Věta (Besselova nerovnost). Buď $A$ ON podmnožina v $\mathcal{H}$. Potom

$$\forall x \in \mathcal{H}, \sum_{u \in A} |\langle u, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Důkaz. $\sum_{u \in A} \dots = \sup_{\substack{B \subset A \\ |B| < \infty}} \sum_{u \in B} \dots$

$B \subset A$, $|B| < \infty$ lib., $B = \{u_j ; 1 \leq j \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$

$P :=$ OG projekce na span $B$

$$\forall x \in \mathcal{H}, \|x\|^2 = \|Px + (x-Px)\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \geq \|Px\|^2 = \Big\|\sum_{j=1}^n \langle u_j, x\rangle u_j\Big\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^n |\langle u_j, x\rangle|^2$$

$$\forall B \subset A, |B| < \infty, \quad \sum_{u \in B} |\langle u, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \sum_{u \in A} |\langle u, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Definice. Maximální ON podmnožiny v $\mathcal{H}$ nazýváme ON báze v $\mathcal{H}$.

Pozn. $U \subset \mathcal{H}$ ON podmn., $U$ je maximální $\iff U^\perp = \{0\}$

Věta. V libovolném Hilbertově prostoru je existuje ON báze a všechny ON báze v $\mathcal{H}$ mají stejnou mohutnost (kardinalitu).

Každá ON podmnožina v $\mathcal{H}$ je obsažena v nějaké ON bázi.

Důkaz. $\emptyset$

Věta. Buď $U \subset \mathcal{H}$ ON podmnožina. Potom následující výroky jsou ekvivalentní

(1) $U$ je ON báze

(2) span $U$ je hustý v $\mathcal{H}$ ($U$ je totální množina)

(3) $\forall x \in \mathcal{H}, \sum_{u \in U} |\langle u, x\rangle|^2 = \|x\|^2$ (Parsevalova rovnost)

Důkaz. (1) $\iff$ (2) :

$$(1) \iff U^\perp = \{0\} \iff \operatorname{span}(U)^\perp = \{0\} \iff \overline{\operatorname{span} U} = \mathcal{H} \iff (2)$$

(2) $\Rightarrow$ (3) :

víme $\forall x \in \mathcal{H}$, $\sum_{u \in U} |\langle u, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ ; $x \in \mathcal{H}$ lib.

$\varepsilon > 0$ libovolné, $\exists n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}, u_1, \dots, u_n \in U, \|x - \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j\| < \varepsilon$

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle u_j, x\rangle|^2 + \Big\|x - \sum_{j=1}^n \langle u_j, x\rangle u_j\Big\|^2 \leq \sum_{j=1}^n |\langle u_j, x\rangle|^2 + \Big\|x - \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j\Big\|^2$$