

Přehled Zornova lemma: $\mathcal{F} = \{(W_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\} \subset \mathcal{F}$ je řada

$$W := \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha, \text{ pro každé } x \in W \text{ zvolíme } \alpha \in A, x \in W_\alpha, g(x) := g_\alpha(x)$$

Musíme ukázat (a) $W \subset V$ je podprostor

(b) $g(x)$ nezávisí na volbě $\alpha \in A$

(c) g je lineární

(a), (b), (c) - samostatně

$$[(a) \quad x, y \in W \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in A, x \in W_\alpha, y \in W_\beta, \text{ protože } W_\alpha \subset W_\beta \\ \Rightarrow x, y \in W_\beta \Rightarrow x+y \in W_\beta \Rightarrow x+y \in W]$$

Z definice $(W, g) \Rightarrow (i) \forall \alpha \in A, W_\alpha \subset W, g|_{W_\alpha} = g_\alpha$, tj. g je prodloužením

$$(ii) \forall x \in W, g(x) \leq p(x)$$

$$[\text{pro jiné } \alpha \in A, g(x) = g_\alpha(x) \leq p(x)]$$

g_α
 $\downarrow$
 g je prodlouž.
 f_0

$$\text{tedy } (W, g) \in \mathcal{F}, \forall \alpha \in A, (W_\alpha, g_\alpha) \leq (W, g)$$

(W, g) je horní zátora $\mathcal{F}$

Zornovo lemma $\Rightarrow$ v $\mathcal{F}$ existuje maximální prvek (W, f)

$$(i) \quad W \subset V \text{ podpr.}, V_0 \subset W, f|_{V_0} = f_0$$

$$(ii) \quad \forall x \in W, f(x) \leq p(x)$$

stačí ukázat, že $W = V$

sporem necht $W \neq V$, (I) $\Rightarrow \exists (W_1, f_1)$ taková, že

$$(i) \quad W \subsetneq W_1 \text{ podprostor, } f_1 \text{ je lin. funkcionál na } W_1$$

$$f_1|_W = f \Rightarrow V_0 \subset W_1, f_1|_{V_0} = f_0$$

$$(ii) \quad \forall x \in W_1, f_1(x) \leq p(x)$$

$$\Rightarrow (W_1, f_1) \in \mathcal{F}, (W, f) \leq (W_1, f_1), (W, f) \neq (W_1, f_1)$$

spor o maximalitě $(W, f) \in \mathcal{F}$

Definice. Bud V vektor. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Zobrazení $p: V \rightarrow [0, +\infty)$ je seminorma (pseudonorma), jestliže

$$(1) \quad \forall x, y \in V, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$$(2) \quad \forall \lambda \in \text{těleso}, \forall x \in V, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

Pozn. (a) těleso = $\mathbb{R}$, seminorma je rovněž konvex. funkcionál

(b) nerovná se se $p(x) = 0$ pro $x \neq 0$