

Důkaz.  $z \in [G]_K$  lib.  $\Rightarrow z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ,  $x_i \in G$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

$x_i \in G \Rightarrow \exists$  otevř. okolí  $x_i \in U_i \subset G$ ,  $i=1, \dots, n$

$\Rightarrow z \in U := \sum_{i=1}^n \alpha_i U_i \subset G$ ,  $U$  je otevřená

Když  $G$  je otevřená

Věta. Budte  $V$  top. vektor. prostor nad  $\mathbb{R}$ ,  $M \subset V$  konvexní.

Potom  $M^\circ, \bar{M}$  jsou konvexní. ( $M \neq \emptyset$ )

Důkaz. (1)  $M^\circ \subset [M^\circ] \subset [M]_K = M$

maximalita  $M^\circ \Rightarrow \overbrace{M^\circ}^K = [M^\circ]_K$ ,  $\uparrow M$  je konvex. lib.  $M^\circ$  je konvex.

(2)  $x_1, x_2 \in \bar{M}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $y := \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$  leží v  $\bar{M}$ ?

perve' Stačí ukázat, že  $\forall$  otevř. okolí  $U \ni y$ ,  $U \cap M \neq \emptyset$

$f: V \times V \rightarrow V: (x_1, x_2) \mapsto \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$  je spojitá

$f(x_1, x_2) = y \in U \Rightarrow \exists$  otevř. okolí  $x_1 \in W_1$ ,  $x_2 \in W_2$  tak, že  $f(W_1 \times W_2) \subset U$

$W_1 \cap M \neq \emptyset$  ( $x_1 \in \bar{M}$ ),  $W_2 \cap M \neq \emptyset$  ( $x_2 \in \bar{M}$ )

zvolíme  $y_1 \in W_1 \cap M$ ,  $y_2 \in W_2 \cap M \Rightarrow (y_1, y_2) \in W_1 \times W_2$

$\Rightarrow f(y_1, y_2) = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in U \cap M \neq \emptyset$

Definice. Bud'  $V$  vektor. prostor nad  $\mathbb{R}$ . Řekneme, že

$p: V \rightarrow [0, +\infty)$  je konvexní (nebo sublineární) funkcionál,

jestliže (1)  $\forall x, y \in V$ ,  $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(2)  $\forall x \in V$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ ,  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

Věta. Budte  $V$  vektor. prostor nad  $\mathbb{R}$ ,  $p$  konvex. funkcionál na  $V$ ,  $k > 0$ .

Položíme  $E := \{x \in V; p(x) < k\}$ ,  $F := \{x \in V; p(x) \leq k\}$ .

Potom  $E, F$  jsou konvex. množiny.

Pro  $E$  navíc platí:  $\forall x \in V$ ,  $\exists \varepsilon > 0$ ,  $\forall \lambda \in [0, \varepsilon)$ ,  $\lambda x \in E$ .

Důkaz. (1)  $x, y \in E$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  lib.

$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq p(\alpha x) + p((1-\alpha)y) = \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) < \alpha k + (1-\alpha)k = k$

$\Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in E$  i  $F$  - obdobně