

$$(5) x, y \in H, x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ (Pythagorova věta)}$$

lze zobecnit na konečný součet

$$(6) \forall x, y \in H, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \text{ (parallelogramová identita)}$$

Věta. Buď $\emptyset \neq M \subset H$ konvexní, uzavřená podmnožina.

Potom v H existuje právě jeden vektor s nejmenší normou.

Důkaz. (I) existence

$$m := \inf \{ \|x\|; x \in M \} =: \text{dist}(0, M)$$

$$\exists (x_j) \subset M, \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_j\| = m$$

$$\frac{1}{4} \|x_j - x_k\|^2 = \frac{1}{2} \|x_j\|^2 + \frac{1}{2} \|x_k\|^2 - \underbrace{\left\| \frac{1}{2}(x_j + x_k) \right\|^2}_{\in M} \leq \frac{1}{2} \|x_j\|^2 + \frac{1}{2} \|x_k\|^2 - m^2$$

$$\xrightarrow{j, k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} m^2 - m^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x_j) \text{ je Cauchy} \Rightarrow \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x \in H, \overline{M} = M \Rightarrow x \in M$$

$$\|x\| = \lim \|x_j\| = m, \text{ tedy } \inf = \min$$

(II) jednoznačnost

$$\text{měj } x, \tilde{x} \in M, \|x\| = \|\tilde{x}\| = m := \inf_{z \in M} \|z\|$$

$$\frac{1}{4} \|x - \tilde{x}\|^2 = \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{x}\|^2 - \underbrace{\left\| \frac{1}{2}(x + \tilde{x}) \right\|^2}_{\in M} \leq m^2 + m^2 - m^2 = m^2 \Rightarrow \|x - \tilde{x}\| = 0, \text{ tj. } x = \tilde{x}$$

Věta (o ortogonální projekci). Buď $V \subset H$ uzavřený podprostor.

Potom $H = V \oplus V^\perp$.

Označme P projekce na V podle $V^\perp$. Potom $\forall x \in H$ platí

(1) Px je jediný vektor z V takový, že $(x - Px) \perp V$

(2) Px je jediný vektor z V takový, že

$$\|x - Px\| = \text{dist}(x, V) := \inf \{ \|x - v\|; v \in V \}$$

Def. Projekce P se nazývá OG projekce na V .

Důkaz. Ukážeme, že $H = V + V^\perp$ ($\Rightarrow H = V \oplus V^\perp \Rightarrow$ direktní)

$x \in H$ lib., $M := x + V$, předchozí věta:

$$\exists w \in M = x + V, \|w\| = \inf_{z \in x+V} \|z\| = \inf_{v \in V} \|x - v\| = \text{dist}(x, V).$$

Položíme $z := x - w$ ($w = x - z$), $w - x = -z \in V \Rightarrow z \in V$