

Věta (Hahn-Banach, Lëbedev = $\mathbb{C}$)

Bud' V rektor, prostor nad $\mathbb{C}$, $V_0 \subset V$ podprostor, f_0 lin. funkcionál na V_0 , seminorma na V .

Nechť $\forall x \in V_0, |f_0(x)| \leq p(x)$.

Potom existuje lin. funkcionál f na V tak, že

$$(1) f|_{V_0} = f_0,$$

$$(2) \forall x \in V, |f(x)| \leq p(x).$$

Důkaz. označme $V_{\mathbb{R}}, V_{0\mathbb{R}}$ reál. prostory V, V_0 vložované nad $\mathbb{R}$

($V_{\mathbb{R}} = V, V_{0\mathbb{R}} = V_0$ jako množiny)

máme $V_{0\mathbb{R}} \subset V_{\mathbb{R}}$ podprostor, seminorma $p \rightarrow$ konvexní funkcionál na $V_{\mathbb{R}}$

$$f_{0\mathbb{R}} := \operatorname{Re} \circ f_0 \quad (\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R})$$

$f_{0\mathbb{R}}$ je lin. funkcionál na $V_{0\mathbb{R}}$

$$\forall x \in V_{0\mathbb{R}}, f_{0\mathbb{R}}(x) = \operatorname{Re}(f_0(x)) \leq |f_0(x)| \leq p(x)$$

HB věta pro $\mathbb{R} \Rightarrow \exists f_{\mathbb{R}}$ lin. funkcionál na $V_{\mathbb{R}}$ tak, že

$$(1') f_{\mathbb{R}}|_{V_{0\mathbb{R}}} = f_{0\mathbb{R}}, \text{ tj. } \forall x \in V_{0\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}(x) = \operatorname{Re}(f_0(x))$$

$$(2') \forall x \in V_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}(x) \leq p(x) \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow -f_{\mathbb{R}}(x) = f_{\mathbb{R}}(-x) \leq p(-x) = p(x) \end{array} \right\} \Rightarrow |f_{\mathbb{R}}(x)| \leq p(x)$$

Definujeme: $\forall x \in V, f(x) := f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix) \in \mathbb{C}$ ($i = \sqrt{-1}, ix \in V$)

($V = V_{\mathbb{R}}$ jako množiny)

f je lin. funkcionál na V nad $\mathbb{C}$

$$\text{máme } \forall x, y \in V, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V, f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

$$\text{stačí ukázat, že } \forall x \in V, f(ix) = i f(x)$$

$$\text{skutečně } f(ix) = f_{\mathbb{R}}(ix) - i f_{\mathbb{R}}(-x) = i (f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix)) = i f(x)$$

Platí: $f|_{V_0} = f_0$: $x \in V_0$ lib. $\Rightarrow ix \in V_0$

$$f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix) = f_{0\mathbb{R}}(x) - i f_{0\mathbb{R}}(ix)$$

$$= \operatorname{Re}(f_0(x)) - i \operatorname{Re}(f_0(ix)) = \operatorname{Re}(f_0(x)) + i \operatorname{Im}(f_0(x)) = f_0(x)$$

Platí: $\forall x \in V, |f(x)| \leq p(x)$: zvolíme $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1, \alpha f(x) \geq 0$

$$|f(x)| = |\alpha f(x)| = \alpha f(x) = f(\alpha x) = \operatorname{Re} f(\alpha x) = f_{\mathbb{R}}(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x)$$