

## Metrické vektorové prostory

Definice. Metrika  $\rho$  na vektor. prostoru  $V$  je invariantní, jestliže  
 $\forall x, y, z \in V, \quad \rho(x, y) = \rho(x+z, y+z).$

Topolog. vektor. prostor je metrickým vektor. prostorem, jestliže  
topologie je určena invariantní metrikou.

## Vektorové prostory se spočítaně mnoha seminormami

Budte  $V$  vektor. prostor (nad  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ ),  $\| \cdot \|_p, p \in \mathbb{N}_0$ , seminormy na  $V$ .

Nechť platí pro každé  $x \in V$ :

$$\forall p \in \mathbb{N}_0, \|x\|_p = 0 \Rightarrow x = 0$$

Topologie na  $V$ :  $B^{(p)}(x, r) = \{y \in V; \|x-y\|_p < r\}, x \in V, r > 0$

Pro  $n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$  položíme

$$U(n, \varepsilon) = \bigcap_{p=0}^n B^{(p)}(0, \varepsilon) = \{x \in V; \|x\|_p < \varepsilon \text{ pro } p=0, \dots, n\}$$

$$\mathcal{B} = \{x + U(n, \varepsilon); x \in V, n \in \mathbb{N}_0, \varepsilon > 0\}$$

$\mathcal{B}$  bázise topologie  $\tau$

$(x_n) \subset V, x \in V, x_n \rightarrow x$  vzhledem k  $\tau$

$$\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_p = 0$$

Metrika:  $\rho: V \times V \rightarrow [0, +\infty)$

$$\forall x, y \in V, \quad \rho(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} \underbrace{\frac{\|x-y\|_p}{1 + \|x-y\|_p}}_{\leq 1} \in [0, 2)$$

$\rho$  je metrika invariantní

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}_0, \|x-y\|_p = 0 \\ \Leftrightarrow x = y$$

$\Delta$  nerovnost: CVIČENÍ