Věta. X, Y, Z norm. vektor. prostory. Pro $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$ platí $BA \in \mathcal{B}(X,Z)$, $\|BA\| \le \|B\| \|A\|$.

Speciálně (pro $Y = X$) $\mathcal{B}(X)$ je (asociativní) algebra, normovaná, s jednotkovým prvkem $I \in \mathcal{B}(X)$, $\|I\| = 1$.

Důkaz. Pro $x \in X$, $\|BAx\| = \|B(Ax)\| \le \|B\| \|Ax\| \le \underbrace{\|B\| \|A\|} \|x\|$

$$\Rightarrow \quad \|BA\| \le \|B\| \|A\|$$

Pozn. $A \in \mathcal{B}(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\| \le \|A\|^n$

$$n = 0, \quad A^0 := I, \quad 1 = 1$$

Definice. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ na vektor. prostoru X jsou ekvivalentní, jestliže existují $0 < A \le B$ tak, že

$$\forall x \in X, \quad A \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le B \|x\|_2$$

$$\left[\quad \frac{1}{B} \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \frac{1}{A} \|x\|_1 \right]$$

Věta. Dvě normy na vektor. prostoru X jsou ekvivalentní, právě když na X určují stejnou topologii.

Důkaz. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ na X $\longrightarrow$ τ_1, τ_2

$$X_1 = (X, \|\cdot\|_1), \quad X_2 = (X, \|\cdot\|_2); \quad J : X_1 \to X_2 : x \mapsto x$$

$$J \text{ je spojité} \iff J \text{ je omezené}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$\forall G \in \tau_2$, $J^{-1}(G) = G \in \tau_1$ | $\exists A > 0$, $\forall x \in X$, $\|Jx\|_2 = \|x\|_2 \le \dfrac{1}{A} \|x\|_1$

tj. $\tau_2 \subset \tau_1$

$$\text{tedy} \quad \tau_2 \subset \tau_1 \iff \exists A > 0, \ \forall x \in X, \ \|x\|_2 \le \frac{1}{A} \|x\|_1$$

zaměníme J za $J^{-1} : X_2 \to X_1$

$$\tau_1 \subset \tau_2 \iff \exists B > 0, \ \forall x \in X, \ \|x\|_1 \le B \|x\|_2$$

stejně tak $\tau_1 = \tau_2 \iff \exists A, B > 0$, $\forall x \in X$, $A \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le B \|x\|_2$

Věta. Každé dvě normy na konečnorozměrném vektorovém prostoru jsou ekvivalentní.

Důkaz. V vektor. prostor pro určitost nad $\mathbb{R}$

$V = \{0\}$ triv., nechť $V \ne \{0\}$, $\dim V = n \in \mathbb{N}$

Zvolíme bázi $(x_1, \dots, x_n)$ ve V