

V rektor. prostor nad $T = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$$\|\cdot\|_p, p \in \mathbb{N}_0,$$

$$\forall x \in V: \quad \forall p \in \mathbb{N}_0, \|x\|_p = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (*)$$

$$\rightarrow \text{topologie } \tau: (x_n) \subset V, x \in V, x_n \rightarrow x \text{ v } V \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_p = 0$$

$$\forall x, y \in V, \quad \rho(x, y) := \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} \frac{\|x - y\|_p}{1 + \|x - y\|_p} \quad (**)$$

Platí: Topologie určená $\rho = \tau$

Definice. Buď V rektor. prostor se spočetně mnoha seminormami $\|\cdot\|_p, p \in \mathbb{N}_0$, které splňují $(*)$. Tento prostor se nazývá

Fréchetův, je-li metrický prostor (V, ρ) , kde ρ je def. v $(**)$, úplný.

Příklady. (1) $C(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^0, \text{ kde } \forall j \in \mathbb{N}, K_j \text{ je kompaktní}$$

$$\text{množ. } K_j = \overline{B(0, j)}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall f \in C(\mathbb{R}^n), \|f\|_j := \max_{x \in K_j} |f(x)|$$

$$(f_n) \subset C(\mathbb{R}^n), f \in C(\mathbb{R}^n): f_n \rightarrow f \text{ v } C(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}, f_n \rightrightarrows f, n \rightarrow \infty, \text{ na } K_j$$

$$\Leftrightarrow \forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompaktní, } f_n \rightrightarrows f \text{ na } K$$

topologie stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách

(2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ Schwartzův prostor

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}), p \in \mathbb{N}_0, \|f\|_p := \max_{0 \leq k \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^p \left| \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right| \in [0, +\infty]$$

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \forall p \in \mathbb{N}_0, \|f\|_p < \infty$$

Normované rektor. prostory, Banachovy prostory

Značení. X, Y rektor. prostory nad T

$\mathcal{L}(X, Y)$ rektor. prostor lin. zobrazení X do Y

$$A, B \in \mathcal{L}(X, Y), \lambda \in T, \forall x \in X, (A+B)x := Ax + Bx$$

$$(\lambda A)x := \lambda \cdot Ax$$

Definice. X, Y normované rektor. prostory, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$A \text{ je omezené} \stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \exists M \geq 0 \text{ (omezuující konst), } \forall x \in X, \|Ax\| \leq M \|x\|.$$