# Hilbertovy prostory

Značení. $V$ vektor. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ (pro určitost $\mathbb{C}$)

skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$\forall x, y, z \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R}), \quad \langle x, \alpha y + z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

Schwarzova nerovnost $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitární prostor

Poznámka. $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$ je spojité zobraz.

$(x_n), (y_n) \subset V, \quad x_n \to x \in V, \ y_n \to y \in V \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq ?$, $(\|x_n\|), (\|y_n\|)$ omezené, samostatně

Definice. Úplné unitární prostory nazýváme Hilbertovy prostory.

Věta. Buď $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitární prostor. Potom existuje Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ tak, že $V \subset \mathcal{H}$ je hustý podprostor. $\mathcal{H}$ je určen jednoznačně až na unitární zobrazení, které je identické na $V$.

Úmluva. $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ ... značí Hilbertův prostor nad $\mathbb{C}$.

Značení. * $x, y \in \mathcal{H}, \quad x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

* $M \subset \mathcal{H}$ podmnožina, ortogonální doplněk $M^\perp = \{x \in \mathcal{H};\ \forall y \in M,\ x \perp y\}$

Platí: $M^\perp = \underbrace{\mathrm{Span}(M)}_{\text{lineární obal}}{}^\perp = (\overline{M})^\perp$ (samostatně)

ze spojitosti $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $M^\perp \subset \mathcal{H}$ podprostor

* $M, N \subset \mathcal{H}$ podmn., $M \perp N \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \forall x \in M,\ \forall y \in N,\ x \perp y$

$\Leftrightarrow M \subset N^\perp \Leftrightarrow N \subset M^\perp$

* $U, V \subset \mathcal{H}$ podprostory, $\mathcal{H} = U \oplus V$ znamená, že $\mathcal{H} = U + V$, $U \perp V$

ortogonální součet $\Rightarrow$ direktní

$U \perp V \Rightarrow U \cap V = \{0\}$

* $(M^\perp)^\perp =: M^{\perp\perp}$

Vlastnosti $\mathcal{H}$ (samostatně nebo cvičení)

(1) $\emptyset \neq M \subset \mathcal{H}$, $M^\perp \subset \mathcal{H}$ je uzavřený podpr. (ze spojitosti $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

(2) $\emptyset \neq M \subset N \subset \mathcal{H}$, $N^\perp \subset M^\perp$

(3) $V \subset \mathcal{H}$ podprostor, $\overline{V} \subset V^{\perp\perp}$ ; platí rovnost – později

(4) $x, y \in \mathcal{H}$, $\underbrace{\|x+y\|^2}_{\langle x+y, x+y \rangle} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y \rangle$