

Dále jsou uvedeny tři příklady na výpočet určitého integrálu pomocí výsledků teorie funkcí komplexní proměnné. Vždy je uvedeno ukázkové řešení, které je ve všech příkladech založeno na aplikaci reziduové věty. Je však na místě poznamenat, že možných způsobů řešení takovýchto příkladů bývá často více.

Poznámka 0.0.1. Jedním ze základních kroků při aplikaci reziduové věty je výpočet rezidua pro danou izolovanou singularitu holomorfní funkce. V mnoha případech se setkáváme s následující situací.

Buďte $z_1 \in \mathbb{C}$ a f holomorfní funkce na okolí bodu z_1 , z kterého je ale tento bod vyjmut. Čili f má v z_1 izolovanou singularitu. Předpokládejme, že f lze zapsat ve tvaru zlomku

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

kde g a h jsou holomorfní funkce na okolí z_1 a h má v z_1 jednoduchý kořen, to jest $h(z_1) = 0$, $h'(z_1) \neq 0$. Potom f má v z_1 pól řádu 1 (kromě případu $g(z_1) = 0$, kdyby f měla v z_1 odstranitelnou singularitu) a platí

$$\operatorname{res}_{z_1} f = \frac{g(z_1)}{h'(z_1)}.$$

To je okamžitě vidět z toho, že vzhledem k předpokladům lze funkce g a h zapsat ve tvaru

$$g(z) = g(z_1) + p(z)(z - z_1), \quad h(z) = h'(z_1)(z - z_1) + q(z)(z - z_1)^2.$$

Přitom p a q jsou holomorfní funkce na okolí z_1 .

0.1 Příklad 1

Vypočtete integrál

$$I := \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$$

Řešení. Zřejmě

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx, \quad \text{kde } f(z) := \frac{z^2}{z^4 + 1}$$

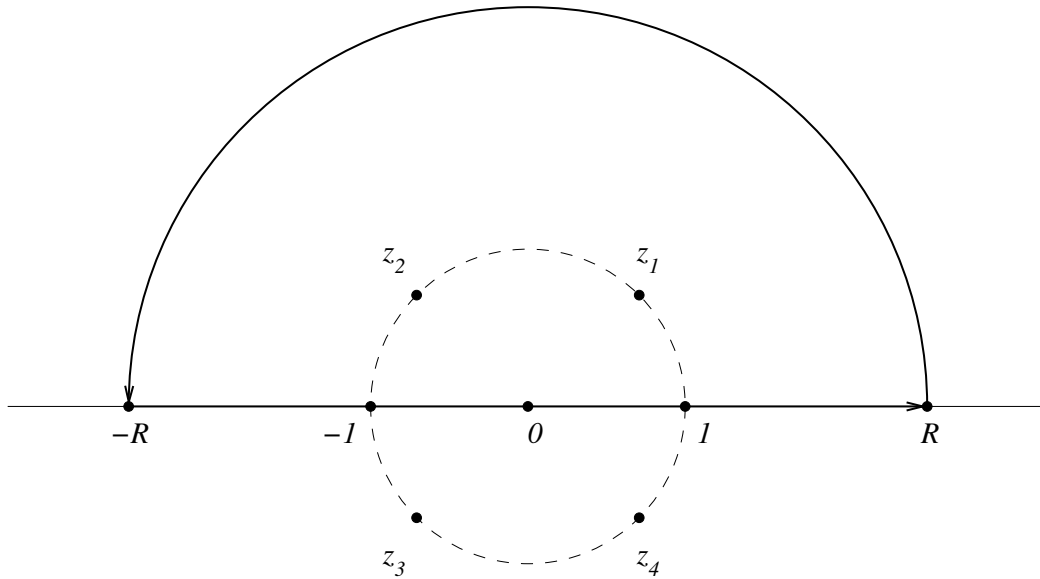
je meromorfní funkce na $\mathbb{C}$. Funkce f má v $\mathbb{C}$ čtyři izolované singularity, a sice póly řádu 1 v kořenech rovnice

$$z^4 + 1 = 0.$$

Tyto kořeny označíme

$$z_1 := e^{i\pi/4}, \quad z_2 := e^{i3\pi/4}, \quad z_3 := e^{i5\pi/4} = e^{-i3\pi/4}, \quad z_4 := e^{i7\pi/4} = e^{-i\pi/4}.$$

Zvolíme regulární uzavřenou křivku v $\mathbb{C}$, jak je naznačeno na obrázku.



Tuto křivku označíme γ_R , kde $R > 1$. Sestává se ze dvou částí – z úsečky $\gamma_R^{(1)}$ z bodu $-R$ do bodu R a z oblouku $\gamma_R^{(2)}$ se středem v 0 a o poloměru R , který jde z bodu R do bodu $-R$. Parametrizace můžeme volit takto:

$$\gamma_R^{(1)}(t) := t, \quad t \in [-R, R]; \quad \gamma_R^{(2)}(t) := Re^{it}, \quad t \in [0, \pi].$$

Nejprve odhadneme

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R^{(2)}} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{iR^3 e^{i3t}}{R^4 e^{i4t} + 1} dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{iR^3 e^{i3t}}{R^4 e^{i4t} + 1} \right| dt \leq \int_0^\pi \frac{R^3}{R^4 - 1} dt \\ &= \frac{\pi R^3}{R^4 - 1}. \end{aligned}$$

Odtud je patrné, že

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^{(2)}} f(z) dz = 0.$$

Dále vezmeme v úvahu, že

$$\int_{\gamma_R^{(1)}} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{t^2}{t^4 + 1} dt.$$

V souhrnu dostáváme

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt = 2I.$$

Nakonec použijeme reziduální větu. Křivka γ_R je kladně orientovaná Jordanova křivka,

kteřá neprochází žádnou ze singularit funkce f a ve svém vnitřku obsahuje dva singulární body této funkce, a sice body z_1, z_2 . Proto pro všechna $R > 1$ je $(\text{ind}_{\gamma_R}(z_1) = \text{ind}_{\gamma_R}(z_2) = 1)$

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i (\text{res}_{z_1}(f) + \text{res}_{z_2}(f)).$$

Výpočet rezidua lze provést různě. Například

$$\begin{aligned} \text{res}_{z_1} f &= \text{res}_{z_1} \frac{z^2}{z^4 + 1} = \text{res}_{z_1} \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} \\ &= \frac{z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}. \end{aligned}$$

Obdobně

$$\text{res}_{z_2} f = \frac{z_2^2}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)}.$$

V tomto případě (ale ne nutně vždy) je patrně pohodlnější postup z poznámky 0.0.1, který dává

$$\text{res}_{z_1} f = \text{res}_{z_1} \frac{z^2}{z^4 + 1} = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1}, \text{ obdobně } \text{res}_{z_2} f = \frac{1}{4z_2}.$$

Po dosazení dostáváme

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \left(\frac{1}{4z_1} + \frac{1}{4z_2} \right) = \frac{\pi i}{4} (e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4}) = \frac{\pi i}{4} e^{-i2\pi/4} (e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) = \frac{\pi}{2} \cos(\pi/4).$$

Odpověď:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2^{3/2}}.$$

Poznámka. Podobně lze vypočítat řadu dalších integrálů. Například

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x - 1}{x^5 - 1} dx = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx, \text{ kde } f(z) := \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}$$

a

$$z_1 := e^{i2\pi/5}, \quad z_2 := e^{i4\pi/5}, \quad z_3 := e^{i6\pi/5} = e^{-i4\pi/5}, \quad z_4 := e^{i8\pi/5} = e^{-i2\pi/5}.$$

0.2 Příklad 2

Vypočtete integrál

$$I := \int_0^\infty \frac{x}{x^3 + 1} dx.$$

Řešení. Zřejmě

$$I = \int_0^\infty f(x) dx, \text{ kde } f(z) := \frac{z}{z^3 + 1}$$

je meromorfní funkce na $\mathbb{C}$. Funkce f má v $\mathbb{C}$ tři izolované singularity, a sice póly řádu 1

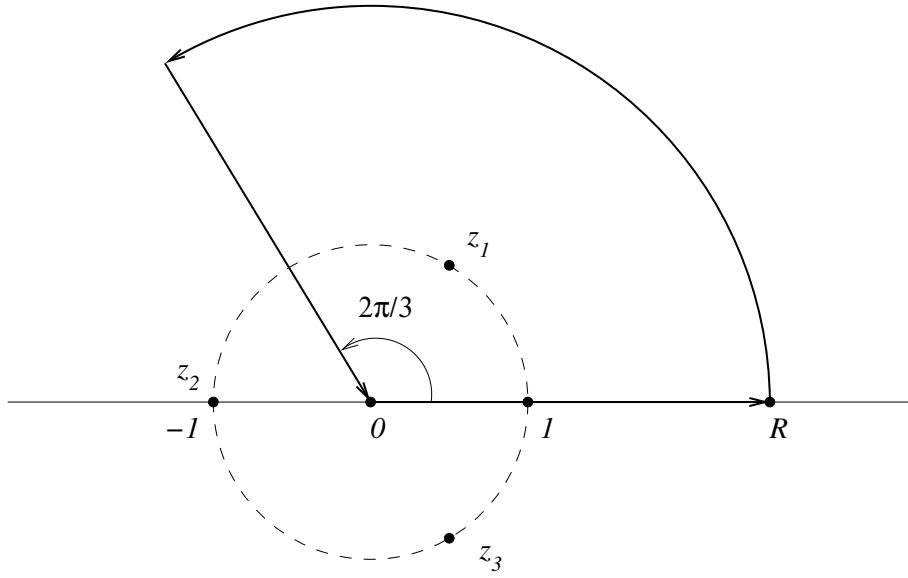
v kořenech rovnice

$$z^3 + 1 = 0.$$

Tyto kořeny označíme

$$z_1 := e^{i\pi/3}, \quad z_2 := -1, \quad z_3 := e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3}.$$

Regulární uzavřenou křivku v $\mathbb{C}$ je třeba nyní volit o trochu důmyslněji než v předcházejícím příkladu, viz obrázek



Tuto křivku označíme γ_R , kde $R > 1$. Sestává se ze tří částí – z úsečky $\gamma_R^{(1)}$ z bodu 0 do bodu R , z oblouku $\gamma_R^{(2)}$ se středem v 0 a o poloměru R , který jde z bodu R do bodu $Re^{i2\pi/3}$, a z úsečky $\gamma_R^{(3)}$ z bodu $Re^{i2\pi/3}$ do bodu 0. Označme jako $\tilde{\gamma}_R^{(3)}$ křivku opačnou ke $\gamma_R^{(3)}$. Parametrizace můžeme volit takto:

$$\gamma_R^{(1)}(t) := t, \quad t \in [0, R]; \quad \gamma_R^{(2)}(t) := Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi/3]; \quad \tilde{\gamma}_R^{(3)}(t) := e^{i2\pi/3}t, \quad t \in [0, R].$$

Nejprve odhadneme

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R^{(2)}} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi/3} \frac{iR^2 e^{i2t}}{R^3 e^{i3t} + 1} dt \right| \leq \int_0^{2\pi/3} \left| \frac{iR^2 e^{i2t}}{R^3 e^{i3t} + 1} \right| dt \leq \int_0^{2\pi/3} \frac{R^2}{R^3 - 1} dt \\ &= \frac{2\pi}{3} \frac{R^2}{R^3 - 1}. \end{aligned}$$

Odtud je patrné, že

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^{(2)}} f(z) dz = 0.$$

Dále vezmeme v úvahu, že

$$\int_{\gamma_R^{(1)}} f(z) dz = \int_0^R \frac{t}{t^3 + 1} dt, \quad \int_{\gamma_R^{(3)}} f(z) dz = - \int_{\tilde{\gamma}_R^{(3)}} f(z) dz = - \int_0^R \frac{e^{i4\pi/3} t}{t^3 + 1} dt.$$

V souhrnu dostáváme

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = (1 - e^{i4\pi/3}) \int_0^\infty \frac{t}{t^3 + 1} dt = (1 - e^{i4\pi/3}) I.$$

Nakonec použijeme reziduální větu. Křivka γ_R je kladně orientovaná Jordanova křivka, která neprochází žádnou ze singularit funkce f a ve svém vnitřku obsahuje jediný singulární bod této funkce, a sice bod z_1 . Proto pro všechna $R > 1$ je $(\text{ind}_{\gamma_R}(z_1) = 1)$

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \text{res}_{z_1}(f).$$

Výpočet rezidua lze provést různě. Například

$$\text{res}_{z_1} f = \text{res}_{z_1} \frac{z}{z^3 + 1} = \text{res}_{z_1} \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} = \frac{z_1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}.$$

V tomto případě (ale ne nutně vždy) je patrně pohodlnější postup z poznámky 0.0.1, který dává

$$\text{res}_{z_1} f = \text{res}_{z_1} \frac{z}{z^3 + 1} = \frac{z_1}{3z_1^2} = \frac{1}{3z_1}.$$

Po dosazení dostáváme

$$I = \frac{1}{1 - e^{i4\pi/3}} \frac{2\pi i}{3e^{i\pi/3}} = - \frac{2\pi i}{3(e^{i2\pi/3} - e^{-i2\pi/3})e^{i3\pi/3}} = \frac{\pi}{3 \sin(2\pi/3)}.$$

Odpověď:

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^3 + 1} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3^{3/2}}.$$

Poznámka. Podobně lze vypočítat řadu dalších integrálů. Například

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{y^3 + 1} dy.$$

0.3 Příklad 3

Vypočtete integrál

$$I := \int_0^\pi \frac{1}{1 + \sin^2(\theta)} d\theta.$$

Řešení. Integrál nejprve upravíme s pomocí vztahu

$$\sin^2(z) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2z)) = \frac{1}{4}(2 - e^{i2z} - e^{-i2z}).$$

Dostáváme

$$I = 4 \int_0^\pi \frac{1}{6 - e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}} d\theta = -4 \int_0^\pi \frac{e^{i2\theta}}{-6e^{i2\theta} + e^{i4\theta} + 1} d\theta.$$

Položíme

$$\gamma(\theta) := e^{i2\theta}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Funkce γ ale není nic jiného než kladně orientovaná jednotková kružnice v komplexní rovině se středem v bodě 0. Integrál můžeme přepsat

$$I = 2i \int_0^\pi \frac{\gamma'(\theta)}{-6\gamma(\theta) + \gamma^2(\theta) + 1} d\theta = 2i \int_\gamma f(z) dz,$$

kde

$$f(z) := \frac{1}{z^2 - 6z + 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}, \quad z_1 := 3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}, \quad z_2 := 3 + 2\sqrt{2}.$$

Je zřejmé, že z_1 leží ve vnitřku kružnice γ , z_2 leží ve vnějšku. Použijeme reziduální větu, která dává

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1}(f), \quad \operatorname{res}_{z_1} f = \operatorname{res}_{z_1} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z_1 - z_2}.$$

Po dosazení dostáváme

$$I = 2i \frac{2\pi i}{-4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Odpověď:

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + \sin^2(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$