

Věta. Bud' X, Y normované prostory. Potom $\mathcal{B}(X, Y)$ je normovaný rektor. prostor.

Důkaz. (I) $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\forall x \in X, \quad \|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \|x\| + \|B\| \|x\| \\ = (\|A\| + \|B\|) \|x\|$$

odtud $A+B \in \mathcal{B}(X, Y), \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(II) $\lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|(\lambda A)x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} |\lambda| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \|A\|$$

odtud $\lambda A \in \mathcal{B}(X, Y), \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

(III) uvažte $A \in \mathcal{B}(X, Y), \quad A=0 \Rightarrow \|A\|=0$

naopak, $\|A\|=0 \Rightarrow \forall x \in X, x \neq 0, \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$

$$\Rightarrow \forall x \in X, \quad \|Ax\| = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in X, \quad Ax = 0, \text{ tj. } A = 0$$

Věta. Bud' X, Y normované rektor. prostory, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Potom následující výzoky jsou ekvivalentní:

(1) A je omezené

(2) A je spojité

(3) $\exists x_0 \in X, \quad A$ je spojité v x_0

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2): $(x_n) \subset X, x_n \rightarrow x \in X$ lib. konvergent. posl.

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq \|A\| \|x_n - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

tj. $Ax_n \rightarrow Ax \in Y$; tedy A je spojité

(2) $\Rightarrow$ (3) (A spojité $\Leftrightarrow \forall x \in X, A$ je spojité v x) zřejmě

(3) $\Rightarrow$ (1) předp. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon)$

zvolíme $\varepsilon > 0$ první $\rightarrow \delta$

$$\forall x \in X \setminus \{x_0\}, \quad \forall \lambda \in (0, \delta), \quad \frac{\lambda}{\|x\|} \|Ax\| = \|A(x_0 + \frac{\lambda}{\|x\|} x) - Ax_0\| < \varepsilon$$

$$\|Ax\| < \frac{\|x\|}{\lambda} \varepsilon,$$

$$\lambda \uparrow \delta: \quad \forall x \in X, x \neq 0, \quad \|Ax\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|x\|, \text{ platí i pro } x=0$$

tedy A je omezené, $\|A\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$