$f(x_1, x_2) = y \in U \Rightarrow \exists$ otevř. okolí $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ tak, že $f(W_1 \times W_2) \subset U$.

$W_1 \cap M \neq \emptyset$ ($x_1 \in \overline{M}$), $W_2 \cap M \neq \emptyset$ ($x_2 \in \overline{M}$)

zvolíme $y_1 \in W_1 \cap M$, $y_2 \in W_2 \cap M \Rightarrow (y_1, y_2) \in W_1 \times W_2$

$\Rightarrow f(y_1, y_2) = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in U \cap M \neq \emptyset$

Definice. Buď V vektor. prostor nad $\mathbb{R}$. Řekneme, že $p : V \to [0, +\infty)$ je konvexní (nebo sublineární) funkcionál, jestliže

(1) $\forall x, y \in V$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(2) $\forall x \in V$, $\forall \lambda \geq 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

Věta. Buďte V vektor. prostor nad $\mathbb{R}$, p konvex. funkcionál na V, $k > 0$.

Položme $E := \{x \in V;\ p(x) < k\}$, $F := \{x \in V;\ p(x) \leq k\}$.

Potom E, F jsou konvex. množiny.

Pro E navíc platí: $\forall x \in V$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \lambda \in [0, \varepsilon)$, $\lambda x \in E$.

Důkaz. (1) $x, y \in E$, $\alpha \in (0,1)$ lib.

$p(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq p(\alpha x) + p((1-\alpha) y) = \alpha p(x) + (1-\alpha) p(y) < \alpha k + (1-\alpha) k = k$

$\Rightarrow \alpha x + (1-\alpha) y \in E$; F - obdobně

(2) $\forall x \in V, \quad \exists \varepsilon > 0, \forall \lambda \in [0, \varepsilon), \quad \underset{\lambda p(x)}{\underset{\shortparallel}{p(\lambda x)}} < k$

případy: $p(x) = 0$ zřejmé

$p(x) > 0$, stačí, aby $\varepsilon := \frac{k}{p(x)}$, $0 \leq \lambda < \varepsilon \Rightarrow p(\lambda x) < k$

Definice. Buďte V vektor. prostor na $\mathbb{R}$, $M \subset V$ konvex.
Nechť je splněno $\forall x \in V, \exists \varepsilon > 0, \forall \lambda \in [0, \varepsilon), \quad \lambda x \in M$

Definujeme $\forall x \in V, \quad p_M(x) := \inf\{\underbrace{\lambda > 0;\ \tfrac{1}{\lambda} x \in M}_{\neq \emptyset}\} \in [0, +\infty)$

$(\inf \emptyset = +\infty)$

$p_M : V \to [0, +\infty)$ se nazývá Minkowského funkcionál.

Věta. Při stejných předpokladech jako v definici je Minkowského funkcionál konvexní.

CVIČENÍ

Věta (Hahn-Banach). Buďte V vektor. prostor nad $\mathbb{R}$, p konvexní funkcionál na V, $V_0 \subset V$ podprostor, f_0 lin. funkcionál na V_0.

Nechť $\forall x \in V_0,\ f_0(x) \leq p(x)$.

Potom existuje lin. funkcionál f na V tak, že

(1) $\forall x \in V_0,\ f_0(x) = f(x)$ (f je prodloužením f_0, $f|_{V_0} = f_0$)

(2) $\forall x \in V,\ f(x) \leq p(x)$.

Důkaz. (I) Pokud $V_0 = V$ $\to$ konec

Nechť $V_0 \neq 0$, zvolme $z \in V \setminus V_0$, položme $V_1 = V_0 \dot{+} \mathbb{R}z$

hledáme f_1 lin. funkc. na V_1, (i) $f_1|_{V_0} = f_0$

(ii) $\forall x \in V_1,\ f_1(x) \leq p(x)$

(i) $\Rightarrow$ stačí zadat $f_1(z) =: c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V_0, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f_1(x+\lambda z) = f_0(x) + \lambda c$

(ii) $x \in V_0, \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda z \in V_1$ / $\lambda = 0$: $f_1(x) = f_0(x) \leq p(x)$ splněno

$\lambda > 0$: $f_1(\frac{1}{\lambda}x + z) \leq p(\frac{1}{\lambda}x + z)$

$f_0(\frac{1}{\lambda}x) + c \leq p(\frac{1}{\lambda}x + z)$

$\lambda < 0$: $f_0(\frac{1}{\lambda}x) + c \geq -p(-\frac{1}{\lambda}x - z)$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}V_0 = V_0$, musíme splnit $\forall x \in V_0,\ f_0(x) + c \leq p(x+z)$

$\forall y \in V_0,\ f_0(y) + c \geq -p(-y-z)$

připadně $\forall x, y \in V_0,\quad -p(-y-z) - f_0(y) \leq c \leq p(x+z) - f_0(x)$

$c \in \mathbb{R}$ existuje $\iff \sup\limits_{y \in V_0}\left(-p(-y-z) - f_0(y)\right) \leq \inf\limits_{x \in V_0}\left(p(x+z) - f_0(x)\right)$

$\iff \forall x, y \in V_0,\ \underbrace{-p(-y-z) - f_0(y) \leq p(x+z) - f_0(x)}$

$\Updownarrow$

$f_0(x) - f_0(y) \leq p(x+z) + p(-y-z)$

splněno: $f_0(x) - f_0(y) = f_0(x-y) \leq p(x-y) = p(x+z+(-y-z))$

$\leq p(x+z) + p(-y-z)$

(II) $\mathcal{F} = \{(W, g);\ W \subset V$ podprostor, $V_0 \subset W,\ g|_{V_0} = f_0,$

$\forall x \in W,\ g(x) \leq p(x)\}$

$(W_1, g_1), (W_2, g_2) \in \mathcal{F}$, $(W_1, g_1) \leq (W_2, g_2) \overset{\text{DEF}}{\iff} W_1 \subset W_2$ a $g_2|_{W_1} = g_1$

$\leq$ je uspořádání – samostatně

Předpoklad Zornova lemmatu: $\mathcal{G} = \{(W_\alpha, g_\alpha) ; \alpha \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{F}$ řetězec

$W := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} W_\alpha$, pro každé $x \in W$ zvolíme $\alpha \in \mathcal{A}$, $x \in W_\alpha$, $g(x) := g_\alpha(x)$

Musíme ukázat (a) $W \subset V$ je podprostor

(b) $g(x)$ nezávisí na volbě $\alpha \in \mathcal{A}$

(c) g je lineární

(a), (b), (c) – samostatně

[(a) $x, y \in W \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $x \in W_\alpha$, $y \in W_\beta$, pro určitost $W_\alpha \subset W_\beta$

$\Rightarrow x, y \in W_\beta \Rightarrow x+y \in W_\beta \Rightarrow x+y \in W$]

z definice $(W, g) \Rightarrow$ (i) $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $W_\alpha \subset W$, $g|_{W_\alpha} = g_\alpha$, tj. g je prodloužením g_α

$\Downarrow$

g je prodlouž. f_0

(ii) $\forall x \in W$, $g(x) \leq p(x)$

[pro jisté $\alpha \in \mathcal{A}$, $g(x) = g_\alpha(x) \leq p(x)$]

tedy $(W, g) \in \mathcal{F}$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $(W_\alpha, g_\alpha) \leq (W, g)$

(W, g) je horní závora $\mathcal{G}$

Zornovo lemma $\Rightarrow$ v $\mathcal{F}$ existuje maximální prvek (W, f)

(i) $W \subset V$ podpr., $V_0 \subset W$, $f|_{V_0} = f_0$

(ii) $\forall x \in W$, $f(x) \leq p(x)$

stačí ukázat, že $W = V$

sporem nechť $W \neq V$, (I) $\Rightarrow \exists (W_1, f_1)$ taková, že

(i) $W \subsetneq W_1$ podprostor, f_1 je lin. funkcionál na W_1

$f_1|_W = f \Rightarrow V_0 \subset W_1$, $f_1|_{V_0} = f_0$

(ii) $\forall x \in W_1$, $f_1(x) \leq p(x)$

$\Rightarrow (W_1, f_1) \in \mathcal{F}$, $(W, f) \leq (W_1, f_1)$, $(W, f) \neq (W_1, f_1)$

spor s maximalitou $(W, f) \in \mathcal{F}$

<u>Definice.</u> Buď V vektor. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Zobrazení $p: V \to [0, +\infty)$ je <u>seminorma</u> (<u>pseudonorma</u>), jestliže

(1) $\forall x, y \in V$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(2) $\forall \lambda \in$ těleso, $\forall x \in V$, $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$

<u>Pozn.</u> (a) těleso $= \mathbb{R}$, seminorma je rovněž konvex. funkcionál

(b) nevylučuje se $p(x) = 0$ pro $x \neq 0$

Věta (Hahn–Banach, těleso $= \mathbb{C}$)

Buďte V vektor. prostor nad $\mathbb{C}$, $V_0 \subset V$ podprostor, f_0 lin. funkcionál na V_0, p seminorma na V.

Nechť $\forall x \in V_0,\ |f_0(x)| \le p(x)$.

Potom existuje lin. funkcionál f na V tak, že

(1) $f|_{V_0} = f_0$,

(2) $\forall x \in V,\ |f(x)| \le p(x)$.

Důkaz. označme $V_{\mathbb{R}}$, $V_{0\mathbb{R}}$ vekt. prostory V, V_0 uvažované nad $\mathbb{R}$

($V_{\mathbb{R}} = V$, $V_{0\mathbb{R}} = V_0$ jako množiny)

určitě $V_{0\mathbb{R}} \subset V_{\mathbb{R}}$ podprostor, seminorma $p \to$ konvexní funkcionál na $V_{\mathbb{R}}$

$f_{0\mathbb{R}} := \mathrm{Re} \circ f_0 \qquad (\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R})$

$f_{0\mathbb{R}}$ je lin. funkcionál $V_{0\mathbb{R}}$

$\forall x \in V_{0\mathbb{R}},\ f_{0\mathbb{R}}(x) = \mathrm{Re}(f_0(x)) \le |f_0(x)| \le p(x)$

HB věta pro $\mathbb{R} \Rightarrow \exists f_{\mathbb{R}}$ lin. funkcionál na $V_{\mathbb{R}}$ tak, že

(1') $f_{\mathbb{R}}|_{V_{0\mathbb{R}}} = f_{0\mathbb{R}}$, tj. $\forall x \in V_{0\mathbb{R}},\ f(x) = \mathrm{Re}(f_0(x))$

$$\left.\begin{array}{l} (2')\ \forall x \in V_{\mathbb{R}},\ f_{\mathbb{R}}(x) \le p(x) \\ \hline \Rightarrow\ -f_{\mathbb{R}}(x) = f_{\mathbb{R}}(-x) \le p(-x) = p(x) \end{array}\right\} \Rightarrow |f_{\mathbb{R}}(x)| \le p(x)$$

Definujeme: $\forall x \in V,\ f(x) := f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix) \in \mathbb{C} \quad (i = \sqrt{-1},\ ix \in V)$

($V = V_{\mathbb{R}}$ jako množiny)

f je lin. funkcionál na V nad $\mathbb{C}$

určitě $\forall x, y \in V,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$

stačí ukázat, že $\forall x \in V,\ f(ix) = i f(x)$

skutečně $f(ix) = f_{\mathbb{R}}(ix) - i f_{\mathbb{R}}(-x) = i\left(f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix)\right) = i f(x)$

Platí: $f|_{V_0} = f_0$: $x \in V_0$ lib. $\Rightarrow ix \in V_0$

$$f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix) = f_{0\mathbb{R}}(x) - i f_{0\mathbb{R}}(ix)$$

$$= \mathrm{Re}(f_0(x)) - i\,\mathrm{Re}(\underbrace{f_0(ix)}_{i f_0(x)}) = \mathrm{Re}(f_0(x)) + i\,\mathrm{Im}(f_0(x)) = f_0(x)$$

Platí: $\forall x \in V,\ |f(x)| \le p(x)$: zvolíme $\alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1,\ \alpha f(x) \ge 0$

$|f(x)| = |\alpha f(x)| = \alpha f(x) = f(\alpha x) = \mathrm{Re}\, f(\alpha x) = f_{\mathbb{R}}(\alpha x) \le p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) = p(x)$

Metrické vektorové prostory

Definice. Metrika ϱ na vektor. prostoru V je invariantní, jestliže $\forall x, y, z \in V$, $\varrho(x,y) = \varrho(x+z, y+z)$.

Topolog. vektor. prostor je metrickým vektor. prostorem, jestliže topologie je určena invariantní metrikou.

Vektorové prostory se spočetně mnoha seminormami

Buďte V vektor. prostor (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$), $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{N}_0$, seminormy na V.
Nechť platí pro každé $x \in V$:

$$\forall p \in \mathbb{N}_0, \ \|x\|_p = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Topologie na V: $\quad B^{(p)}(x, r) = \{y \in V;\ \|x-y\|_p < r\}$, $x \in V, r > 0$

Pro $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ položíme

$$U(n, \varepsilon) = \bigcap_{p=0}^{n} B^{(p)}(0, \varepsilon) = \{x \in V;\ \|x\|_p < \varepsilon \text{ pro } p = 0, \dots, n\}$$

$$\mathbb{B} = \{x + U(n, \varepsilon);\ x \in V, n \in \mathbb{N}_0, \varepsilon > 0\}$$

je báze topologie τ

$(x_n) \subset V$, $x \in V$, $\quad x_n \to x$ vzhledem k τ

$$\iff \forall p \in \mathbb{N}_0, \ \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$$

Metrika: $\varrho : V \times V \to [0, +\infty)$

$$\forall x, y \in V, \ \varrho(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} \underbrace{\frac{\|x-y\|_p}{1 + \|x-y\|_p}}_{\leq 1} \quad \in [0, 2)$$

ϱ je metrika invariantní $\quad \varrho(x,y) = 0 \iff \forall p \in \mathbb{N}_0, \|x-y\|_p = 0$
$\iff x = y$

Δ nerovnost: CVIČENÍ

V vektor. prostor nad $T = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$\|\cdot\|_p, p \in \mathbb{N}_0,$

$\forall x \in V: \quad \forall p \in \mathbb{N}_0, \|x\|_p = 0 \implies x = 0 \quad (*)$

$\to$ topologie τ: $(x_n) \subset V, x \in V, \ x_n \to x$ ve $V \iff \forall p \in \mathbb{N}_0, \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$

$\forall x, y \in V, \ \rho(x,y) := \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} \frac{\|x-y\|_p}{1+\|x-y\|_p} \quad (**)$

Platí: Topologie určená $\rho = \tau$

Definice. Buď V vektor. prostor se spočetně mnoha seminormami $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{N}_0$, které splňují $(*)$. Tento prostor se nazývá Fréchetův, je-li metrický prostor (V, ρ), kde ρ je def. v $(**)$, úplný.

Příklady. (1) $C(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^o$, kde $\forall j \in \mathbb{N}$, K_j je kompaktní

např. $K_j = \overline{B(0,j)}$

$\forall j \in \mathbb{N}, \forall f \in C(\mathbb{R}^n), \ \|f\|_j := \max_{x \in K_j} |f(x)|$

$(f_n) \subset C(\mathbb{R}^n), f \in C(\mathbb{R}^n)$: $f_n \to f$ v $C(\mathbb{R}^n) \iff \forall j \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_j = 0$

$\iff \forall j \in \mathbb{N}, \ f_n \rightrightarrows f, n \to \infty$, na K_j

$\iff \forall K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt., $f_n \rightrightarrows f$ na K

topologie stejnoměrné konvergence na kompakt. podmnožinách

(2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ Schwartzův prostor

$f \in C^\infty(\mathbb{R}), p \in \mathbb{N}_0, \ \|f\|_p := \max_{0 \le k \le p} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|)^p \left| \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right| \in [0, +\infty]$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \overset{DEF}{\iff} \forall p \in \mathbb{N}_0, \ \|f\|_p < \infty$

Normované vektor. prostory, Banachovy prostory

Značení. X, Y vektor. prostory nad T

$\mathcal{L}(X,Y)$ vektor. prostor lin. zobrazení X do Y

$A, B \in \mathcal{L}(X,Y), \lambda \in T, \quad \forall x \in X, \ (A+B)x := Ax + Bx$

$(\lambda A)x := \lambda \cdot Ax$

Definice. X, Y normované vektor. prostory, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$

A je omezené $\overset{DEF}{\iff} \exists M \ge 0$ (omezující konst), $\forall x \in X, \ \|Ax\| \le M \|x\|$.

Značení. $\mathcal{B}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ podmnožina (podprostor) tvořená omezenými lin. zobrazeními

Definice. $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, $\|A\| := \sup_{x\in X,\, \|x\|\leq 1} \|Ax\|$

$\|A\|$ se nazývá norma lin. zobrazení A

Lemma. X, Y norm. vektor. prostory. Pro $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ platí

(1) $\|A\| = \min\{M \geq 0;\ \forall x \in X,\ \|Ax\| \leq M\|x\|\}$.

Je-li $X \neq \{0\}$, potom také

(2) $\|A\| = \sup_{x\in X,\, \|x\|=1} \|Ax\|$

(3) $\|A\| = \sup_{x\in X,\, x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Dk.: $X = \{0\} \Rightarrow A = 0$, $\|A\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\| = 0$, (1) zřejmě platí

Nechť $X \neq \{0\}$

$$\|A\| = \sup_{0<\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{0<\|x\|\leq 1} \|x\| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{0<\|x\|\leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{(3)}$$

$$\left(\lambda \neq 0,\ \frac{\|A(\lambda x)\|}{\|\lambda x\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0} \left\|A\left(\tfrac{1}{\|x\|}x\right)\right\| = \underbrace{\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|}_{(2)} \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \|A\|$$

$\Rightarrow$ platí (2), (3)

(1): $\|A\| = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \forall x \in X,\ x \neq 0,\ \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$

$\Rightarrow \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$

$\Rightarrow \|A\| \geq \underset{(\inf)}{\min}\{M \geq 0;\ \forall x \in X,\ \|Ax\| \leq M\|x\|\} =: M_0$

$M \geq 0,\ \forall x \in X,\ \|Ax\| \leq M\|x\| \Rightarrow \forall x \neq 0,\ \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M \Rightarrow \|A\| \leq M$

tedy $\|A\| = M_0$

Pozn. $\forall x \in X,\ \|Ax\| \leq \underbrace{\|A\|}_{\text{optimální}} \|x\|$

Věta. Buď X, Y normované prostory. Potom $\mathcal{B}(X,Y)$ je normovaný vektor. prostor.

Důkaz. (I) $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$

$\forall x \in X, \quad \|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\|\,\|x\| + \|B\|\,\|x\|$
$= (\|A\| + \|B\|)\,\|x\|$

odtud $A+B \in \mathcal{B}(X,Y), \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(II) $\lambda \in T, \; A \in \mathcal{B}(X,Y)$

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|(\lambda A)x\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} |\lambda| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda|\,\|A\|$$

odtud $\lambda A \in \mathcal{B}(X,Y), \quad \|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$

(III) určitě $A \in \mathcal{B}(X,Y), \quad A = 0 \Rightarrow \|A\| = 0$

naopak, $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall x \in X, x \neq 0, \; \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$

$\Rightarrow \forall x \in X, \quad \|Ax\| = 0$

$\Rightarrow \forall x \in X, \quad Ax = 0$, tj. $A = 0$

Věta. Buďte X, Y normované vektor. prostory, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.
Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) A je omezené

(2) A je spojité

(3) $\exists x_0 \in X$, A je spojité v x_0

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2): $(x_n) \subset X, \; x_n \to x \in X$ lib. konvergent. posl.

$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq \|A\|\,\|x_n - x\| \to 0, \; n \to \infty$

tj. $Ax_n \to Ax \in Y$; tedy A je spojité

(2) $\Rightarrow$ (3) (A spojité $\Leftrightarrow \forall x \in X$, A je spojité v x) zřejmé

(3) $\Rightarrow$ (1) předp. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon)$

zvolíme $\varepsilon > 0$ pevně $\to \delta$

$\forall x \in X \setminus \{0\}, \; \forall \lambda \in (0, \delta), \; \dfrac{\lambda}{\|x\|}\|Ax\| = \|A(x_0 + \frac{\lambda}{\|x\|}x) - Ax_0\| < \varepsilon$

$\|Ax\| < \dfrac{\|x\|}{\lambda}\varepsilon,$

$\lambda \uparrow \delta: \; \forall x \in X, x \neq 0, \quad \|Ax\| \leq \dfrac{\varepsilon}{\delta}\|x\|$, platí i pro $x = 0$

tedy A je omezené, $\|A\| \leq \dfrac{\varepsilon}{\delta}$

Věta. X, Y, Z norm. vektor. prostory. Pro $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$ platí $BA \in \mathcal{B}(X,Z)$, $\|BA\| \le \|B\|\|A\|$.

Speciálně (pro $Y=X$) $\mathcal{B}(X)$ je (asociativní) algebra, normovaná, s jednotkovým prvkem $I \in \mathcal{B}(X)$, $\|I\|=1$.

Důkaz. Pro $x \in X$, $\|BAx\| = \|B(Ax)\| \le \|B\|\|Ax\| \le \underbrace{\|B\|\|A\|}\|x\|$

$$\Rightarrow \|BA\| \le \|B\|\|A\|$$

Pozn. $A \in \mathcal{B}(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\| \le \|A\|^n$

$$n=0, \quad A^0 := I, \quad 1=1$$

Definice. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ na vektor. prostoru X jsou ekvivalentní, jestliže existují $0 < A \le B$ tak, že

$$\forall x \in X, \quad A\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le B\|x\|_2$$

$$\left[\frac{1}{B}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \frac{1}{A}\|x\|_1 \right]$$

Věta. Dvě normy na vektor. prostoru X jsou ekvivalentní, právě když na X určují tutéž topologii.

Důkaz. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ na X $\longrightarrow \tau_1, \tau_2$

$$X_1 = (X, \|\cdot\|_1), \quad X_2 = (X, \|\cdot\|_2); \quad J: X_1 \to X_2 : x \longmapsto x$$

$$J \text{ je spojité} \iff J \text{ je omezené}$$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$\forall G \in \tau_2$, $J^{-1}(G) = G \in \tau_1$ $\quad\Big|\quad$ $\exists A>0, \forall x \in X, \ \|Jx\|_2 = \|x\|_2 \le \frac{1}{A}\|x\|_1$

tj. $\tau_2 \subset \tau_1$

$$\text{tedy} \quad \tau_2 \subset \tau_1 \iff \exists A>0, \forall x \in X, \ \|x\|_2 \le \frac{1}{A}\|x\|_1$$

zaměníme J za $J^{-1}: X_2 \to X_1$

$$\tau_1 \subset \tau_2 \iff \exists B>0, \forall x \in X, \ \|x\|_1 \le B\|x\|_2$$

stejně tak $\tau_1 = \tau_2 \iff \exists A,B>0, \forall x \in X, \ A\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le B\|x\|_2$

Věta. Každé dvě normy na konečnorozměrném vektorovém prostoru jsou ekvivalentní.

Důkaz. V vektor. prostor pro určitost nad $\mathbb{R}$

$V = \{0\}$ triv., nechť $V \neq \{0\}$, $\dim V = n \in \mathbb{N}$

Zvolíme bázi $(x_1, \dots, x_n)$ ve V

$\forall x \in V,\ x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n,\ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

jednoznač.

$\|x\|_1 := |\xi_1| + \dots + |\xi_n|$; $\|\cdot\|_1$ je norma na V, samostatně

$\|\cdot\|$ lib. další norma na V

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$

$$\|x\| \leq |\xi_1|\,\|x_1\| + \dots + |\xi_n|\,\|x_n\| \leq B\,(|\xi_1| + \dots + |\xi_n|) = B\,\|x\|_1$$

kde $B := \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\}$

$K := \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ |\xi_1| + \dots + |\xi_n| = 1\}$, K je kompaktní

(omezená, uzavřená)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\xi) := \|\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n\|$ je spojité

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ spojité

$\mathbb{R}^n \to V : \xi \mapsto \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$ je spojité $(V, \|\cdot\|)$

nebo $|f(\xi) - f(\eta)| \leq B\,(|\xi_1 - \eta_1| + \dots + |\xi_n - \eta_n|)$

$$\Rightarrow \exists\ m := \min_{\xi \in K} f(\xi) > 0$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$ lib., $c := |\xi_1| + \dots + |\xi_n| = \|\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n\|_1$

$$\tfrac{1}{c}\xi \in K,\quad \underbrace{f\left(\tfrac{1}{c}\xi\right)}_{=\ \frac{1}{c} f(\xi)\ =\ \frac{1}{c}\|\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n\|} \geq m$$

$$\frac{1}{c} f(\xi) = \frac{1}{c}\,\|\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n\| \geq m$$

tedy $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n\| \geq m\,\|\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n\|_1$

Důsledek 1. Každý konečnorozměrný normovaný vektor. prostor je úplný.

Důkaz. $\mathbb{R}^n$ s euklid. normou je úplný, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ s jakoukoliv normou je úplný

$(V, \|\cdot\|)$ nad $\mathbb{R}$, $V \cong \mathbb{R}^n$ (izomorfní)

$\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$ jako norm. prostor

Důsledek 2. X normovaný vektor. prostor, $V \subset X$ podprostor

$$\dim V < \infty \Rightarrow \overline{V} = V$$

Důkaz. $(x_n) \subset V$, $x_n \to x$ v X, pak (x_n) je cauchy, V je úplný

$\Rightarrow (x_n)$ konverguje ve $V \Rightarrow x \in V \Rightarrow \overline{V} = V$

Definice. X, Y normované vektor. prostory, $V \subset X$ podprostor

$A \in \mathcal{B}(V, Y)$, $B \in \mathcal{B}(X, Y)$

Nechť $\forall x \in V$, $Ax = Bx$. Potom

B je rozšířením (prodloužením) A, A je zúžením B : $A = B|_V$

Platí $\|A\| \leq \|B\|$:

$$\|A\| = \sup_{x \in V, \|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \in V, \|x\| \leq 1} \|Bx\| \leq \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Bx\| = \|B\|$$

Připomenutí. $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ jsou úplné norm. vektor. prostor, 1-1

$\dim = 1$ nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$

Značení. X norm. vektor. prostor. Pokládáme $X^* := \mathcal{B}(X, T)$

X^* je duální prostor k X. $\underbrace{f \in X^*, \ \|f\| := \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}}$ ($T = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$)

Věta (Hahn-Banach)

Buďte X norm. vektor. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $X_0 \subset X$ podprostor a $f_0 \in X_0^*$.

Potom existuje $f \in X^*$ takový, že

(1) $f|_{X_0} = f_0$ $\quad (\Rightarrow \|f\| \geq \|f_0\|)$

(2) $\|f\| = \|f_0\|$

Důkaz. $\forall x \in X$, $p(x) := \|f_0\| \|x\|$; $\quad T = \mathbb{R}$ $\quad p$ je konvexní funkcionál

(ale $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$!)

$T = \mathbb{C}$ $\quad p$ je seminorma

Platí $\forall x \in X_0$, $|f_0(x)| \leq \|f_0\| \|x\| = p(x)$

HB věta pro $\mathbb{R}, \mathbb{C} \Rightarrow \exists f$ lin. funkcionál na X, $f|_{X_0} = f_0$

$T = \mathbb{R}$: $\forall x \in X$, $f(x) \leq p(x) \Rightarrow -f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x) \Rightarrow |f(x)| \leq p(x)$

$T = \mathbb{C}$: $\forall x \in X$, $|f(x)| \leq p(x)$

Tedy $\forall x \in X$, $|f(x)| \leq \|f_0\| \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq \|f_0\| \Rightarrow \|f\| = \|f_0\|$

Věta. Buďte X norm. vektor. prostor, $x, y \in X$. Potom

$$x \neq y \Rightarrow \exists f \in X^*, \ f(x) \neq f(y).$$

Navíc f lze volit tak, že $f(x-y) = \|x-y\|$, $\|f\| = 1$.

Důkaz. $X_0 := T z$, kde $z = x - y \neq 0$, $T = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$; $\dim X_0 = 1$

$f_0 \in X_0^*$, $\forall \lambda \in T$, $f_0(\lambda z) := \lambda \|z\|$

$$\|f_0\| = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|f_0(\lambda z)|}{\|\lambda z\|} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\cancel{|\lambda|} |f_0(z)|}{\cancel{|\lambda|} \|z\|} = \sup_{\lambda \neq 0} 1 = 1$$

HB $\Rightarrow \exists f \in X^*$, $f(z) = f(x-y) = f(x) - f(y) = f_0(z) = \|z\| = \|x-y\| \neq 0$

Definice. Úplné normované vektor. prostory nazýváme Banachovými prostory.

Věta. Buďte $\mathcal{X}$ Banachův prostor, $x_k \in \mathcal{X}$, $k \in \mathbb{N}$.
Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, potom $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje v $\mathcal{X}$.

Důkaz. $n \in \mathbb{N}$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k \in \mathcal{X}$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \ m \leq n, \ \|s_n - s_m\| = \Big\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\Big\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\|$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \ \|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\infty} \|x_k\| \xrightarrow[m,n \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow (s_n) \subset \mathcal{X}$ je cauchy $\Rightarrow$ existuje $\lim_{n \to \infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \mathcal{X}$

Věta (o spojitém rozšíření).
Buďte X norm. vektor. prostor, $V \subset X$, $\mathcal{Y}$ Banachův prostor, $A \in \mathcal{B}(V, \mathcal{Y})$.
Jestliže $\overline{V} = X$, potom existuje právě jedno $\hat{A} \in \mathcal{B}(X, \mathcal{Y})$, které je prodloužením A. Přitom platí $\|\hat{A}\| = \|A\|$.

Důkaz. (I) jednoznačnost $\Leftarrow$ lemma 1.11.16

(II) Existence: $x \in X$ lib. $\Rightarrow \exists (x_n) \subset V$, $x_n \to x$ v X

$\Rightarrow (x_n)$ je cauchy; $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\|$
$\leq \|A\| \|x_n - x_m\|$

$\Rightarrow (Ax_n) \subset \mathcal{Y}$ je cauchy $\Rightarrow \exists \lim Ax_n \in \mathcal{Y}$

Platí: $\lim Ax_n$ závisí pouze na $x \in X$ a nezávisí na volbě $(x_n) \subset V$

nechť $(\tilde{x}_n) \subset V$, $\tilde{x}_n \to x$ v X $\Rightarrow$

$$\|A\tilde{x}_n - Ax_n\| = \|A(\tilde{x}_n - x_n)\| \leq \|A\| \|\tilde{x}_n - x_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow \lim A\tilde{x}_n = \lim Ax_n$$

Definujeme $\forall x \in X$, $\hat{A}x := \lim Ax_n \in Y$, kde $(x_n) \subset V$, $x_n \to x$ v X

Vlastnosti $\hat{A}$: $\forall x \in V$, volíme $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n := x$ ($x_n \to x$ v X)

$$\hat{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Ax = Ax$$

(III) $\|\hat{A}\| = ?$, určitě $\|\hat{A}\| \geq \|A\|$

$$x \in X,\ (x_n) \subset V,\ x_n \to x \text{ v } X \quad \Rightarrow \quad \lim \|x_n\| = \|x\|$$

$$\hat{A}x := \lim Ax_n \quad \Rightarrow \|\hat{A}x\| = \lim \underbrace{\|Ax_n\|}_{\leq \|A\|\,\|x_n\|} \leq \lim \|A\|\,\|x_n\| = \|A\|\,\|x\|$$

$$\Rightarrow \hat{A} \in \mathcal{B}(X,Y),\ \|\hat{A}\| \leq \|A\|, \text{ a tedy } \|\hat{A}\| = \|A\|$$

Věta. Buď X normovaný vektor. prostor. Potom existuje Banachův prostor $\hat{X}$ takový, že X je jeho hustým podprostorem. Zúplnění $\hat{X}$ je určeno jednoznačně až na izometrický izomorfismus, který na X působí jako identita.

Důkaz ∅

Věta. Buďte X normovaný vektor. prostor, Y Banachův prostor. Potom $\mathcal{B}(X,Y)$ je Banachův prostor.

Pozn. buď $\mathcal{X}$ zúplnění prostoru X

$$\mathcal{B}(\mathcal{X},Y) \to \mathcal{B}(X,Y) : A \mapsto A|_X$$

věta o prodloužení $\Rightarrow$ je izometrický izomorfismus

Důsledek 1. X - normovaný vektor. prostor, $T = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$$X^* = \mathcal{B}(X,T) \text{ je Banachův pr.}$$

Důsledek 2. $\mathcal{X}$ - Banachův pr. $\Rightarrow$ $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ je Banachův pr.

Hilbertovy prostory

Značení V vektor. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ (pro určitost $\mathbb{C}$)

skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$\forall x, y, z \in V, \forall \alpha \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R}),\quad \langle x, \alpha y + z\rangle = \alpha \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

Schwarzova nerovnost $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitární prostor

Poznámka. $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$ je spojité zobraz.

$(x_n), (y_n) \subset V,\quad x_n \to x \in V,\ y_n \to y \in V \Rightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq ?$, $(\|x_n\|), (\|y_n\|)$ omezené, samostatně

Definice. Úplné unitární prostory nazýváme Hilbertovy prostory.

Věta. Buď $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitární prostor. Potom existuje Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ tak, že $V \subset \mathcal{H}$ je hustý podprostor. $\mathcal{H}$ je určen jednoznačně až na unitární zobrazení, které je identické na V.

Úmluva. $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ ... značí Hilbertův prostor nad $\mathbb{C}$.

Značení · * $x, y \in \mathcal{H}$, $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$

* $M \subset \mathcal{H}$ podmnožina, ortogonální doplněk $M^\perp = \{x \in \mathcal{H};\ \forall y \in M, x \perp y\}$

Platí: $M^\perp = \underbrace{\mathrm{Span}(M)}_{\text{lineární obal}}{}^\perp = (\overline{M})^\perp$ (samostatně)

ze spojitosti $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $M^\perp \subset \mathcal{H}$ podprostor

* $M, N \subset \mathcal{H}$ podmn., $M \perp N \overset{DEF}{\Leftrightarrow} \forall x \in M, \forall y \in N, x \perp y$

$\Leftrightarrow M \subset N^\perp \Leftrightarrow N \subset M^\perp$

* $U, V \subset \mathcal{H}$ podprostory, $\mathcal{H} = U \oplus V$ znamená, že $\mathcal{H} = U + V$, $U \perp V$

ortogonální součet $\Rightarrow$ direktní

$U \perp V \Rightarrow U \cap V = \{0\}$

* $(M^\perp)^\perp =: M^{\perp\perp}$

Vlastnosti $\mathcal{H}$ (samostatně nebo cvičení)

(1) $\emptyset \neq M \subset \mathcal{H}$, $M^\perp \subset \mathcal{H}$ je uzavřený podpr. (ze spojitosti $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

(2) $\emptyset \neq M \subset N \subset \mathcal{H}$, $N^\perp \subset M^\perp$

(3) $V \subset \mathcal{H}$ podprostor, $\overline{V} \subset V^{\perp\perp}$; platí rovnost – později

(4) $x, y \in \mathcal{H}$, $\underbrace{\|x+y\|^2}_{\langle x+y, x+y\rangle} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$

(5) $x, y \in \mathcal{H}$, $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Pythagorova věta)

lze zobecnit na konečný součet

(6) $\forall x, y \in \mathcal{H}$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (rovnoběžníková identita)

- Věta. Buď $\emptyset \neq M \subset \mathcal{H}$ konvexní, uzavřená podmn.
Potom v M existuje právě jeden vektor s nejmenší normou.

Důkaz. (I) existence

$$m := \inf\{\|x\| ; x \in M\} =: \operatorname{dist}(0, M)$$

$\exists (x_j) \subset M$, $\lim_{j\to\infty} \|x_j\| = m$

$$\frac{1}{4}\|x_j - x_k\|^2 = \frac{1}{2}\|x_j\|^2 + \frac{1}{2}\|x_k\|^2 - \|\underbrace{\tfrac{1}{2}(x_j + x_k)}_{\in M}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x_j\|^2 + \frac{1}{2}\|x_k\|^2 - m^2$$

$$\xrightarrow[j,k\to\infty]{} \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m^2 - m^2 = 0$$

$\Rightarrow (x_j)$ je cauchy $\Rightarrow \exists \lim_{j\to\infty} x_j = x \in \mathcal{H}$, $\overline{M} = M \Rightarrow x \in M$

$\|x\| = \lim \|x_j\| = m$, tedy inf = min

(II) jednoznačnost

nechť $x, \tilde{x} \in M$, $\|x\| = \|\tilde{x}\| = m := \inf_{z\in M} \|z\|$

$$\frac{1}{4}\|x - \tilde{x}\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|\tilde{x}\|^2 - \frac{1}{4}\|x + \tilde{x}\|^2 = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m^2 - \|\underbrace{\tfrac{1}{2}(x+\tilde{x})}_{\in M}\|^2 \leq m^2 - m^2 = 0$$

$\Rightarrow \|x - \tilde{x}\| = 0$, tj. $x = \tilde{x}$

Věta (o ortogonální projekci). Buď $V \subset \mathcal{H}$ uzavřený podprostor.
Potom $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$.
Označme P projekce na V podle $V^\perp$. Potom $\forall x \in \mathcal{H}$ platí

(1) Px je jediný vektor z V takový, že $(x - Px) \perp V$

(2) Px je jediný vektor z V takový, že

$$\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, V) := \inf\{\|x - v\| ; v \in V\}$$

Def. Projekce P se nazývá OG projekce na V.

Důkaz. Ukážeme, že $\mathcal{H} = V + V^\perp$ ($\Rightarrow \mathcal{H} = V \oplus V^\perp \Rightarrow$ direktní)

$x \in \mathcal{H}$ lib., $M := x + V$, předchozí věta:

$\exists_1\, w \in M = x + V$, $\|w\| = \inf_{z\in x+V} \|z\| \underset{(V=-V)}{=} \inf_{v\in V} \|x - v\| = \operatorname{dist}(x, V)$.

Položíme $z := x - w$ $(w = x - z)$, $w - x = -z \in V \Rightarrow z \in V$

$z \in V$, $\|x-z\| = \text{dist}(x,V)$

$u \in V$ lib., $\forall t>0$, $\|x-z\|^2 \leq \|x - \underbrace{(z+tu)}_{\in V}\|^2 = \|x-z\|^2 + t^2\|u\|^2 - 2t\,\text{Re}\langle x-z, u\rangle$

$(x-z) - tu$

$$\forall t>0,\ \text{Re}\langle x-z,u\rangle \leq \frac{t}{2}\|u\| \underset{(t\to 0+)}{\Longrightarrow} \text{Re}\langle x-z,u\rangle \leq 0$$

$u \to -u$, $\Rightarrow \text{Re}\langle x-z,u\rangle \geq 0$, tedy $\text{Re}\langle x-z,u\rangle = 0$

(nad $\mathbb{C}$) $u \to iu$ $\Rightarrow \text{Im}\langle x-z,u\rangle = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$i=\sqrt{-1}$

$\forall u \in V, \langle x-z,u\rangle = 0$, tj. $x-z \in V^\perp$

$x = z + (x-z) \in V + V^\perp$

(1) plyne z definice projekce P

(2) ukázali jsme $\|x-Px\| = \text{dist}(x,V)$

dále $z\in V$, $\|x-z\| = \text{dist}(x,V) \Rightarrow x-z \in V^\perp \Rightarrow z = Px$ (jednoznačnost)

<u>Důsledek 1</u>. Buď $V \subset \mathcal{H}$ podprostor, ne nutně uzavřený. Potom $V^{\perp\perp} = \overline{V}$.

<u>Důkaz</u>. $(\overline{V})^\perp = V^\perp$, $\mathcal{H} = \overline{V} \oplus V^\perp$

<u>Obecně platí</u>: $V_1, V_2 \subset \mathcal{H}$ podprostory, $\mathcal{H} = V_1 \oplus V_2$

$\Rightarrow V_1 = V_2^\perp$, $V_2 = V_1^\perp$

<u>Skutečně</u>: $V_1 \subset V_2^\perp$, naopak $x \in V_2^\perp \Rightarrow x = x_1 + x_2 \in V_1 + V_2$

$\Rightarrow x - x_1 = x_2 \in V_2^\perp \cap V_2 = \{0\} \Rightarrow x = x_1 \in V_1$, tj. $V_2^\perp \subset V_1$

<u>Důsledek 2</u>. Buď $V \subset \mathcal{H}$ podprostor. Potom $\overline{V} = \mathcal{H} \Leftrightarrow V^\perp = \{0\}$.

<u>Důkaz</u>. $\mathcal{H} = \overline{V} \oplus V^\perp$

<u>Důsledek 3</u>. Buďte $n \in \mathbb{N}$, $\{u_j;\ 1\leq j\leq n\}$ ON soubor v $\mathcal{H}$.

Položme $V := \text{span}\{u_j;\ 1\leq j \leq n\}$ [$\Rightarrow \dim V = n$, V je uzavřený]

Buď P OG projekce na V. Potom

(1) $\forall x \in \mathcal{H}$, $Px = \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, x\rangle u_j$

(2) $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n$, $\|x - \sum_{j=1}^n \langle u_j,x\rangle u_j\| \leq \|x - \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j\|$.

<u>Důkaz</u> CVIČENÍ

Věta (Besselova nerovnost). Buď A ON podmnožina v $\mathcal{H}$. Potom

$$\forall x \in \mathcal{H}, \sum_{u \in A} |\langle u, x\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Důkaz. $\sum_{u \in A} \ldots = \sup_{\substack{B \subset A \\ |B|<\infty}} \sum_{u \in B} \ldots$

$B \subset A$, $|B| < \infty$ lib., $B = \{u_j ; 1 \le j \le n\}$, $n \in \mathbb{N}$

$P :=$ OG projekce na span B

$$\forall x \in \mathcal{H}, \|x\|^2 = \|Px + (x-Px)\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \ge \|Px\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{n} \langle u_j, x\rangle u_j\right\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\langle u_j, x\rangle|^2$$

$$\forall B \subset A, |B| < \infty, \quad \sum_{u \in B} |\langle u, x\rangle|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \sum_{u \in A} |\langle u, x\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

Definice. Maximální ON podmnožiny v $\mathcal{H}$ nazýváme ON báze v $\mathcal{H}$.

Pozn. $U \subset \mathcal{H}$ ON podmn., U je maximální $\Leftrightarrow U^\perp = \{0\}$

Věta. V libovolném Hilbertově prostoru je existuje ON báze a všechny ON báze v $\mathcal{H}$ mají stejnou mohutnost (kardinalitu).

Každá ON podmnožina v $\mathcal{H}$ je obsažena v nějaké ON bázi.

Důkaz. $\emptyset$

Věta. Buď $U \subset \mathcal{H}$ ON podmnožina. Potom následující výroky jsou ekvivalentní

(1) U je ON báze

(2) span U je hustý v $\mathcal{H}$ (U je totální množina)

(3) $\forall x \in \mathcal{H}, \sum_{u \in U} |\langle u, x\rangle|^2 = \|x\|^2$ (Parsevalova rovnost)

Důkaz. (1) $\Leftrightarrow$ (2) :

$$(1) \Leftrightarrow U^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{span}(U)^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\operatorname{span} U} = \mathcal{H} \Leftrightarrow (2)$$

(2) $\Rightarrow$ (3) :

víme $\forall x \in \mathcal{H}$, $\sum_{u \in U} |\langle u, x\rangle|^2 \le \|x\|^2$; $x \in \mathcal{H}$ lib.

$\varepsilon > 0$ libovolné, $\exists n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}, u_1, \ldots, u_n \in U, \|x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j\| < \varepsilon$

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle u_j, x\rangle|^2 + \left\|x - \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, x\rangle u_j\right\|^2 \le \sum_{j=1}^{n} |\langle u_j, x\rangle|^2 + \left\|x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j\right\|^2$$

$$\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |\langle u_j, x\rangle|^2 + \varepsilon^2 ; \quad \|x\|^2 - \varepsilon^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |\langle u_j, x\rangle|^2 \leq \sum_{u \in U} |\langle u, x\rangle|^2$$

$$\varepsilon \to 0+ \quad \Rightarrow \quad \|x\|^2 \leq \sum_{u \in U} |\langle u, x\rangle|^2$$

(3) $\Rightarrow$ (1):

$$x \in U^\perp \overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad \|x\|^2 = \sum_{u \in U} |\underbrace{\langle u, x\rangle}_{=0}|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \text{ tj. } U^\perp = \{0\}$$