

Důsledek 1. Každý konečnorozměrný normovaný vektor. prostor je úplný.

Důkaz. $\mathbb{R}^n$ s euklid. normou je úplný, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ s jakoukoliv normou je úplný

$(V, \|\cdot\|)$ nad $\mathbb{R}$, $V \cong \mathbb{R}^n$ (izomorfní)

$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ jako norm. prostor

Důsledek 2. X normovaný vektor. prostor, $V \subset X$ podprostor

$$\dim V < \infty \Rightarrow \bar{V} = V$$

Důkaz. $(x_n) \subset V$, $x_n \rightarrow x$ v X , pak (x_n) je Cauchy, V je úplný

$$\Rightarrow (x_n) \text{ konverguje v } V \Rightarrow x \in V \Rightarrow \bar{V} = V$$

Definice. X, Y normované vektor. prostory, $V \subset X$ podprostor

$$A \in \mathcal{B}(V, Y), B \in \mathcal{B}(X, Y)$$

Nechť $\forall x \in V, Ax = Bx$. Pak

B je rozšířením (prodloužením) A , A je zúžením B : $A = B|_V$

Platí $\|A\| \leq \|B\|$:

$$\|A\| = \sup_{x \in V, \|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \in V, \|x\| \leq 1} \|Bx\| \leq \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Bx\| = \|B\|$$

Přípustnost. $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ jsou úplné norm. vektor. prostory, 1-1
 $\dim = 1$ nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$

Značení. X norm. vektor. prostor. Položíme $X^* := \mathcal{B}(X, T)$

X^* je duální prostor k X , $f \in X^*$, $\|f\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ ($T = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$)

Věta (Hahn-Banach)

Buďte X norm. vektor. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $X_0 \subset X$ podprostor a $f_0 \in X_0^*$.

Pak existuje $f \in X^*$ takový, že

$$(1) f|_{X_0} = f_0 \quad (\Rightarrow \|f\| \geq \|f_0\|)$$

$$(2) \|f\| = \|f_0\|$$

Důkaz. $\forall x \in X$, $p(x) := \|f_0\| \|x\|$; $T = \mathbb{R}$ je konvexní funkcionál
(ale $\forall \lambda \in \mathbb{R}, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$!)

$T = \mathbb{C}$ p je seminorma

Platí $\forall x \in X_0, |f_0(x)| \leq \|f_0\| \|x\| = p(x)$

HB věta pro $\mathbb{R}, \mathbb{C} \Rightarrow \exists f$ lin. funkcionál na X , $f|_{X_0} = f_0$

$$T = \mathbb{R}: \forall x \in X, f(x) \leq p(x) \Rightarrow -f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x) \Rightarrow |f(x)| \leq p(x)$$

$$T = \mathbb{C}: \forall x \in X, |f(x)| \leq p(x)$$

$$\text{Tedy } \forall x \in X, |f(x)| \leq \|f_0\| \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq \|f_0\| \Rightarrow \|f\| = \|f_0\|$$