

$$z \in V, \|x - z\| = \text{dist}(x, V)$$

$$u \in V^{\perp}, \forall t > 0, \|x - z\|^2 \leq \|x - \underbrace{(z + tu)}_{\in V}\|^2 = \|x - z\|^2 + t^2 \|u\|^2 - 2t \text{Re} \langle x - z, u \rangle$$

$$\forall t > 0, \text{Re} \langle x - z, u \rangle \leq \frac{t}{2} \|u\| \xRightarrow{(t \rightarrow 0+)} \text{Re} \langle x - z, u \rangle \leq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} u \rightarrow -u, \Rightarrow \text{Re} \langle x - z, u \rangle \geq 0, \text{ tedy } \text{Re} \langle x - z, u \rangle = 0 \\ (\text{nad } \mathbb{C}) \quad u \rightarrow iu \quad \Rightarrow \quad \text{Im} \langle x - z, u \rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\forall u \in V, \langle x - z, u \rangle = 0, \text{ tj. } x - z \in V^{\perp}$$

$$x = z + (x - z) \in V + V^{\perp}$$

(1) plyne z definice projekce P

(2) ukázali jsme $\|x - Px\| = \text{dist}(x, V)$

$$\text{dále } z \in V, \|x - z\| = \text{dist}(x, V) \Rightarrow x - z \in V^{\perp} \Rightarrow z = Px$$

Důsledek 1. Buď $V \subset \mathcal{H}$ podprostor, ne nutně uzavřený, (jednoznačnost)

$$\text{Potom } V^{\perp\perp} = \overline{V}.$$

$$\text{Důkaz. } (\overline{V})^{\perp} = V^{\perp}, \quad \mathcal{H} = \overline{V} \oplus V^{\perp}$$

Obecně platí: $V_1, V_2 \subset \mathcal{H}$ podprostory, $\mathcal{H} = V_1 \oplus V_2$

$$\Rightarrow V_1 = V_2^{\perp}, \quad V_2 = V_1^{\perp}$$

$$\text{Stejně: } V_1 \subset V_2^{\perp}, \text{ naopak } x \in V_2^{\perp} \Rightarrow x = x_1 + x_2 \in V_1 + V_2$$

$$\Rightarrow x - x_1 = x_2 \in V_2^{\perp} \cap V_2 = \{0\} \Rightarrow x = x_1 \in V_1, \text{ tj. } V_2^{\perp} \subset V_1$$

Důsledek 2. Buď $V \subset \mathcal{H}$ podprostor. Potom $\overline{V} = \mathcal{H} \Leftrightarrow V^{\perp} = \{0\}$.

$$\text{Důkaz. } \mathcal{H} = \overline{V} \oplus V^{\perp}$$

Důsledek 3. Buďte $n \in \mathbb{N}$, $\{\mu_j; 1 \leq j \leq n\}$ ON systém v $\mathcal{H}$.

Položíme $V := \text{span}\{\mu_j; 1 \leq j \leq n\}$ [$\Rightarrow \dim V = n$, V je uzavřený]

Buď P OG projekce na V. Potom

$$(1) \forall x \in \mathcal{H}, Px = \sum_{j=1}^n \langle \mu_j, x \rangle \mu_j$$

$$(2) \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, \|x - \sum_{j=1}^n \langle \mu_j, x \rangle \mu_j\| \leq \|x - \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_j\|$$

Důkaz CVIČENÍ