Literatura

W. Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru, Academia, Praha 1977, 2003

S. Lang: Complex Analysis, Springer, New York, 1999

J. B. Conway: Functions of One Complex Variable, Springer, New York, 1978

J. Veselý: Komplexní analýza pro učitele, Karolinum, Praha, 2000

Topologické pojmy

Definice. (X,τ) topolog. prostor je nesouvislý $\overset{DEF}{\Longleftrightarrow}$

$\exists A, B \in \tau,\ A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset,\ A \cap B = \emptyset,\quad X = A \cup B$ $\quad (\Rightarrow A, B \in c\tau,$ $c\tau := \{X \setminus G;\ G \in \tau\})$

V opačném případě je X souvislý,

Tj. X je souvislý $\Leftrightarrow$ $\tau \cap c\tau = \{\emptyset, X\}$

$M \subset X$, M je souvislá (resp. nesouvislá) podmn. X $\overset{DEF}{\Longleftrightarrow}$

(M, τ_M) je souvislý (resp. nesouvislý) top. prostor,

kde τ_M je relativní top. na M, $\tau_M := \{G \cap M;\ G \in \tau\}$.

Tedy $M \subset X$ je nesouvislá $\Leftrightarrow$

$\exists A, B \in \tau,\ A \cap M \neq \emptyset,\ B \cap M \neq \emptyset,\ A \cap B \cap M = \emptyset,\quad M \subset A \cup B$

Pozn. Buď (X,τ) souvislý top. prostor, $M \subset X$.
Jestliže $M \neq \emptyset$, M je současně otevřená a uzavřená, potom $M = X$.

Pozn. (X,τ), $M \subset X$

(1) $M = \emptyset \Rightarrow M$ je souvislá

(2) $M = \{x\}, x \in X \Rightarrow M$ je souvislá

Tvrzení. Buďte (X,τ) top. prostor, $M_\alpha \subset X$, $\alpha \in \mathcal{A}$ (index. množina).
Nechť $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, M_α je souvislá a $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha \neq \emptyset$.

Potom $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$ je souvislá.

Důkaz. Mějme $A, B \in \tau$, $A \cap B \cap \left(\bigcup_\alpha M_\alpha\right) = \emptyset$, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha \subset A \cup B$.

Máme ukázat: $A \cap \left(\bigcup_\alpha M_\alpha\right) = \emptyset$ nebo $B \cap \left(\bigcup_\alpha M_\alpha\right) = \emptyset$

Zvolíme $p \in \bigcap_\alpha M_\alpha$, pro určitost $p \in A$ $(\Rightarrow p \notin B)$

Určitě pro lib. $\alpha \in \mathcal{A}$, $M_\alpha \subset A \cup B$, $A \cap B \cap M_\alpha = \emptyset$, $p \in A \cap M_\alpha \neq \emptyset$ ⁄.

M_α je souvislá $\Rightarrow$ $B \cap M_\alpha = \emptyset$ (α libovolné)

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in a} M_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in a} \underbrace{(B \cap M_\alpha)}_{=\emptyset} = \emptyset$$

(X, τ) – topologický prostor

<u>Důsledek</u>. Každá neprázdná souvislá podmn. X je obsažená v nějaké (právě jedné) maximální (vzhledem k $\subset$) souvislé podmn. v X.

Speciálně každý bod v X je obsažen v nějaké (právě jedné) maximální souvislé podmn.

<u>Důkaz</u>. $\emptyset \neq N \subset X$, souvislá

$\mathcal{M} := \{M \subset X;\ N \subset M,\ M \text{ je souvislá}\}$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$, neboť $N \in \mathcal{M}$

$\tilde{N} := \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$, tvrzení $\Rightarrow$ $\tilde{N}$ je souvislá $\left(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \supset N \neq \emptyset\right)$

$\tilde{N}$ je maximální souvislá podmn. (samostatně)

<u>Pozn.</u> Ekvivalence na X: $x, y \in X$, $x \sim y \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} \exists M \subset X$ souvislá, $x, y \in M$

Potom třídy ekvivalence jsou právě maximální souvislé podmn.

<u>Definice</u>. Maximální souvislé podmn. X nazveme <u>souvislé komponenty</u> X.
(souvislé komponenty jsou navzájem disjunktní)

<u>Tvrzení</u>. Buďte $M \subset X$ souvislá podmn., $x \in \overline{M}$. Potom $M \cup \{x\}$ je souvislá podmn.

<u>Důkaz</u>. Mějme $A, B \in \tau$, $A \cap B \cap (M \cup \{x\}) = \emptyset$, $M \cup \{x\} \subset A \cup B$

Máme ukázat: $A \cap (M \cup \{x\}) = \emptyset$ nebo $B \cap (M \cup \{x\}) = \emptyset$

Pro určitost $x \in A$ $\Rightarrow$ A je otevř. okolí bodu x, $x \in \overline{M}$

$\Rightarrow$ $A \cap M \neq \emptyset$, přitom M souvislá $\Rightarrow$ $B \cap M = \emptyset$

(určitě $M \subset A \cup B$, $A \cap B \cap M = \emptyset$)

současně $x \notin B$, odtud $B \cap (M \cup \{x\}) = \emptyset$

<u>Důsledek</u>. $M \subset X$ souvislá $\Rightarrow$ $\overline{M}$ je souvislá.

<u>Důkaz</u>. $M = \emptyset$ zřejmé; nechť $M \neq \emptyset$

$\overline{M} = \bigcup_{x \in \overline{M}} (M \cup \{x\})$, $\forall x \in \overline{M}$, $M \cup \{x\}$ je souvislá, $\bigcap_{x \in \overline{M}} (M \cup \{x\}) \neq \emptyset$

tvrzení $\Rightarrow$ $\overline{M}$ je souvislá

Tvrzení. Spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina.

$((X,\tau_X),(Y,\tau_Y),\ f:X\to Y,\ M\subset X$

M je souvislá, f je spojité zobr. $\Rightarrow f(M)\subset Y$ je souvislá)

Důkaz. CVIČENÍ

Definice. Křivka γ v X je spojité zobrazení $\gamma: I\to X$, kde $I\subset\mathbb{R}$ je kompaktní interval kladné délky (tj. $I=[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$)

Pozn. Nejčastěji $I=[0,1]$ nebo $[0,2\pi]$.

Značení $\gamma\in C(I,X)$,

Def. $I=[\alpha,\beta]$, $\gamma(\alpha),\gamma(\beta)\in X$ nazýváme po řadě počáteční a koncový bod křivky.

Obor hodnot $\gamma(I)\subset X$ nazveme geometrickým obrazem křivky γ, označíme ho $\langle\gamma\rangle$. Pozn. $\langle\gamma\rangle\subset X$ je kompaktní podmn.

Křivka γ je jednoduchá (nebo Jordanův oblouk), je-li zobrazení γ prosté. [Pozn. $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ souvislá mn. (viz dále) $\Rightarrow$ $\langle\gamma\rangle\subset X$ je souvislá podmn.]

Definice. Top. prostor X je křivkově souvislý, jestliže každé dva body v X lze spojit nějakou křivkou.

$(\forall x,y\in X,\ \exists\gamma\in C([\alpha,\beta],X),\ \gamma(\alpha)=x,\ \gamma(\beta)=y)$

Pozn. Zavádí se pojem křivkově souvislé komponenty X; třídy ekvivalence: $x,y\in X$, $x\sim y \overset{DEF}{\Longleftrightarrow}$ x,y lze spojit křivkou v X

Pozn. Křivkově souvislý prostor je souvislý

(zřejmé: X - křivkově souvislý, $x\in X$ zvolíme pevně

$\forall y\in X$ zvolíme křivku γ_y: $x=$ počáteční bod γ_y
$y=$ koncový bod γ_y

$X=\bigcup_{y\in X}\underbrace{\langle\gamma_y\rangle}_{\text{souvislá}}$, $x\in\bigcap_{y\in X}\langle\gamma_y\rangle\neq\emptyset$, tvrzení $\Rightarrow X$ je souvislý

Opak neplatí - CVIČENÍ

Příklad. Konvexní podmn. v topolog. vektor. prostorech jsou křivkově souvislé $\Rightarrow$ souvislé (speciálně platí pro $\mathbb{R}^n$)

Tvrzení. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Je-li M omezená, pak $\mathbb{R}^n \setminus M$ má právě jednu neomezenou souvislou komponentu.

Důkaz. CVIČENÍ

Tvrzení. Souvislé podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou právě všechny intervaly (včetně $[\alpha,\alpha] = \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Důkaz. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, pak (α,β) je spojitým obrazem $\mathbb{R}$

$(\alpha,+\infty)$ ——— " ——— (samostatně)

(α,β) je souvislá mn. $\Rightarrow [\alpha,\beta), (\alpha,\beta], [\alpha,\beta]$ je souvislé mn.

$(\alpha,+\infty)$ souvislá $\Rightarrow [\alpha,+\infty)$ souvislá

podobně $(-\infty,\alpha)$, $(-\infty,\alpha]$

Závěr: stačí ukázat, že $\mathbb{R}$ je souvislý top. prostor

Mějme $A, B \subset \mathbb{R}$ otevřené, $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{R} = A \cup B$

Máme ukázat: $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$

Pro určitost $0 \in A$, potom $\exists \varepsilon > 0$, $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset A$

Položme $M := \{x > 0;\ [0,x) \subset A\}$, $M \neq \emptyset$

$u := \sup M$

Platí $u \notin A$: kdyby $u \in A \Rightarrow \exists \varepsilon' > 0$, $(u-\varepsilon', u+\varepsilon') \subset A$

$\exists x \in M \cap (u-\varepsilon', u)$

$$\Rightarrow \underbrace{[0,x)}_{\subset A} \cup (u-\varepsilon', u+\varepsilon') = [0, u+\varepsilon') \subset A \Rightarrow u+\varepsilon' \in M$$

$u+\varepsilon' > u = \sup M$, spor

Platí $u \notin B$: kdyby $u \in B \Rightarrow \exists \varepsilon'' > 0$, $(u-\varepsilon'', u+\varepsilon'') \subset B$

$\Rightarrow (u-\varepsilon'', u) \cap A = \emptyset$

Současně $\exists x \in (u-\varepsilon'', u) \cap M$

$$\Rightarrow \emptyset \neq \underbrace{[0,x)}_{\subset A} \cap (u-\varepsilon'', u), \text{ tedy } A \cap (u-\varepsilon'', u) \neq \emptyset$$

spor

Společně $\underset{(u>0)}{u} \notin A \cup B = \mathbb{R} \Rightarrow u = \sup M = +\infty$

$\Rightarrow \forall z > 0\ \exists x > z$, $x \in M \Rightarrow [0,x) \subset A \Rightarrow [0,z) \subset A$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \bigcup_{z>0} [0,z) = [0,+\infty) \subset A; \\ &\text{obdobně } (-\infty,0] \subset A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{R} = A \Rightarrow B = \emptyset$$