

Značení. $B(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ podmnožina (podprostor) tvořená omezenými line. zobrazeními

Definice. $A \in B(X, Y)$, $\|A\| := \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Ax\|$

$\|A\|$ se nazývá norma line. zobrazení A

Lemma. X, Y norm. vektor. prostory. Pro $A \in B(X, Y)$ platí

$$(1) \|A\| = \min \{M \geq 0; \forall x \in X, \|Ax\| \leq M\|x\|\}.$$

Je-li $X \neq \{0\}$, potom také

$$(2) \|A\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Ax\|$$

$$(3) \|A\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Důk.: $X = \{0\} \Rightarrow A = 0$, $\|A\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Ax\| = 0$, (1) zřejmě platí

Nechť $X \neq \{0\}$

$$\|A\| = \sup_{0 < \|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{0 < \|x\| \leq 1} \|x\| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{0 < \|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (3)$$

$$= \sup_{x \neq 0} \left\| A \left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\|$$

(2)

$\Rightarrow$ platí (2), (3)

$$(1): \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \forall x \in X, x \neq 0, \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\Rightarrow \|A\| \geq \min_{(inf)} \{M \geq 0; \forall x \in X, \|Ax\| \leq M\|x\|\} =: M_0$$

$$M \geq 0, \forall x \in X, \|Ax\| \leq M\|x\| \Rightarrow \forall x \neq 0, \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M \Rightarrow \|A\| \leq M$$

Aedy $\|A\| = M_0$

Pozn. $\forall x \in X, \|Ax\| \leq \underbrace{\|A\|}_{\text{optimální}} \|x\|$