

PŘÍKLAD. (1) $X = \mathbb{Q}$, $\forall p, q \in \mathbb{Q}$, $\rho(p, q) = |p - q|$

$$X^* = \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \rho^*(x, y) = |x - y|$$

$$\mathcal{I}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}: q \mapsto q$$

$$(2) X = C([a, b]), \quad -\infty < a < b < +\infty$$

$$\forall \varphi, \psi \in X, \quad \rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(t) - \psi(t)| dt \quad \text{Riemann. smyslu}$$

$$X^* = L^1([a, b], dt); \quad \forall \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in X^*, \quad \rho^*(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \int_a^b |\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\psi}(t)| dt$$

Lebesgue. integrál

$$\mathcal{I}: C([a, b]) \rightarrow L^1([a, b], dt): \varphi \mapsto \tilde{\varphi}, \text{ kde}$$

$\tilde{\varphi}$ = bída ekvivalence fce φ modulo míra 0

Topologické vektorové prostory nad $T = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Definice. Topologický vektor. prostor nad T je vektorový prostor V ,
kteřý je současně topologickým prostorem, a operace
 $+: V \times V \rightarrow V, \quad \cdot: T \times V \rightarrow V$ jsou spojité zobrazení.

Pozn. V top. vektor. prostor nad T

(1) Připomenutí: $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ top. prostory, $x_0 \in X$,

potom $\gamma: Y \rightarrow X \times Y: y \mapsto (x_0, y)$ je spojitý

$\gamma \in V, \quad V \rightarrow V \times V: x \mapsto (x, y)$ je spojitý, $+: V \times V \rightarrow V$

ložení $V \rightarrow V: x \mapsto x + y$ translace - spojitý (a)

$\lambda \in T, \quad V \rightarrow T \times V: x \mapsto (\lambda, x)$ je spojitý, $\cdot: T \times V \rightarrow V$

ložení $V \rightarrow V: x \mapsto \lambda x$ dilatace - spojitý (b)

(a) invertovatelný, (b) invertovatelný pro $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow$ homeomorfismy

speciálně: $U \subset V$ otevřená $\Rightarrow \gamma + U, \lambda U$ jsou otevřené
 $F \subset V$ uzavřená $\Rightarrow \gamma + F, \lambda F$ jsou uzavřené

(2) $A \subset V$ lib., $U \subset V$ otevřená $\Rightarrow A + U = \bigcup_{a \in A} (a + U)$ otevřená mm.

$0 \in U \Rightarrow A = A + 0 \subset A + U = \text{otevřená okolí mm. } A$