

Věta (Hahn-Banach). Bude V vektor. prostor nad $\mathbb{R}$, p konvexní funkcionál na V , $V_0 \subset V$ podprostor, f_0 lin. funkcionál na V_0 .

Nechť $\forall x \in V_0, f_0(x) \leq p(x)$.

Potom existuje lin. funkcionál f na V tak, že

$$(1) \forall x \in V_0, f_0(x) = f(x) \quad (f \text{ je prodloužením } f_0, f|_{V_0} = f_0)$$

$$(2) \forall x \in V, f(x) \leq p(x).$$

Důkaz. (I) Pokud $V_0 = V \rightarrow$ konec

Nechť $V_0 \neq V$, zvolme $z \in V \setminus V_0$, položme $V_1 = V_0 + \mathbb{R}z$

Meďáme f_1 lin. funkce. na V_1 , (i) $f_1|_{V_0} = f_0$

$$(ii) \forall x \in V_1, f_1(x) \leq p(x)$$

$$(i) \Rightarrow \text{stačí zadat } f_1(z) =: c \in \mathbb{R}, \forall x \in V_0, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f_1(x + \lambda z) = f_0(x) + \lambda c$$

$$(ii) \quad x \in V_0, \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda z \in V_1 \quad (\lambda = 0: f_1(x) = f_0(x) \leq p(x) \text{ splněno})$$

$$\lambda > 0: f_1\left(\frac{1}{\lambda}x + z\right) \leq p\left(\frac{1}{\lambda}x + z\right)$$

$$f_0\left(\frac{1}{\lambda}x\right) + c \leq p\left(\frac{1}{\lambda}x + z\right)$$

$$\lambda < 0: f_0\left(\frac{1}{\lambda}x\right) + c \geq -p\left(-\frac{1}{\lambda}x - z\right)$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}V_0 = V_0, \text{ musíme splnit } \forall x \in V_0, f_0(x) + c \leq p(x + z)$$

$$\forall y \in V_0, f_0(y) + c \geq -p(-y - z)$$

$$\text{přepíšeme } \forall x, y \in V_0, -p(-y - z) - f_0(y) \leq c \leq p(x + z) - f_0(x)$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ existuje} \Leftrightarrow \sup_{y \in V_0} (-p(-y - z) - f_0(y)) \leq \inf_{x \in V_0} (p(x + z) - f_0(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in V_0, \underbrace{-p(-y - z) - f_0(y) \leq p(x + z) - f_0(x)}_{\Leftrightarrow}$$

$$f_0(x) - f_0(y) \leq p(x + z) + p(-y - z)$$

$$\text{splněno: } f_0(x) - f_0(y) = f_0(x - y) \leq p(x - y) = p(x + z + (-y - z))$$

$$\leq p(x + z) + p(-y - z)$$

$$(II) \mathcal{F} = \{(W, g) : W \subset V \text{ podprostor}, V_0 \subset W, g|_{V_0} = f_0, \\ \forall x \in W, g(x) \leq p(x)\}$$

$$(W_1, g_1), (W_2, g_2) \in \mathcal{F}, (W_1, g_1) \leq (W_2, g_2) \stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} W_1 \subset W_2 \text{ a } g_2|_{W_1} = g_1$$

$\leq$ je uspořádkování - samostatně