

Věta. Budte  $X$  norm. vektor. prostor,  $x, y \in X$ . Potom

$$x \neq y \Rightarrow \exists f \in X^*, f(x) \neq f(y).$$

Navíc  $f$  lze volit tak, že  $f(x-y) = \|x-y\|$ ,  $\|f\| = 1$ .

Důkaz.  $X_0 := Tz$ , kde  $z = x-y \neq 0$ ,  $T = \mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ ;  $\dim X_0 = 1$

$$f_0 \in X_0^*, \forall \lambda \in T, f_0(\lambda z) := \lambda \|z\|$$

$$\|f_0\| = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|f_0(\lambda z)|}{\|\lambda z\|} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|\lambda| |f_0(z)|}{|\lambda| \|z\|} = \sup_{\lambda \neq 0} 1 = 1$$

$$HB \Rightarrow \exists f \in X^*, f(z) = f(x-y) = f(x) - f(y) = f_0(z) = \|z\| = \|x-y\| \neq 0$$

Definice. Úplně normované vektor. prostory nazýváme Banachovými prostory.

Věta. Budte  $X$  Banachův prostor,  $x_k \in X$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Jestliže  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ , potom  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  konverguje v  $X$ .

Důkaz.  $m \in \mathbb{N}$ ,  $S_m := \sum_{k=1}^m x_k \in X$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n, \|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\|$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \|S_m - S_n\| \leq \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\infty} \|x_k\| \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow (S_m) \subset X \text{ je Cauchy} \Rightarrow \text{existuje limit } S_m =: \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in X$$

Věta (o spojitém rozšíření).

Budte  $X$  norm. vektor. prostor,  $V \subset X$ ,  $Y$  Banachův prostor,  $A \in B(V, Y)$ .

Jestliže  $\overline{V} = X$ , potom existuje právě jedno  $\hat{A} \in B(X, Y)$ , které je prodloužením  $A$ . Přitom platí  $\|\hat{A}\| = \|A\|$ .

Důkaz. (I) jednoznačnost  $\Leftarrow$  lemma 1.11.16

(II) Existence:  $x \in X$  lib.  $\Rightarrow \exists (x_n) \subset V$ ,  $x_n \rightarrow x$  v  $X$

$$\Rightarrow (x_n) \text{ je Cauchy; } \forall m, n \in \mathbb{N}, \|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq \|A\| \|x_n - x_m\|$$

$$\Rightarrow (Ax_n) \subset Y \text{ je Cauchy} \Rightarrow \exists \lim Ax_n \in Y$$

Platí:  $\lim Ax_n$  závisí pouze na  $x \in X$  a nezávisí na volbě  $(x_n) \subset V$

necht  $(\tilde{x}_n) \subset V$ ,  $\tilde{x}_n \rightarrow x$  v  $X$   $\Rightarrow$

$$\|A\tilde{x}_n - Ax_n\| = \|A(\tilde{x}_n - x_n)\| \leq \|A\| \|\tilde{x}_n - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim A\tilde{x}_n = \lim Ax_n$$