

1. hodina

Souvisele, línkové souvisle' postavy

Definice: Souvislost

Bed' $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor.

Řekneme, že $(X, \mathcal{T})$ je souvislý, jestliže X nelze zapsat jako $X = A \cup B$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A, B \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$

$M \subset X$ je souvislá, jestliže $(M, \mathcal{T}_M)$ je souvislý

$$\Leftrightarrow M \subset A \cup B, M \cap A, M \cap B \neq \emptyset, M \cap (A \cap B) = \emptyset, A, B \in \mathcal{T}$$

Poznámka:

- Prázdná množina je souvislá
- jednobodová množina je souvislá

• Necht' $(X, \mathcal{T})$ je souvislý, $A \subset X$.

Pakud A je neprázdná a A je současně otevřeno i uzavřeno, potom $A = X$.

Lemma

Bed' $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor, $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ systém podmnožin a necht' plat':

$$\textcircled{1} \forall \alpha \in A: M_\alpha \text{ je souvislá}$$

$$\textcircled{2} \bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha \neq \emptyset$$

Potom $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ je souvislá.

Důkaz:

Necht' $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha \subset A \cup B$, $A, B \in \mathcal{T}$: $(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha) \cap (A \cap B) = \emptyset$

Máme ukázat, že buď $(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha) \cap A = \emptyset$ nebo $(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha) \cap B = \emptyset$:

Znalime $x \in \bigcap_{\alpha \in \alpha} M_\alpha$ a po úsejitost $x \in A$

$\rightarrow \forall \alpha \in \alpha: M_\alpha \subset A \cup B, M_\alpha \cap (A \cap B) = \emptyset, x \in M_\alpha \cap A \neq \emptyset$

$\rightarrow M_\alpha \cap B = \emptyset$

$\rightarrow (\bigcup_{\alpha \in \alpha} M_\alpha) \cap B = \bigcup_{\alpha \in \alpha} (M_\alpha \cap B) = \emptyset$

Důsledek:

Bed' (X, τ) topologický prostor.

Paž každý bod $x \in X$ leží v nějaké maximální souvislé podmnožině X .

Definice: Komponenta souvislosti

Bed' (X, τ) topologický prostor.

Maximální souvislé podmnožiny X se nazývají komponenty souvislosti.

Poznámka:

Jiné z-evidentní komponent souvislosti:

Bed' (X, τ) topologický prostor:

Definujeme na X relaci $\sim$:

$\forall x, y \in X: x \sim y \Leftrightarrow \exists M \subset X$ souvislá: $x, y \in M$
($\sim$ je ekvivalence)

Klídy ekvivalence $[x]_\sim$ jsou komponenty souvislosti

Každá neprázdná souvislá podmnožina je částí některé z komponent souvislosti (v počtu jich)

Thysem:

Bud' $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor, $M \subset X$ souvislá, $x \in \bar{M}$.

Pak $\{x\} \cup M$ je souvislá.

Důkaz:

Necht' $(M \cup \{x\}) \subset A \cup B$, $A, B \in \mathcal{T}$ a platí $(M \cup \{x\}) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Chceme ukázat, že $(M \cup \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ nebo $(M \cup \{x\}) \cap B \neq \emptyset$.

Pro určitost necht' $x \in A$:

$$\left. \begin{array}{l} M \cap A \neq \emptyset, x \in A \\ M \text{ souvislá} \\ M \subset A \cup B \end{array} \right\} \Rightarrow M \cap B = \emptyset \Rightarrow (M \cup \{x\}) \cap B = \emptyset$$

Důsledek:

Bud' $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor, $M \subset X$.

Pakom je M souvislá, právě když $\bar{M}$ je souvislá.

Důkaz:

$$\bullet M = \emptyset \Rightarrow \bar{M} = \emptyset \quad \checkmark$$

$$\bullet \text{Necht' } M \neq \emptyset: \quad \bar{M} = \bigcup_{x \in M} \underbrace{(M \cup \{x\})}_{\text{souvislá}} \cap \bigcap_{x \in M} (M \cup \{x\}) \supset M \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in M} (M \cup \{x\}) = \bar{M} \text{ je souvislá}$$

Důsledek:

Komponenty souvislosti jsou maximální množiny

Trvzení:

Spjatý obraz souvislé množiny je souvislá množina.

Důkaz:

(Cvičení!)

Trvzení:

Nepřetržitá souvislá podmnožina $\mathbb{R}$ jean právě
některý interval.

Poznámka:

- $a \in \mathbb{R} : [a, a] = \{a\}$
- $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ je interval, právě tehdy když splňuje:
 $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a, b \in I) \wedge (a < c < b) \Rightarrow c \in I$

Důkaz:

$\Rightarrow$ Bud' M souvislá podmnožina $\mathbb{R}$.

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R} : a, b \in M, a < b < c$

Chceme ukázat, že $c \in M$

(sporem):

Nechť $c \notin M$:

Položíme $A := (-\infty, c), B := (c, +\infty)$

$M \subset A \cup B : \left. \begin{array}{l} a \in M \cap A \neq \emptyset \\ b \in M \cap B \neq \emptyset \end{array} \right\} \text{spor se souvislostí } M$

$\Leftarrow$ Bud' M interval

stačí ukázat $M = \mathbb{R}$

(každý interval je spjatým obrazem $\mathbb{R}$)

Nechť $\mathbb{R} = A \cup B, A, B \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}, A \cap B = \emptyset$

Nechť $B \neq \emptyset, 0 \in A$

položme $N := \{x > 0 \mid (0, x) \in A\}$, $\mu := \sup N \in (0, +\infty)$

$$x \in N \Rightarrow (0, x) \subset N \Rightarrow (0, \mu) \subset N$$

Platí: $\mu = +\infty$

(sporný):

Necht' $\mu \in (0, +\infty)$:

2 možnosti: $\mu \in A \exists x > \mu : (\mu, x) \subset A \Rightarrow (0, x) \subset A \Rightarrow x \in N$, spor

$\mu \notin A: \exists 0 < x < \mu, (x, \mu) \subset B = \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow (x, \mu) \cap N = \emptyset$, spor

Definice: Křivka

Bud' (X, τ) topologický prostor.

Křivka γ je spojitě zobrazený $\gamma: I \rightarrow X$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$\gamma(a), \gamma(b)$ nazýváme počátečním a koncovým bodem

Křivka γ je uzavřená, pokud $\gamma(a) = \gamma(b)$

Křivka γ je jednoduchá (Jordanův oblouk), pokud γ je prostý.

Definice: Křivková souvislost

Bud' (X, τ) topologický ~~metrický~~ prostor.

Řekneme, že X je křivkově souvislý, jestliže každé dva body $x, y \in X$ lze spojit křivkou.

Definice: Geometrický obraz křivky

Bud' (X, τ) topologický prostor, $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ křivka.

Geometrickým obrazem křivky γ rozumíme $\langle \gamma \rangle := \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$

Poznámka:

• Budeť $\gamma: I \rightarrow X$ křivka.

Prostředím $\langle \gamma \rangle$ je kompaktní souvislá podmnožina X .

• Každá křivka je souvislý prostor je souvislý.

• Ze analogických důvodů souvislé komponenty

2. hodina

Thvzení:

Bud' $M \subset \mathbb{R}^n$ omezená, $n \geq 2$.

Pak $R \setminus M$ má právě jednu nespojenou souvislou komponentu.

Důkaz:

Cvičení

Definice: Lokální vlastnost topologického prostoru

Bud' $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor.

Řekneme, že $(X, \mathcal{T})$ má vlastnost $\mathcal{V}$ lokálně, jestliže:

$\forall x \in X: \forall W \ni x \text{ okolí: } \exists U \in \mathcal{T}: x \in U \subset W: U \text{ má vlastnost } \mathcal{V}$

Poznámka:

Bud' X topologický metrický prostor, $M \subset X$ kompaktní.

Pak M je křivkově souvislá.

$M \subset \mathbb{R}^n$ omezená $\Rightarrow M$ je lokálně křivkově souvislá

Thvzení:

Bud' $(X, \mathcal{T})$ lokálně křivkově souvislý topologický prostor.

Pak $(X, \mathcal{T})$ je křivkově souvislý $\Leftrightarrow (X, \mathcal{T})$ souvislý

Důkaz:

Cvičení

Důsledek:

Omezené množiny v $\mathbb{R}^n$ jsou křivkově souvislé právě když jsou souvislé.

Definice: Jordánova křivka

Křivka $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je Jordánova, je-li uzavřená a $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je prosté (jednoduchá a uzavřená)

Poznámka:

Standardní volba $[\alpha, \beta]: [0, 1]$ nebo $[0, 2\pi]$

$[0, 2\pi], 0 \equiv 2\pi \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$

Jordánova křivka $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spajitá a prostá

Věta: Jordan (1887)

Bud' γ Jordánova křivka.

Pak $\mathbb{R}^2 \setminus \langle \gamma \rangle$ má právě dvě souvislé komponenty.

Jedna komponenta je omezená - vnitřek křivky, $\text{int}(\gamma)$

Druhá komponenta je neomezená - vnějšek křivky, $\text{ext}(\gamma)$

$\langle \gamma \rangle$ je společnou hranici obou komponent.

Definice: Homotopie nule

Bud' $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor, $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow X$ ^{uzavřená} křivka.

Řekneme, že γ je homotopická 0 v X , jestliže existuje spajitá zobrazení $H: [\alpha, \beta] \times [0, 1] \rightarrow X$ tak, že:

① $\forall s \in [0, 1]: H(\alpha, s) = H(\beta, s)$

② $\forall t \in [\alpha, \beta]: H(t, 0) = \gamma(t)$

③ $\forall t \in [\alpha, \beta]: H(t, 1) = c$, pro jisté $c \in X$

Definice: Jednoduchá souvislost

Bud' $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor.

Řekneme, že $(X, \mathcal{T})$ je jednoduše souvislý, jestliže:

① $(X, \mathcal{T})$ je křivkově souvislý

② Každá uzavřená křivka v X je homotopická nule.

Poznámka:

• Bud' X topologický vektorový prostor, $M \subset X$ kompaktní.
Potom M je jednoduše souvislá.
(Cvičení)

• Merikenžův $\mathbb{C} : 0 \leq r_1 < \infty, M = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$

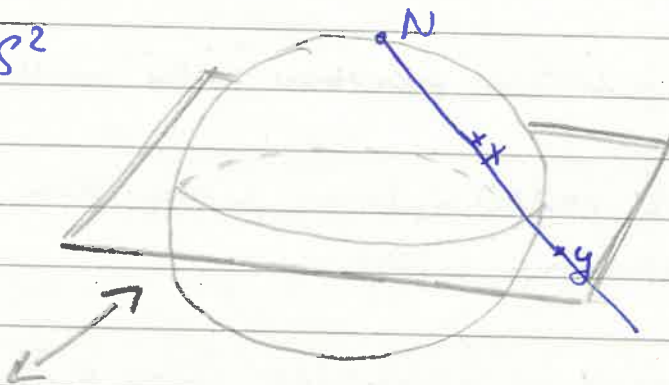
M není jednoduše souvislá

• Stereografická projekce S^2

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$N = (0, 0, 1)$$



$$\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto y$$

$$y_1 = \frac{x_1}{1-x_3}, y_2 = \frac{x_2}{1-x_3} \quad \left| \quad x_1 = \frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, x_2 = \frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, x_3 = \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \right.$$

π - diffeomorfismus : $S^2 \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong S^2$ jednobodová kompaktifikace

Věta: Jordan - jina' formule

Bud' $\gamma : S^1 \rightarrow S^2$ prosté a spojitě zobrazení (Jordanova křivka).

Paž $S^2 \setminus \langle \gamma \rangle$ má právě dvě souvislé komponenty,
obě jsou jednoduše souvislé a $\langle \gamma \rangle$ je jejich společnou hranici.

Dodatek k Jordanově větě:

Bud' $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka.

Paž $\text{int}(\gamma)$ je jednoduše souvislá.

Definice (konstrukce): index bodu vůči křivce

Bodů $\gamma: \begin{matrix} [0, 2\pi] \\ \mathbb{R} \end{matrix} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uzavřená křivka, $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \langle \gamma \rangle$.

$$\Gamma_p: [0, 2\pi] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2: t \mapsto \frac{\gamma(t) - p}{|\gamma(t) - p|} \quad (\text{1. euklidovská norma})$$

existuje spojité zobrazení $\Phi_p: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{i.č.: } \forall t \in [0, 2\pi]: \Gamma_p(t) = (\cos(\Phi_p(t)), \sin(\Phi_p(t)))$$

Φ_p je určeno jednoznačně až na odber $\Phi_p(0)$

Pro indexem bodu p vzhledem ke křivce γ rozumíme číslo:

$$\text{ind}_\gamma(p) = \frac{1}{2\pi} (\Phi_p(2\pi) - \Phi_p(0)) \in \mathbb{Z}$$

Věta: Vlastnosti indexu bodu

① $\mathbb{R}^2 \setminus \langle \gamma \rangle \rightarrow \mathbb{Z}: p \mapsto \text{ind}_\gamma(p)$ je spojité
a na souvislých komponentách je index konstantní

② index je roven 0 na neomezené komponentě

③ Při přechodu mezi sousedními komponentami
se index mění o ± 1

④ Index daného bodu se nemění při spojitě
deformaci křivky

⑤ Pro konstantní křivku je index roven nule

⑥

Věta: Index vůči Jordánově křivce

Bud' γ Jordánova křivka.

Potom $\text{ind}_\gamma(p) = 0$, pro $p \in \text{ext}(\gamma)$ a $\text{ind}_\gamma(p) = \pm 1$, pro $p \in \text{int}(\gamma)$.

Je-li $\text{ind}_\gamma(p) = 1$, pak říkáme, že γ je kladně orientována a
pro $\text{ind}_\gamma(p) = -1$ říkáme, že γ je orientována záporně.

Variace funkce, délka křivky

Definice: Dělení intervalu

Dělení intervalu $[a, b]$ je $(t_k)_{k=0}^m$, $m \in \mathbb{N}$ tak, že:
 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$.

$D(a, b)$ = množina všech dělení.

Definice: Variace funkce

Bud' $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ libovolná funkce.

Variace funkce φ na $[a, b]$ je číslo $V_a^b(\varphi)$:

$$V_a^b(\varphi) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^m |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \mid (t_k)_{k=1}^m \in D(a, b) \right\}$$

Poznámka:

$V_a^b(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \text{konst}$

Pro $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ křivku (φ spojitá)
je $V_a^b(\varphi)$ délka křivky

Věta: Vlastnosti variace

Bud' $\omega: [\tau, \sigma] \rightarrow [\alpha, \beta]$ spojito' monotónní bijekce.

Potom pro každou funkci $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ platí:

$$V_{\alpha}^{\beta}(\varphi) = V_{\tau}^{\sigma}(\varphi \circ \omega)$$

Věta: Aditivita variace

Bud' $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ funkce.

Potom $\forall \gamma \in (\alpha, \beta)$: $V_{\alpha}^{\beta}(\varphi) = V_{\alpha}^{\gamma}(\varphi) + V_{\gamma}^{\beta}(\varphi)$.

Definice: Regularní křivka

Křivka $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je regularní, právě když je po částech C^1 ,

$\text{tj.} \exists (t_k)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{D}(\alpha, \beta) : \gamma \text{ je } C^1 \text{ na } [t_{k-1}, t_k], \forall k \in \mathbb{N}$

Věta: Délka křivky

Je-li křivka $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ regularní, pak

$$V_{\alpha}^{\beta}(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$

Důsledek:

Délka regularní křivky je konečná.

Důkaz:

BÚNO (aditivita), $\gamma \in C^1([\alpha, \beta])$:

$$\bullet (t_k)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{D}(\alpha, \beta) : |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$

$$\rightarrow V_{\alpha}^{\beta}(\gamma) \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$

3. hodina

Pokračování dříve: $V_\alpha^3(\gamma) = \int_\alpha^3 |\gamma'(t)| dt$

γ' je stejnoměrně spojitá

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t', t'' \in [\alpha, \beta] : |t' - t''| < \delta \Rightarrow |\gamma'(t') - \gamma'(t'')| < \varepsilon$$

Zvolíme $\sigma \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, $\sigma = (t_k)_{k=0}^m$, $\max_{1 \leq k \leq m} |t_k - t_{k-1}| < \delta$

věta o střední hodnotě:

$$\forall k \in \hat{m} : \exists \gamma_k \in [t_{k-1}, t_k] : \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt = |\gamma'(\gamma_k)| (t_k - t_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right| = \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\gamma'(t) - \gamma'(\gamma_k)) dt + \gamma'(\gamma_k)(t_k - t_{k-1}) \right| =$$

$$\geq \sum_{k=1}^m \left(|\gamma'(\gamma_k)| (t_k - t_{k-1}) - \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\gamma'(t) - \gamma'(\gamma_k)) dt \right| \right)$$

$$> \sum_{k=1}^m \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt - \varepsilon (t_k - t_{k-1}) \right) =$$

$$= \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt - \varepsilon (\beta - \alpha)$$

$$\forall \varepsilon > 0 : V_\alpha^3(\gamma) > \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt - \varepsilon (\beta - \alpha)$$

$$\Rightarrow V_\alpha^3(\gamma) \geq \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt$$

Riemann-Stieltjesův integrál (Příklad)

Definice: Kruhost rozdělení

Bud' $\sigma = (t_k)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{D}(d, \beta)$, $n \in \mathbb{N}$

$d(\sigma) := \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|$ nazýváme kruhost rozdělení

Definice: Rozdělení s vyznačením body

$\mathcal{D}^*(d, \beta)$ je množina dělení s vyznačením body.

Pro $\sigma^* \in \mathcal{D}^*(d, \beta)$ jsou $\sigma^* = ((t_k)_{k=0}^{\infty}, (\tau_k)_{k=1}^{\infty})$, $n \in \mathbb{N}$,
kde $\sigma = (t_k)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{D}(d, \beta)$ a $\forall k \in \mathbb{N} : \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

Definice: RS-integralu součet

Bud' $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ libovolné funkce,

$\sigma^* = ((t_k)_{k=0}^{\infty}, (\tau_k)_{k=1}^{\infty}) \in \mathcal{D}^*(d, \beta)$

RS-integralu součet je:

$$S(\sigma^*, f, g) := \sum_{k=1}^n f(\tau_k) (g(t_k) - g(t_{k-1}))$$

Definice: Existence RS integrálu

Bud' $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ libovolné funkce.

Rekne, že RS integrál existuje a je roven $I \in \mathbb{C}$, značíme:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dg(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f dg = I, \text{ jestliže:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \sigma^* \in \mathcal{D}^*(d, \beta) : d(\sigma^*) < \delta \Rightarrow |S(\sigma^*, f, g) - I| < \varepsilon.$$

Věta: Existence RS integrálu

Bud' $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$.

RS integrál existuje právě tehdy když

$$(\sigma_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}^*(d, \beta) : d(\sigma_n^*) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n^*, f, g) \in \mathbb{C}.$$

Pozn.

Potom hodnota meroucí na valbě $(\sigma_n^*)_{n=1}^{\infty}$ a je rovna $\int_{\alpha}^{\beta} f dg$.

Definice: Integrující a integrovaná funkce

Uvažujeme RS integrál $\int_a^b f dg$.

Potom f je nazývána integrovaná a g integrující funkce.

Věta: Postačující podmínka existence

Bud' $f \in C([a, b])$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $V_a^b(g) < \infty$.

Potom $\int_a^b f dg$ existuje a platí:

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \|f\|_C V_a^b(g)$$

Věta: O substituci

Bud' $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ spojitá monotónní funkce, $f, g: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$.

Necht' $\int_a^b f dg$ existuje.

Potom existuje $\int_c^d f \circ \varphi d(g \circ \varphi)$ a platí: $\int_a^b f \circ \varphi d(g \circ \varphi) = \pm \int_a^b f dg$,
 $\pm$ je pro monotónii φ .

Věta: O změně funkcí

Bud' $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ a necht' $\int_a^b f dg$ existuje.

Potom existuje $\int_a^b g df$ a platí:

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Věta: Linearity

Bud' $f_1, f_2, g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$.

Ve výrazu:

$$\int_a^b (a_1 f_1 + a_2 f_2) d(b_1 g_1 + b_2 g_2) = a_1 b_1 \int_a^b f_1 dg_1 + a_1 b_2 \int_a^b f_1 dg_2 + a_2 b_1 \int_a^b f_2 dg_1 + a_2 b_2 \int_a^b f_2 dg_2$$

levá strana existuje, právě tehdy když existují pravá strana
a možná rovnost

Věta: Aditivita a měřítko

Bud' $f \in C([a, b])$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $V_2^3(g) < \infty$, $\gamma \in (a, b)$.

Potom $\int_a^\gamma f dg + \int_\gamma^b f dg = \int_a^b f dg$.

Věta: Změna limity a integrálu

Bud' $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([a, b])$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $V_2^3(g) < \infty$.

Jestliže $f_n \xrightarrow{a.s.} f$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg$$

Věta:

Bud' $f \in C([a, b])$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ regulární křivka.

Potom $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

Holomorfní funkce

Definice: Oblast

Bud' $M \subset \mathbb{C}$.

Řekneme, že M je oblast, jestliže je nespojitě otevřená a souvislá.

Poznámka:

• Značení: $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\emptyset \neq \Omega$ otevřená.

• Pro $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$: $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$

Definice: Komplexní derivace

Bud' $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.

Řekneme, že f má v z_0 derivaci podle komplexní proměnné, označíme $f'(z_0)$ nebo $\frac{df}{dz}(z_0)$, jestliže:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}.$$

Poznámka:

• Ekvivalentně: $f(z) = f'(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z)$

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2: \begin{aligned} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x + iy \\ \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2: z &\mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

Po ztotožnění $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$: $\tilde{f}: \Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0) \in \Omega$, $d\tilde{f}(x_0, y_0)$ existuje jako prvek $\mathbb{R}^{2,2}$ právě když $(L \in \mathbb{R}^{2,2})$

$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(x_0, y_0) + L \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \tilde{R}(x, y)$$

$$\rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{|\tilde{R}(x, y)|}{|(x - x_0, y - y_0)|} = 0, \quad |(u, v)| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Necht' existuje $f'(z_0)$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$

$f'(z_0) = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ existuje $\Rightarrow d\tilde{f}(x_0, y_0) = L \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \xi + i\eta \in \mathbb{C} \mapsto (\alpha + i\beta)(\xi + i\eta) = \alpha\xi - \beta\eta + i(\beta\xi + \alpha\eta)$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} \alpha\xi - \beta\eta \\ \beta\xi + \alpha\eta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Naopak:

Necht' existuje $L \in \mathbb{R}^{2,2}$, tj. $d\tilde{f}(x_0, y_0) = L$

$$f(x+iy) = u(x+iy) + i v(x+iy)$$

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f'(z_0)$ existuje, práve když:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Cauchy-Riemannovy
podmienky

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

4 hodina (samostudium)

Věta: Cauchy - Riemannovy podmínky

Nechť $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uvažována jako funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ má
tato-li derivaci $df'(x_0, y_0)$ v bodě $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$.

Položíme $u := \operatorname{Re}(f)$, $v := \operatorname{Im}(f)$.

Potom komplexní derivace v bodě z_0 , $f'(z_0)$ existuje právě
tehdy, když jsou splněny Cauchy - Riemannovy podmínky.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Důsledek:

Bud' $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

Nechť $u := \operatorname{Re}(f)$, $v := \operatorname{Im}(f)$ mají spjaté parciální derivace
1. řádu na nějakém okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$.

Potom $f'(z_0)$ existuje právě tehdy, když jsou splněny CR podmínky.

Příklad:

Pro výpočet komplexních derivací platí obdobně pravidla
jako pro reálné funkce reálné proměnné:

① Bud' $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.

Jestliže $f'(z_0)$ existuje, pak f je spjata v z_0 .

② Bud' $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Jestliže $f'(z_0), g'(z_0)$ existují, pak platí:

$$(\lambda f + g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

Poznámka:

Bud' $U, V \in \mathcal{T}_0 \setminus \{\emptyset\}$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $g: V \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in U$.

Nechť $f(U) \subset V$ a položíme: $w_0 := f(z_0)$
 $h := g \circ f$

Jestliže existují $f'(z_0), g'(w_0) \in \mathbb{C}$,
potom existuje $h'(z_0) \in \mathbb{C}$ a platí:

$$h'(z_0) = f'(z_0) g'(w_0)$$

Definice: Holomorfní funkce

Bud' $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Řekneme, že f je holomorfní na Ω , jestliže:

$$\forall z \in \Omega: \exists f'(z) \in \mathbb{C}.$$

Množinu holomorfních funkcí na Ω značíme $H(\Omega)$

Poznámka:

$H(\Omega)$ je asociativní komutativní algebra.

Definice: Celá funkce

Je-li f holomorfní na $\mathbb{C}$, říkáme, že f je celá funkce.

Poznámka:

Ztotožníme $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$ a místo reálných souřadnic x, y na $\mathbb{R}^2$ použijeme komplexní souřadnice:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy \iff x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Definice:

Bodky x, y souřadnice v $\mathbb{R}^2$ ve standardní bázi a $z = x + iy$ komplexní souřadnice v $\mathbb{C}$.

Pak definujeme:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Teorem:

Bodky $U \in \mathbb{R}^2$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $(x_0, y_0) \in U$.

Označme $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x, y)) \\ \operatorname{Im}(f(x, y)) \end{pmatrix}$.

Než existují totální derivace $df^{\tilde{f}}(x_0, y_0)$.

Potom pro všechna $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ platí:

$$(1. i) \quad d\tilde{f}(x_0, y_0) \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial}{\partial z} f(x_0, y_0) \zeta + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x_0, y_0) \bar{\zeta}$$

$$\text{ kde } \zeta = \xi + i\eta$$

Důkaz:

Věta:

Buď $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Nechť f má spojitě parciální derivace 1. řádu na Ω .

Potom f je holomorfní na Ω , právě, když:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0 \text{ identicky na } \Omega$$

Důkaz:

Pať lze psát:

$$\forall z_0 \in \Omega, z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}, f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f(x_0, y_0)$$

5. hodina (samostudium) Analytičle' fenzice

Präparat:

Будьте $(M_n)_{n \geq 0} \subset C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ последовательность обобщённых комплексных функций:

4) zakoro', se :

$$u(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

konverguje alespoň v jednom bodě $x_0 \in I$.

a) find $r(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$

конвергует равномерно на I .

Potom žada $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(x)$ konverguje stejnoměrně na I

a plat' : $r(x) = u'(x)$ a $u \in C^1(\mathbb{R})$

$$\cdot \text{Bnd}^{\text{Te}}(C_n) \in C, a \in C.$$

Pro podmínek konvergence $R \in [0, +\infty]$ můžeme říci

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

plat 1: $\frac{1}{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{\frac{1}{n}}$

řada $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n$ konverguje absolutně na $B(a, R)$ a konverguje slyinoměrně na $\overline{B(a, R)}$

$$\rightarrow f \in C(B(a, r))$$

Definice: Analytická funkce

$$\text{Bnd } f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}.$$

Zoberme, že funkcia f je analytická na Ω , jestliže
 pro každý bod $z_0 \in \Omega$ existuje poloměr $r > 0$ takový, že

$B(20, r) \subset \mathbb{R}$ a f'je na $B(20, r)$ vyj'adit' jako konverguj' moci'nou řadu se středem v 20.

Věta:

Nechť mocninna' řada $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$

ma' poloměr konvergence $R > 0$.

Potom $f \in H(B(a, R))$ a

$$\forall z \in B(a, R) : f'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (z-a)^{n-1}$$

Důkaz:

BÚNO $a=0$:

Uvažujme f jako funkci dvou reálných proměnných, x, y ,
 $z := x + iy$

• Ukažme, že f má spjaté parciální derivace 1. řádu:

Pro pevné $y \in \mathbb{R}, |y| < R$ zavedme funkci reálné proměnné:

$$\forall x \in I_y := (-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2})$$

$$h_y(x) := f(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x + iy)^n$$

$$h_n(x) := C_n (x + iy)^n \in C^1(I_y), \text{ kde } \#$$

$$h_y \text{ konverguje v } x=0 \text{ na } I_y$$
$$a \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x + iy)^{n-1} \xrightarrow{f'} \quad$$

→ $h_y(x)$ konverguje stejnoměrně a platí

$$h_y'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x + iy) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x + iy)^{n-1}$$

$$\rightarrow \text{Zi stejného derivodu } h_x'(y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x + iy) = i \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x + iy)^{n-1}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x + iy) = 0$$

Důsledek:

Pro stejných předpokladech jako v předchozí větě platí: f' má na $B(a, R)$ komplexní derivace všech řádů a platí:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) C_n (z-a)^{n-k}$$

speciálně: $k \in \mathbb{N}_0$: $f^{(k)}(a) = k! C_k$

Důsledek:

Bud' $R > 0$, $a \in \mathbb{C}$ a necht' je dána funkce $f: B(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$, kterou lze vyjádřit na $B(a, R)$ ve tvaru mocninného řádu s komplexními koeficienty.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n.$$

Pakem $k \in \mathbb{N}_0$: $C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

To znamená, že koeficienty jsou určeny jednoznačně

Důsledek:

Každá analytická funkce na Ω je holomorfní.

Definice: Vyjádření funkce mocninnou řadou

Bud' $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Řekneme, že funkci f lze vyjádřit mocninnou řadou na Ω , jestliže na každém kruhu s kladným poloměrem $B(a, r) \subset \Omega$ lze f vyjádřit ve tvaru řady se středem v bodě a .

Křivkový integrál

Poznámka:

• Značení:

Bud'že $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $\gamma \in C([\alpha, \beta])$ regulární křivka,
 $f \in C(\langle \gamma \rangle)$.

$$\text{Položíme } \int_{\gamma} f := \int_{\gamma} f(z) d\mathbf{z} := \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Takto zavedeš symbol měřitelné integrálem
funkce f podél křivky γ .

• Je třeba rozlišovat mezi integrálem funkce f podél
křivky γ a integrálem složek funkce přes jednoznačnou
variabelu $\langle \gamma \rangle$.

Jestliže $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ představuje parametrizaci
křivky $\langle \gamma \rangle \subset \mathbb{C}$, pak:

$$\int_{\langle \gamma \rangle} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

Poznámka:

Závislost regulární křivky na substituci:

Mějme danou regulární křivku $\gamma \in C([\alpha, \beta])$.

Dále buď $\varphi \in C^1[\alpha_1, \beta_1]$ reálná funkce, je:

① $\forall t \in [\alpha_1, \beta_1], \varphi'(t) > 0$

② $\varphi(\alpha_1) = \alpha, \varphi(\beta_1) = \beta$

Pakom φ zobrazuje bijektivně $[\alpha_1, \beta_1]$ na $[\alpha, \beta]$ a
existuje $\varphi^{-1} \in C^1([\alpha, \beta])$.

Položíme $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi \in C([\alpha_1, \beta_1])$

Křivka γ_1 je opět regulární a $\langle \gamma_1 \rangle = \langle \gamma \rangle$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(\varphi(t))) \gamma_1'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f\end{aligned}$$

Beměťka:

Opačná křivka:

Bud' $\gamma \in C([a, b])$ regulární křivka.

Položíme $\forall t \in [\alpha, \beta] : \gamma_1(t) := (\alpha + \beta - t)$

Pakom $\gamma_1 \in C([\alpha, \beta])$ je také regulární křivka a $\langle \gamma_1 \rangle = \langle \gamma \rangle$

Pro libovolnou funkci $f \in C(\langle \gamma \rangle)$ máme:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\alpha + \beta - t)) \gamma'(\alpha + \beta - t) dt = \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f\end{aligned}$$

Rikáme, že γ_1 je opačná křivka ke γ . Někdy značíme $-\gamma$

Věta:

Bud' $\gamma \in C([a, b])$ regulární křivka, $\varphi, \psi \in C(\langle \gamma \rangle)$

Položme $\Omega = \mathbb{C} \setminus \varphi(\langle \gamma \rangle)$

($\langle \gamma \rangle, \varphi(\langle \gamma \rangle)$ jsou kompaktní)

$$\text{Potom funkce } f(z) := \int_{\gamma} \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi) - z} d\xi$$

je dobře definována na Ω a lze ji vyjádřit mocninnou řadou.

Důkaz:

Pro libovolné $z \in \Omega$ je integrand spojitou funkcí a proměnné $\xi \in \langle \gamma \rangle$, a tedy integrál existuje a hodnota $f(z)$ je dobře definována.

Bud' $B(a, r) \subset \Omega$ libovolná koule:

Podle definice Ω platí: $\varphi(\langle \gamma \rangle) \cap B(a, r) = \emptyset$

$$\rightarrow \forall \xi \in \langle \gamma \rangle: |\varphi(\xi) - a| \geq r$$

$$\rightarrow \frac{|z - a|}{|\varphi(\xi) - a|} \leq \frac{|z - a|}{r} < 1$$

a tedy lze psát, že:

$$\frac{1}{\varphi(\xi) - z} = \frac{1}{(\varphi(\xi) - a)(1 - \frac{z - a}{\varphi(\xi) - a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\varphi(\xi) - a)^{n+1}}$$

Tato řada konverguje stejnoměrně pro $\xi \in \langle \gamma \rangle$.

Proto můžeme zaměnit sumu a integrál:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi) - z} d\xi &= \int_{\gamma} \psi(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\varphi(\xi) - a)^{n+1}} d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \int_{\gamma} \frac{\psi(\xi)}{(\varphi(\xi) - a)^{n+1}} d\xi \end{aligned}$$

Index bodu vzhledem k uzavřené křivce

Definice: index bodu vzhledem ke křivce:

Budť γ regulární uzavřená křivka, $\Omega := \mathbb{C} \setminus \gamma$, $z \in \Omega$.

Indexem bodu z vzhledem ke křivce γ nazýváme číslo

$$\text{ind}_{\gamma}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z}$$

Věta:

Budť γ regulární křivka (uzavřená), $\Omega := \mathbb{C} \setminus \gamma$.

Potom funkce $\Omega \ni z \mapsto \text{ind}_{\gamma}(z) \in \mathbb{C}$

nalýrá pouze celočíselných hodnot, je konstantní na souvislých komponentách množiny Ω a na neomezené souvislé komponentě nalýrá hodnotu 0.

Důkaz:

• Je-li $M \subset \mathbb{C}$ omezená, potom $\mathbb{C} \setminus M$ existuje právě jedna neomezená souvislá komponenta

Vzhledem k předpokladům je γ spojitá na nějakém kompaktním intervalu $[\alpha, \beta]$ a navíc je na tomto intervalu po částech diferencovatelná. Přitom $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Podle předchozí vědy je funkce $\text{ind}_{\gamma}(z)$ analytická na Ω .
A tedy spojitá

$$\text{ind}_{\gamma}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$

Položíme $\varphi(t) := \exp\left(\int_{\alpha}^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$

Zřejmě $\varphi \in C([a, b])$ a φ je po částech C^1 na $[a, b]$.

$$\varphi'(t) = \frac{f'(t)}{f(t) - z} \varphi(t), \quad t \in [a, b]$$

$$\varphi(a) = 1$$

$$\varphi(b) = \exp(2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z))$$

$$\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{f(t) - z} \quad \text{pro } t \in [a, b]$$

Zřejmě $\psi \in C([a, b])$ a ψ je po částech C^1 na $[a, b]$.

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{f(t) - z} - \frac{\varphi(t)f'(t)}{(f(t) - z)^2} = 0, \quad t \in [a, b]$$

a tedy ψ je konstantní na $[a, b]$:

$$\psi(t) = \psi(a) = \frac{1}{f(a) - z}, \quad t \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{f(t) - z}{f(a) - z}, \quad t \in [a, b]$$

Speciálně pro $t = b$:

$$\exp(2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z)) = \varphi(b) = \frac{f(b) - z}{f(a) - z} = 1$$

Tato rovnost ale můžeme platit jen když $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

a) Spojitým obzorem souvislé množiny je souvislá množina.

Neproždnutí souvislým podmnožinami $\mathbb{Z}$ jsou jednobodové množiny.

To znamená, že $\text{ind}_\gamma(z)$ zobrazuje souvislé komponenty Ω na jednobodové množiny v $\mathbb{Z}$ a je na nich tedy konstantní!

Označme Ω_∞ neomezenou komponentu Ω .

Pak existují $n \in \mathbb{Z}$: $\text{ind}_\gamma(\Omega_\infty) = n$.

$$\begin{aligned} |\text{ind}_\gamma(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t) - z|} dt \leq \frac{1}{2\pi \text{dist}(z, \gamma)} \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \\ &= \frac{1}{2\pi \text{dist}(z, \gamma)} V_\alpha^B(\gamma) \end{aligned}$$

$$n = \text{ind}_\gamma(z) \rightarrow 0 \text{ po } z \rightarrow \infty, z \in \Omega_\infty \Rightarrow n=0$$

6. hodina Cauchyova věta I: komplexní množiny (samostudium)

Poznámka:

Budeme používat následující pravidla pro výpočet derivace:

Budť $U \subset \mathbb{C}$ otevřená podmnožina,

$F \in H(U)$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, $\gamma \in C^1(I)$ a necht' $\gamma \subset U$.

Pak:

$$\forall t \in I: \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t)) \gamma'(t)$$

F' značí derivaci podle komplexní proměnné,
zatímco $\gamma'(t)$ je derivace podle reálné proměnné.

Důkaz:

Uvažujme funkci F jako $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \frac{\partial}{\partial x} F(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + \frac{\partial}{\partial y} F(\gamma(t)) \gamma_2'(t),$$

$$\text{kde } \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) &= \frac{\partial}{\partial z} F(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + i \frac{\partial}{\partial z} F(\gamma(t)) \gamma_2'(t) = \\ &= F'(\gamma(t)) \gamma'(t) \end{aligned}$$

Tworem:

Bud' $F \in H(\Omega)$, $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ regulární křivka.

Jestliže $F' \in C(\Omega)$, potom:

$$\int_{\gamma} F' = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).$$

Speciálně pokud γ regulární uzavřená křivka, tak $\int_{\gamma} F' = 0$

Důkaz:

$$\int_{\gamma} F' = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).$$

Důsledek:

Bud' γ regulární uzavřená křivka $\sim \Omega$.

Potom $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $\int_{\gamma} z^n dz = 0$

Jestliže $0 \notin \langle \gamma \rangle$, pak také $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$: $\int_{\gamma} z^n dz = 0$

$$\text{a } \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{ind}_{\gamma}(0)$$

Důkaz:

$$z^n = \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{n+1}}{n+1} \right), n \neq -1$$

Poznámka:

Značení: Bud' (X, ρ) metrický prostor, $K \subset X$ neprázdná kompaktní podmnožina.

Průměrem množiny K rozumíme diam $K := \max_{x, y \in K} \rho(x, y)$

Lemma:

Bud' (X, ρ) topologický prostor a $K_n \subset X, n \in \mathbb{N}$
klesající posloupnost neprázdných kompaktních množin.

Potom:

a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$

b) Je-li navíc X metrický prostor a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } K_n = 0$,
pak právě $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ obsahuje právě jeden bod

Důkaz

a) Prostor K_1 je kompaktní a $\{K_n | n \in \mathbb{N}\}$ je systém uzavřených podmnožin αK_1 , který má díky monotonii vlastnost:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \bigcap_{k=1}^n K_k = K_n \neq \emptyset$$

z kompaktnosti K_1 plyne tvrzení

b) Necht' navíc X je metrický prostor s metrikou ρ
a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } K_n = 0$

$$\text{Necht' } \exists x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n, x \neq y$$

$$\rho(x, y) \leq \text{diam } \bigcap_{k=1}^n K_k \rightarrow 0 \Rightarrow x = y$$

Věta: Goursatora

Bud' $f \in H(\Omega)$.

Pakom pro každý trojúhelník $\Delta \subset \Omega$ platí:

$$\int_{\partial \Delta} f = 0$$

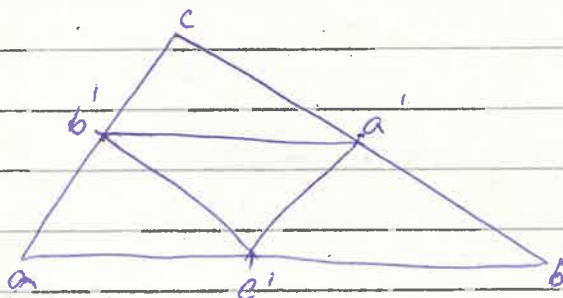
Důkaz:

Označme $a, b, c \in \mathbb{C}$ vrcholy trojúhelníku $\Delta \subset \Omega$.

$$\text{Již } \Delta = \Delta(a, b, c)$$

$$\text{Položíme } J = \int_{\partial \Delta} f, \quad L = |\partial \Delta| = |a-b| + |b-c| + |a-c|$$

Označme po řadě a', b', c' středy úseček $[b, c]$, $[c, a]$, $[a, b]$ a
dále $\Delta_{11} = \Delta(a, c', b')$, $\Delta_{12} = \Delta(c', b', a)$, $\Delta_{13} = \Delta(b', c', a')$, $\Delta_{14} = \Delta(b', a', c)$



$$\text{Dále } |\partial \Delta_{1j}| = \frac{1}{2} |\partial \Delta| = \frac{1}{2} L, \quad j \in \hat{4}$$

$$\sum_{j=1}^4 \int_{\partial \Delta_{1j}} f = \int_{\partial \Delta} f \rightarrow |J| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\partial \Delta_{1j}} f \right|$$

$$\text{a } \exists k \in \hat{4} : \left| \int_{\partial \Delta_{1k}} f \right| \geq \frac{1}{4} |J|$$

Označme $\Delta_1 := \Delta_{1k}$:

$$\Delta_1 \subset \Delta : |\partial \Delta_1| = \frac{1}{2} |\partial \Delta| \wedge \left| \int_{\partial \Delta_1} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial \Delta} f \right|$$

Tento postup zopakujeme špóčetníkrát:
 Rekurzivně jsme získali posloupnost $\{\Delta_m\} \subset \Omega$:

$$\Delta_0 = \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \text{ s vlastností:}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}: |\partial \Delta_{m+1}| = \frac{1}{2} |\partial \Delta_m| \wedge \left| \int_{\partial \Delta_{m+1}} f \right| \geq \left| \int_{\partial \Delta_m} f \right|$$

a tedy:

$$\forall m \in \mathbb{N}: |\partial \Delta_m| = 2^{-m} |\partial \Delta| \wedge \left| \int_{\partial \Delta_m} f \right| \geq 4^{-m} |J|$$

a diam Δ_m je rovna délce nejdelší strany $\leq 4 |\partial \Delta_m|$

$$\text{diam } \Delta_m \leq 4 \cdot 2^{-m} |\partial \Delta| \leq 2^{-m} L \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\rightarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_m = \{z_0\} \subset \Delta$$

Protože $f \in H(\Omega)$ tak $\exists f'(z_0)$ díky čemuž můžeme funkci f dobře aproximovat v okolí z_0 lineární funkcí:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall z \in B(z_0, \delta) \cap \Omega: |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

Zvolíme $m \in \mathbb{N}$ dostatečně velké, tak aby $2^{-m} \cdot L < \delta$
 pro dané $\varepsilon > 0$.

$$\text{Potom diam } \Delta_m \leq 2^{-m} \cdot L < \delta$$

$$\text{a tedy } \forall z \in \Delta_m: |z - z_0| \leq \text{diam } \Delta_m < \delta$$

A podle předchozí věty:

$$\int_{\partial \Delta_m} f(z) dz = \int_{\partial \Delta_m} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz$$

$$\rightarrow 4^{-n} |J| = \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial \Delta_n} (f(z) - f'(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)) dz \right| \leq$$

$$\leq \max_{z \in \partial \Delta_n} |f(z) - f'(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| |\partial \Delta_n| \leq$$

$$\leq \varepsilon \max_{z \in \partial \Delta_n} |z-z_0| |\partial \Delta_n| \leq \varepsilon \cdot \text{diam}(\Delta_n) |\partial \Delta_n| \leq$$

$$\leq \varepsilon (2^{-n} L)^2$$

$$\rightarrow |J| \leq \varepsilon L^2 \rightarrow |J| = 0$$

7. hodina Cauchyova věta I: konvexní množiny - pokračování
(samostudium)

Věta:

Bud' $f \in H(\Omega; \mathbb{C})$ pro nějaké $\Omega \subset \mathbb{C}$ a necht' $f \in C(\Omega)$.

Pakom pro každý trojúhelník $\Delta \subset \Omega$ platí:

$$\int_{\partial \Delta} f = 0$$

Lemma:

Buďte $\Omega \in \mathbb{C}$ konvexní množina, $f \in C(\Omega)$.

Necht f splňuje podmínku: $\forall$ trojúhelník $\Delta \in \Omega$: $\int_{\partial \Delta} f = 0$.

Potom existují funkce $F \in H(\Omega)$: $f = F'$

Důkaz:

Zvolme pevně $a \in \Omega$.

Díky konvexnosti množiny Ω můžeme definovat funkci:

$$\forall z \in \Omega: F(z) := \int_{[a, z]} f(\xi) d\xi$$

Ukažeme, že $f = F'$:

Buďte $z, z_0 \in \Omega$ dva libovolné body.

Díky konvexnosti je $\Delta(a, z, z_0) \subset \Omega$.

Z podmínky $\int_{\partial \Delta} f = 0$ plyne:

$$0 = \int_{\partial \Delta(a, z, z_0)} f = \int_{[a, z]} f(\xi) d\xi - \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi - \int_{[a, z_0]} f(\xi) d\xi$$

$$\text{tj. } F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi$$

$$\text{Zřejmě } \int_{[z_0, z]} f'(z_0) = f'(z_0)(z - z_0)$$

$$\rightarrow \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} (f(\xi) - f'(z_0)) d\xi$$

$$\rightarrow \left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| = \frac{1}{|z - z_0|} \left| \int_{[z_0, z]} (f(\xi) - f'(z_0)) d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|z - z_0|} \max_{\xi \in [z_0, z]} |f(\xi) - f'(z_0)| |z - z_0| \leq$$

$$\leq \max_{\xi \in [z_0, z]} |f(\xi) - f'(z_0)|$$

$$\rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) = 0$$

Věta:

Bud' $\Omega \in \mathcal{D}$, konvexní množina, $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$.

Nechť $f \in C(\Omega)$, pak $\int_{\gamma} f = 0$.

Pro každou regulární uzavřenou křivku $\gamma \subset \Omega$

Věta:

Bud' $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená konvexní množina, $f \in H(\Omega)$
a γ regulární uzavřená křivka $\subset \Omega$.

Pak pro každé $z \in \Omega$, $z \notin \langle \gamma \rangle$ platí:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \operatorname{ind}_{\gamma}(z)$$

Důkaz

Bud' $z \in \Omega \setminus \langle \gamma \rangle$ libovolně

Pro $\xi \in \Omega$ definujeme:

$$g(\xi) := \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z \end{cases}$$

$g \in C(\Omega) \wedge g \in H(\Omega \setminus \{z\})$

Podle předchozí věty $\int_{\gamma} g = 0$

$$0 = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - 2\pi i \operatorname{ind}_{\gamma}(z) f(z)$$

Vztah mezi holomorfními a analytickými funkcemi

Věta:

Bud' $f \in H(\Omega)$ libovolná.

Potom f lze na Ω vyjádřit mocninovou řadou.

$\hookrightarrow$ Kdykoliv $B(a, r) \subset \Omega$ pro jisté $r > 0$ a $a \in \Omega$, potom funkci f lze na $B(a, r)$ vyjádřit jako konvergentní mocninovou řadu se středem a bodě $a \in \Omega$.

Důkaz:

Bud' $B(a, r) \subset \Omega$ libovolně:

Zvolíme si něco menší poloměr r' : $0 < r' < r$

Definujeme γ : $\gamma(t) := a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

γ je regulární uzavřená křivka s konver. oblastí $B(a, r)$
navíc $\text{ind}_{\gamma}(z) = 1 \quad \forall z \in B(a, r') = \text{int } \gamma$

$$\rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \forall z \in B(a, r')$$

$$\rightarrow \forall z \in B(a, r'): f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, \quad C_n$$

$$\text{ kde } C_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

$$\text{ zároveň však } C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \text{ který nepobíhá na } r'$$

Poznámka:

Tuto větu musíme chápat následovně:

Bud' $f \in H(B(a, r))$, kde $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$

a zvažme mocninou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$,

$$\text{kde } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad \gamma(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Označme R poloměr konvergence této řady.

Paž platí:

Koeficienty C_n nezávisí na volbě r ,
 $R \geq r$ a rovnost platí $\forall z \in B(a, r)$

Věta:

Bud' $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Potom následující výpady jsou ekvivalentní:

- ① f je holomorfní na Ω
- ② f je analytická na Ω
- ③ f lze na Ω vyjádřit mocninou řadou

Důkaz:

- ② $\Rightarrow$ ① jasně ✓
① $\Rightarrow$ ③ předchozí věta
③ $\Rightarrow$ ② jasně ✓

Důsledek:

Je-li $f \in H(\Omega)$, pak také $f' \in H(\Omega)$.

~~Telem~~ Důkaz:

Bud' $f \in H(\Omega)$, pak ji lze vyjádřit mocninou řadou
a k derivovat člen po členu $\rightarrow f' \in H(\Omega)$

Poznámka:

Je-li funkce f holomorfní na Ω , pak f má na Ω komplexní derivace v každém bodě.

Věta: Morera

Bud' $f \in C(\Omega)$ a necht' $\int_{\gamma} f = 0$, $\forall \gamma \in \Omega$.

Pakom $f \in H(\Omega)$.

Důkaz:

Bud' $a \in \Omega$ libovolný bod.

- Zvolme $r > 0$: $B(a, r) \subset \Omega$ ($B(a, r)$ je konvexní)

$\Rightarrow \exists F \in H(B(a, r))$: $F' = f \Rightarrow f' \in H(B(a, r)) \Rightarrow f \in H(\Omega)$

Kořeny holomorfních funkcí

Pomůcka:

Značíme:

Bud' f holomorfní funkce na Ω .

Množinu kořenů funkce f značíme $Z(f)$:

$$Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(a) = 0\} = f^{-1}(\{0\}), \quad \overline{Z(f)} = Z(\overline{f})$$

Lemma:

Bud' $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$.

Nechť f není identicky rovna 0 na žádném okolí bodu a .

Pak existuje jedináčkové $m \in \mathbb{N}_0$ a $g \in H(\Omega)$, takže, že:

$$\forall z \in \Omega: f(z) = (z-a)^m g(z) \wedge g(a) \neq 0$$

Důkaz:

• Existence:

Zvolme $\eta > 0$: $B(a, \eta) \subset \Omega$

$$\rightarrow \forall z \in B(a, \eta): f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Vzhledem k předpokladu alespoň jeden koeficient c_m musí být nenulový

1 Položíme $m := \min \{m \in \mathbb{N}_0 \mid c_m \neq 0\}$

$$g_1(z) := \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m}, \quad \forall z \in B(a, \eta)$$

Podle této volby je $g_1 \in H(B(a, \eta))$, $g_1(a) = c_m \neq 0$
a rovnost $f(z) = (z-a)^m g_1(z)$ je splněna na $B(a, \eta)$

Další položíme $U = \Omega \setminus \{a\}$ a $g_2(z) := \frac{f(z)}{(z-a)^m} \quad \forall z \in U$

Pakem $B(a, r) \cup U = \Omega$ a funkce g_1, g_2 se shodují na $U \cap B(a, r)$.

Pak $\exists! g \in H(\Omega) : g|_{B(a, r)} = g_1 \wedge g|_U = g_2$

Jednoznačnost:

Zřejmá

Definice: násobnost kořene

Bud' $f \in H(\Omega)$ a necht' $a \in \Omega$ je izolovaný kořen funkce f .

Pakem číslo $m \in \mathbb{N}_0$ z lemma je kladné a nazýváme jej násobností kořene a .

Křít:

Bud' $f \in H(\Omega)$ a necht' Ω je oblast.

Pakem nastane právě jeden ze dvou případů:

① $f = 0$ identicky na Ω ($Z(f) = \Omega$)

② $Z(f)$ nemá hromadný bod

Důkaz:

Označme A množinu všech hromadných bodů $Z(f) \cap \Omega$.

I. Ukážeme, že A je uzavřeno v Ω :

• $Z(f)$ je uzavřeno v Ω a obsahuje tedy všechny své hromadné body $\rightarrow A \subset Z(f)$

$\rightarrow$ hromadné body $A \subset$ hromadné body $Z(f) = A$

$\rightarrow A$ je tedy uzavřeno v Ω

II. Ukážeme, že A je otvorená v Ω

Bud' $a \in A \subset Z(f)$ liboraly' bod.

Pro spor predpokladáme, že f nemá identicky sama nulu na žiadnom okolí bodu a .

$$\rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, g \in H(\Omega): f(z) = (z-a)^m g(z)$$

g je spgita' $\rightarrow \exists \delta > 0: B(a, \delta) \subset \Omega: g(z) \neq 0, \forall z \in B(a, \delta)$

$$\rightarrow B(a, \delta) \cap Z(f) = \{a\}$$

A teda „ a “ nemá žiadnym bodom $Z(f)$ a to je spor

A teda f je identicky sama nula na nejakej oblasti, ~~ale~~ $B(a, \delta)$ pre jiste' $\delta > 0$

$$\rightarrow B(a, \delta) \subset A$$

III. A je súčasne otvorená i uzavretá v Ω

$$\rightarrow A = \Omega \vee A = \emptyset$$

Dôkaz:

Bud' $f \in H(\Omega), a \in Z(f)$.

Potom nastane jedna z možností:

- ① $f=0$ na nejakej okolí bodu „ a “
- ② a je izolovaný bod $Z(f)$

Dôkaz:

Bud' $B(a, n) \subset \Omega$, $B(a, n)$ sozvisla' a teda podľa predchod' vety je buď $f=0$ na $B(a, n)$, alebo nemá žiadnym bodom $Z(f)$

Důsledek:

Bud' $f \in H(\Omega)$ a necht' Ω je oblast.

Dále necht' f není identicky 0 na Ω .

$\mathbb{P}$.

Potom pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$ je
průměr $K \cap Z(f)$ konečný (nebo prázdný).

Speciálně odсюда plyne, že množina kořenů $Z(f)$ je
nejvýše spočetná.

Důkaz:

Kdyby by množina $K \cap Z(f)$ obsahovala nekonečně mnoho
bodů, pak $Z(f)$ nutně má v K hromadný bod a to je spor.

K důkazu spočetnosti stačí uvažovat úseky následující:

Bud' $U \in \mathcal{C}$, potom existuje spočítaný systém kompaktních množin $(K_n)_{n=1}^{\infty}$
že $K_n \subset U$, $\forall n \in \mathbb{N}$ a $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Důsledek:

Bud' $f, g \in H(\Omega)$ a necht' Ω je oblast.

Jestliže množina $M = \{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ má hromadný bod,
pak $\forall z \in \Omega : f(z) = g(z)$.

Důkaz:

Stačí aplikovat větu o $Z(f)$ na $f-g$.

Izolované singulární holomorfní funkce

Poznámka:

Značení:

Pro $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ zavedeme:

$$B'(a, r) := B(a, r) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$$

Definice: Izolovaná singulárna

Bude $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.

V tom případě řekneme, že holomorfní funkce f má v bodě „ a “ izolovanou singulárnu.

Jestliže lze f v izolované singulární bodě a dodefinovat tak, že rozšířená funkce je holomorfní všude na Ω , pak řekneme, že izolovaná singulárna v bodě „ a “ je odstranitelná.

Poznámka:

Ukážeme, že v tom, aby izolovaná singulárna byla odstranitelná je nutné a stačí, aby byla funkce omezená na nějakém okolí daného bodu.

Věta:

Bude $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.

Singulárna funkce v bodě a je odstranitelná, právě když existuje poloměr $r > 0$: $B(a, r) \subset \Omega$ a f je omezena na $B'(a, r)$.

Důkaz:

$\Rightarrow$ Mějme!

$\Leftarrow$: Definujme pomocnou funkci $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$:

$$h(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z), & z \neq a \\ 0, & z = a \end{cases}$$

• Zřejmě $h \in H(\Omega \setminus \{a\})$

komplexní derivace h všude existuje i v bodě „ a “ (omezenost)

$$h'(a) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{h(a+w) - h(a)}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} w f(a+w) = 0$$

Zvolme $\pi > 0$: $B(a, \pi) \subset \Omega$

$$\text{Paž } \forall z \in B(a, \pi) : h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-a)^n$$

$$\text{Přitom } h(a) = h'(a) = 0 \Rightarrow C_0 = C_1 = 0$$

$$\forall z \in B(a, \pi) : f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} C_n (z-a)^{n-2}$$

Jestliže položíme $f(a) = C_2$, pak rozšířená funkce je analytická na $B(a, \pi) \Rightarrow f$ je holomorfní na Ω

Věta:

Bodě $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.

Pakom nastane právě jedna ze tří možností:

- ① funkce f má v bodě „ a “ odstranitelnou singularitu
- ② existují jednonásobná $m \in \mathbb{N}$, $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{C}$, $C_m \neq 0$, se:

$$f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(z-a)^k} \text{ má v bodě „} a \text{“ odstranitelnou singularitu}$$

- ③ pro každé $\pi > 0$ platí, že $B(a, \pi) \subset \Omega$ je $f(B(a, \pi))$ hustá v $\mathbb{C}$

Definice: Pořádek m

Při stejném značení jako v předchozí větě ② řekneme, že funkce f má v bodě „ a “ pořádek $m \in \mathbb{N}$

Funkci $\sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(z-a)^k}$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ nazýváme hlavní částí funkce f v bodě „ a “.

V případě ③ říkáme, že funkce f má v bodě „ a “ podstatnou singularitu

Lemma:

Případy ①, ②, ③ 2 věty lze charakterizovat následovně:

- ① existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$
- ② existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ ($\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$)
- ③ limita $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ neexistuje

Speciálně odtud vyplývá, že případy ①, ②, ③ se navzájem vylučují

Důkaz:

① Holomorfní funkce na Ω je spojitá v každém bodě $a \in \Omega$.

② Podle toho, jak byl případ ② popsán ve větě, existuje $h \in H(\Omega)$, tak že $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{(z-a)^k} + h(z) = \frac{1}{(z-a)^m} (C_m + \sum_{k=1}^{m-1} C_k (z-a)^{m-k} + (z-a)^m h(z)) = \\ &= \frac{g(z)}{(z-a)^m} \end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = C_m \neq 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$$

③ Necht' $f(B(a, r))$ je hustá v $\mathbb{C}$ pro každé $r > 0: B(a, r) \subset \Omega$.

Zvolme klesající posloupnost kladných poloměrů $(r_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^+$

$$B(a, r_n) \subset \Omega \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Bud' $w \in \mathbb{C}$ libovolně.

Pro nějaké j je $f(B(a, r_j))$ hustá v $\mathbb{C}$, a proto můžeme zvolit $z_n \in B(a, r_j): |f(z_n) - w| < \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$$

Důkaz řeší:

Podle lemmatu nastane nejvýše jeden z případů ①, ②, ③.
Ukažeme, že alespoň jeden z těchto případů nastane

Všechny můžeme přeformulovat takto:

Ještě nenastane ③, pak nastane ① nebo ②.

Necht' tedy ③ nenastal:

$\exists w \in \mathbb{C}, \sigma > 0$ $\downarrow$
 $\exists \delta > 0$
 $\exists \eta > 0$
 $\exists \eta: \exists w \in \mathbb{C}, \sigma > 0: B(a, \eta) \subset \Omega \wedge f'(B(a, \eta)) \cap B(w, \sigma) = \emptyset$

$\exists \delta > 0$
 $\exists \eta > 0$
 $\exists \eta: \forall z \in B(a, \eta): |f(z) - w| \geq \delta$

Položíme: $F(z) := \frac{1}{f(z) - w}, \forall z \in B(a, \eta)$

• Zřejmě $F \in H(B(a, \eta))$ a $\forall z \in B(a, \eta): 0 < |F(z)| \leq \frac{1}{\delta}$

F je tedy omezená, a proto má odstranitelnou singularitu a lze ji obdefinovat, aby $F \in H(B^*(a, \eta))$.

Nyní můžeme vyjádřit f pomocí F :

$\forall z \in B(a, \eta): f(z) = w + \frac{1}{F(z)}$

Rozlišíme dva případy:

i) $F(a) \neq 0$:

Pakom $F(z) \neq 0$ na nějakém okolí bodu a , tedy $\frac{1}{F(z)}$ je holomorf. na tomto okolí a tedy f má v bodě a odstranitelnou singularitu $\rightarrow$ ①

$$ii) F(a) = 0$$

Paž se jedna' o izolovaný' kořen F

Paž $\exists m \in \mathbb{N}, G \in H(B(a, r))$:

$$\forall z \in B(a, r) : F(z) = (z-a)^m G(z)$$

$$f'(z) = w + \frac{1}{(z-a)^m G(z)}, \forall z \in B(a, r)$$

$$1 = (f(z) - w) G(z) (z-a)^m$$

$$\rightarrow |G(z)| > 0 \quad \forall z \in B(a, r)$$

$$\text{Položíme } H(z) := \frac{1}{G(z)}, \forall z \in B(a, r) \quad (H \in H(B(a, r)))$$

$$\rightarrow f(z) = w + (z-a)^{-m} H(z) = w + (z-a)^{-m} \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z-a)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m-1} d_n (z-a)^{n-m} = w + d_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} d_n (z-a)^{n-m}$$

a tedy nastává' případ ②

Liouvilleova věta

Věta:

Bud' $f \in H(B(a, R))$ pro jisté $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ (připust' se $R = +\infty$)

Necht' f lze zapsat jako:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B(a, R). \quad (*)$$

Pakom pro všechna r , $0 \leq r < R$ platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Poznámka:

Jedná se o Parsevalovu rovnost pro Hilbertův prostor

$L^2([-\pi, \pi], d\theta)$ a ON bázi $(u_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$, $u_n(\theta) := e^{in\theta} / \sqrt{2\pi}$

Důkaz:

(Bez funkcionální analýzy)

Bud' r , $0 \leq r < R$ libovolné:

$$(*) \rightarrow f(a + re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \quad \text{pro } \theta \in \mathbb{R}$$

Tato řada konverguje stejnoměrně ~~na $B(a, r)$~~ pro pevné $\theta \in \mathbb{R}$

a tedy můžeme zaměnit řadu a integrál:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^N c_n r^n e^{in\theta} \right) \overline{\left(\sum_{m=0}^N c_m r^m e^{im\theta} \right)} d\theta = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N c_n \overline{c_m} r^{n+m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N c_n \overline{c_m} r^{n+m} \delta_{nm} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \end{aligned}$$

Věta: Liouvilleova

Bud' f celá funkce.

Je-li f omezená na $\mathbb{C}$, pak je konstantní!

Důkaz:

Bud' f taková funkce:

$\forall z \in \mathbb{C}: |f(z)| < M$

Zapišme f jeho řadou:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

V předchozí větě poloměr $a = 0$ a $R = +\infty$

$$\rightarrow \forall n > 0: \sum_{m=0}^{+\infty} |c_m|^2 r^{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < M^2$$

$$\rightarrow |c_m| < \frac{M}{r^m}, \quad \forall n > 0: \forall m \in \mathbb{N}_0$$

$$\rightarrow \text{Pro } m > 0 \text{ platí } c_m = 0$$

$$\rightarrow f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$$

Věta: Základní věta algebry
Každý komplexní polynom stupně alespoň jedna má v $\mathbb{C}$ kořen.

Důkaz:

Bud'

~~Bud'~~ $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$

polynom stupně $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$

Pro spor předpokládáme, že $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$:

Položíme $f(z) := \frac{1}{P(z)}, \forall z \in \mathbb{C}$

Podle předpokladu je tedy f celá funkce

Pro $z \neq 0$ máme:

$$f(z) = z^{-n} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right)^{-1}$$

$$\rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

$$\text{tj. } \forall \varepsilon > 0: \exists K > 0: \forall z \in \mathbb{C}, |z| > K: |f(z)| < \varepsilon$$

Zvolíme $\varepsilon > 0$ libovolně, pak $D = B(0, K) \cup (\mathbb{C} \setminus B(0, K))$

$$\text{a tedy: } \forall z \in \mathbb{C}: |f(z)| \leq \max\{\varepsilon, M\}$$

M je maximum funkce f na kompaktní množině $\overline{B(0, K)}$

A tedy f je omezená a tedy konstantní a ta konstanta musí být 0, což je spor.

Princip maxima modulu

Pomínka:

Modulem se myslí 'absolutní' hodnota nějaké holomorfní funkce.

Podle tohoto principu, jestliže f je holomorfní funkce na omezené oblasti Ω a je navíc spojitá na uzavřené $\bar{\Omega}$ a současně funkce f není konstantní, potom $|f|$ může nabývat svého maxima pouze na hranici dané oblasti.

Věta:

Bud' $f \in H(B(a, r))$ pro jisté $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

Pakem $\forall n \in \mathbb{R}^+$, $0 < r < R$ platí:

$$|f(a)| \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|$$

Přitom nastane rovnost, právě když f je konstantní.

Důkaz:

Zapišme f jako mocninou řadu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-a)^n$$

Bud' r , $0 < r < R$ libovolné:

Věta bude dokázána, jestliže ukážeme, že z nerovnosti

$$|f(a)| \geq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|$$

plyne, že f je konstantní funkce

Tím je také vyřešena otázka nerovnosti

$$|f(a)| > \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|$$

Nechť $|f(a)| \geq |f(a + re^{i\theta})|$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq |f(a)|^2 = |c_0|^2$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq 0 \rightarrow f(z) = c_0, \forall z \in B(a, r)$$

Důsledek:

Za stejných předpokladů jako u předchozí věty společně s předpokladem: $\forall z \in B(a, r) : f(z) \neq 0$ platí:

$$|f(a)| \geq \min_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|$$

Důkaz:

Stačí definovat $g(z) := \frac{1}{f(z)}$, $\forall z \in B(a, r)$ a použít právě dokázanou větu.

Důsledek: Princip maxima modulu

Bud' $f \in H(\Omega)$, kde Ω je oblast.

Jestliže f není konstantní funkcí, pak funkce $|f|$ nenabývá nikde na Ω lokálního maxima (neostře maximum).

Je-li navíc funkce f nenulová nikde na Ω , pak $|f|$ nenabývá nikde na Ω ani lokálního minima.

Důkaz:

Nechť f nabývá na Ω lokálního maxima:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{C}, \epsilon > 0 : B(a, R) \subset \Omega \text{ a } \forall z \in B(a, R) : |f(a)| \geq |f(z)|$$

Pak tedy f je konstantní na $B(a, R)$, $\forall z \in B(a, R) : f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$.

Vzhledem k tomu, že Ω je souvislá, domost $f(z) = c_0$ musí platit všude na Ω .

Druhá část plyne z přechodu $f \mapsto \bar{f} = g$.

Poznámka:

Z principu maxima modulu lze vyvodit jako
besprostředku' důstřed následující tvrzení:

Bud' Ω omezená oblast, $f \in H(\Omega)$ a necht' $f \in C(\bar{\Omega})$.

$$\text{Potom } \max_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

Jestliže navíc f není konstantní, pak

$$\forall a \in \Omega: |f(a)| < \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

Stejněměrná konvergence posloupnosti holomorfních funkcí

Věta: Cauchyovy odhady

Bud' $f \in H(B(a, R))$ pro jisté $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$.

Necht' existuje $M \geq 0$: $\forall z \in B(a, R) : |f(z)| \leq M$

Potom $\forall m \in \mathbb{N}_0 : |f^{(m)}(a)| \leq \frac{m! M}{R^m}$

Důkaz:

Zapišme f jako mocninovou řadu:

$$\forall z \in B(a, R) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

$$\text{Přitom máme, že } c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Pro dané r , $0 \leq r < R$ a $n \in \mathbb{N}_0$ zároveň platí:

$$|c_n|^2 r^{2n} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq M^2$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M}{r^n}$$

Limitním přechodem $r \nearrow R$ získáme požadovaný výsledek:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M}{R^n}$$

Definice: Stejněměrná konvergence na kompaktních podmnožinách

Bud' $f_n, n \in \mathbb{N}$, posloupnost komplexních funkcí na Ω .

Řekneme, že posloupnost $(f_n)_{n=1}$ konverguje k $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

stejněměrně na kompaktních podmnožinách Ω , jestliže pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$, $f_n \rightrightarrows f$ na K .

Řekneme, že posloupnost $(f_n)_{n=1}$ konverguje k f lokálně stejněměrně na Ω , jestliže každý bod $a \in \Omega$ má okolí $U_a \subset \Omega$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na U_a .

Věta:

Bud' $f_n \in H(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, a f další komplexní funkce na Ω .
Jestliže posloupnost $(f_n)_{n=1}$ konverguje k f stejnoměrně
na kompaktních podmnožinách Ω , pak $f \in H(\Omega)$ a
posloupnost $(f_n)_{n=1}$ konverguje k funkci f stejnoměrně
na kompaktních podmnožinách Ω .

Důkaz:

I. $f \in C(\Omega)$:

Bud' $a \in \Omega$ libovolný bod:

Zvolme $\eta > 0$, takže $B(a, \eta) \subset \Omega$

$\rightarrow f_n \rightrightarrows f$ na $\overline{B(a, \eta)} \rightarrow f \in C(\overline{B(a, \eta)})$

f je tedy spojitý, a" a tedy i na Ω

II. $f \in H(\Omega)$:

Bud' $\Delta \subset \Omega$ libovolný (usazený) trojúhelník.

U: $f_n \rightrightarrows f$ na Δ

$$\int_{\partial \Delta} f = \int_{\partial \Delta} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial \Delta} f_n = 0$$

Podle Morerovy věty je $f \in H(\Omega)$

III.

Bud' $a \in \Omega$, $\eta > 0$: $\overline{B(a, \eta)} \subset \Omega$.

Pak $f_n' \rightrightarrows f'$ na $\overline{B(a, \frac{\eta}{2})}$

Označme $K_1 = \overline{B(a, \frac{\eta}{2})}$, $K_2 = \overline{B(a, \eta)}$

$\forall w \in K_1$, $\overline{B(w, \frac{\eta}{2})} \subset K_2$

$$\begin{aligned} |f'(w) - f_n'(w)| &\leq \frac{1}{\frac{\eta}{2}} \max_{z \in \overline{B(w, \frac{\eta}{2})}} |f(z) - f_n(z)| \leq \frac{2}{\eta} \max_{z \in K_2} |f(z) - f_n(z)| \leq \\ &\leq \frac{2}{\eta} \|f - f_n\|_{C(K_2)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \|f' - f'_m\|_{C(K_1)} \leq \frac{2}{n} \|f - f_m\|_{C(K_2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

IV. $f'_m \rightrightarrows f'$ na K , $\forall K \subset \Omega$ kompakt'

Bud' $K \subset \Omega$ libovolno' kompaktu' množina

Pro $a \in K$ zvolíme $r_a > 0$: $B(a, \frac{r_a}{2}) \subset \Omega$

$\rightarrow \forall a \in K$: $f'_m \rightrightarrows f'$ na $B(a, \frac{r_a}{2})$

$$K \subset \bigcup_{a \in K} B(a, \frac{r_a}{2})$$

K je kompakt' $\rightarrow \exists a_1, \dots, a_k \in K$: $K \subset \bigcup_{i=1}^k B(a_i, \frac{r_{a_i}}{2})$

Cauchyova věta - obecný případ

Poznámka:

• Značení:

Bud' $m \in \mathbb{N}$ a $\Gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ soubor regulárních uzavřených křivek $\sim \Omega$.

Označme $\langle \Gamma \rangle := \bigcup_{k=1}^m \gamma_k$

Pro každou funkci $f := C(\langle \Gamma \rangle)$ kládeme:

$$\int_{\Gamma} f := \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f$$

Index bodu $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ vzhledem ke Γ definujeme jako:

$$\text{ind}_{\Gamma}(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a} = \sum_{k=1}^m \text{ind}_{\gamma_k}(a)$$

• Regulární uzavřené křivce $\gamma \sim \Omega$ lze přirodit lineární funkcionál na rektorovém prostoru $C(\Omega)$:

$$C(\Omega) \ni f \mapsto \int_{\gamma} f \in \mathbb{C}$$

Věta: Cauchy

Bud' $m \in \mathbb{N}$ a $\Gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ soubor regulárních uzavřených křivek $\sim \Omega$.

Nechť je splněna podmínka: $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega : \text{ind}_{\Gamma}(a) = 0$.

Pak pro každou funkci $f \in H(\Omega)$ platí:

④

① $\int_{\Gamma} f = 0$ (Cauchyova věta)

② $\forall z \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle : \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \text{ind}_{\Gamma}(z) f(z)$

(Cauchyův integrační vzorec)

Důkaz:

②: I. Definujme pomocnou funkci:

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, & z \neq w \\ f'(z), & z = w \end{cases}$$

Ukažme, že $g \in C(\Omega \times \Omega)$

g je zřejmě spojitá $\forall (z, w) \in \Omega \times \Omega; z \neq w$.

Stačí ověřit spojitost na diagonale karle'zského součinu:

Bud' $(a, a) \in \Omega \times \Omega$ libovolný bod:

Zvolme $\eta > 0$: $\overline{B(a, \eta)} \subset \Omega$

Cauchyova věta a homotapie

Definice: Homotapie

Buďte $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \Omega$ dvě usměrněné křivky (spojité, ale ne nutně regulární).

Řekneme, že tyto křivky jsou homotapické v Ω ,
jestliže existuje spojitá funkce $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ s vlastnostmi:

$$① \forall t \in [a, b]: H(t, 0) = \gamma_0(t)$$

$$② \forall t \in [a, b]: H(t, 1) = \gamma_1(t)$$

$$③ \forall s \in [0, 1]: H(a, s) = H(b, s)$$

Poznámka:

Pro každé $s \in [0, 1]$ položíme $\forall t \in [a, b]: \gamma_s(t) := H(t, s)$.

Pakom γ_s je usměrněná křivka, která je sice spojitá, ale nemusí být regulární ani v případě, že γ_0, γ_1 jsou regulární.

Křivka $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ je konstantní, jestliže $\langle \gamma \rangle = \{a\}$ pro nějaké $a \in \mathbb{C}$.

Pro tuto křivku zřejmě platí: $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq a: \text{ind}_\gamma(z) = 0$.

Lemma:

Buďte $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Omega$ regulární usměrněné křivky.

Jestliže pro $w \in \mathbb{C}$ je splněno:

$$\forall t \in [a, b]: |\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |w - \gamma_0(t)|$$

$$\text{Pakom } \text{ind}_{\gamma_0}(w) = \text{ind}_{\gamma_1}(w).$$

Důkaz:

Z ostře nerovnosti zřejmě plyne $w \neq \gamma_0(t)$ a $w \neq \gamma_1(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Položíme:

$$\forall t \in [a, b]: \gamma(t) := \frac{\gamma_1(t) - w}{\gamma_0(t) - w}$$

Potom γ je regulární křivka (uvěřena), která splňuje:

$$\forall t \in [a, b] : |\gamma(t) - 1| = \left| \frac{\gamma_1(t) - \gamma_0(t)}{\gamma_0(t) - w} \right|$$

$$\rightarrow \langle \gamma \rangle \subset B(1, 1).$$

Z toho plyne, že O leží v neomezené souvislé komponentě množiny $\mathbb{C} \setminus \langle \gamma \rangle$ a tedy platí:

$$\begin{aligned} 0 = \text{ind}_{\gamma}(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - w} - \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - w} \right) dt = \\ &= \text{ind}_{\gamma_1}(w) - \text{ind}_{\gamma_0}(w) \end{aligned}$$

Lemma:

Bud' γ, γ_0 dvě regulární uvěřené křivky, které jsou homotopické v Ω .

Potom platí:

$$\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega : \text{ind}_{\gamma}(w) = \text{ind}_{\gamma_0}(w)$$

Důkaz:

Bud' $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ libovolně:

Nechť BÚNO $\gamma, \gamma_0: [0, 1] \rightarrow \Omega$.

Podle předpokladů existuje homotopie $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$

s vlastnostmi: $\gamma_0(t) = H(t, 0)$ a $\gamma(t) = H(t, 1)$

$$H(0, s) = H(1, s)$$

H je spojitá, a proto $H([0, 1] \times [0, 1])$ je kompaktní v Ω a tedy uvěřená.

$$\rightarrow \text{dist}(w, H([0, 1] \times [0, 1])) > 0$$

$$\rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] : |H(s, t) - w| > 2\varepsilon \quad (*)$$

Nechť spojitá funkce H je na kompaktní množině $[0, 1] \times [0, 1]$ rovnoměrně spojitá

→ $\exists m \in \mathbb{N}$:

$$\forall (t,s), (t',s') \in [0,1] \times [0,1] : |s-s'| + |t-t'| \leq \frac{1}{m} \Rightarrow |H(t,s) - H(t',s')| < \varepsilon$$

Plomatozii H nahradíme konečným souborem křivek, který spočítá křivkou γ_0 a končí křivkou γ_1 , a přitom dvě po sobě jdoucí křivky se liší jen málo (s ohledem na aplikaci lemmatu)

Položíme $\gamma_k(t) := H(t, \frac{k}{m})$ pro $k \in \hat{m}$.

Pro $k \in \hat{m}-1$ jsou křivky γ_k spojité, ale nemusí být regulární. Bude aproximujeme křivky γ_k po částech lineárními křivkami, které označíme $\tilde{\gamma}_k$ pro $k \in \hat{m}-1$:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_k(t) &:= \left(\gamma_k\left(\frac{i-1}{m}\right) \left(\frac{i}{m} - t\right) + \gamma_k\left(\frac{i}{m}\right) \left(t - \frac{i-1}{m}\right) \right) m = \\ &= H\left(\frac{i-1}{m}, \frac{k}{m}\right) (i - mt) + H\left(\frac{i}{m}, \frac{k}{m}\right) (mt - i + 1) \text{ pro } t \in \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right] \end{aligned}$$

Nyní dokažeme několik vlastností této aproximace:

① $\forall t \in [0,1] : |\gamma_k(t) - \tilde{\gamma}_k(t)| < \varepsilon$, pro všechna $k \in \hat{m}$
Bud' $k \in \hat{m}$ libovolně peme:

Paž pro $t \in [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ máme:

$$\begin{aligned} |\gamma_k - \tilde{\gamma}_k(t)| &= H\left(t, \frac{k}{m}\right) - H\left(\frac{i-1}{m}, \frac{k}{m}\right) (i - mt) - H\left(\frac{i}{m}, \frac{k}{m}\right) (mt - i + 1) = \\ &= \left[H\left(t, \frac{k}{m}\right) - H\left(\frac{i-1}{m}, \frac{k}{m}\right) \right] (i - mt) + \\ &+ \left[H\left(t, \frac{k}{m}\right) - H\left(\frac{i}{m}, \frac{k}{m}\right) \right] (mt - i + 1) \end{aligned}$$

$$\rightarrow |\gamma_k(t) - \tilde{\gamma}_k(t)| \leq \varepsilon (i - mt) + \varepsilon (mt - i + 1) = \varepsilon$$

1) $\forall t \in [0, 1]: |w - \tilde{f}_k(t)| > \varepsilon$, pro všechna $k \in \hat{n}$
 Bud' $k \in \hat{n}$ libovolně první:

$$|w - \tilde{f}_k(t)| \geq |w - f_k(t)| - |\tilde{f}_k(t) - f_k(t)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

2) $\forall t \in [0, 1]: |\tilde{f}_k(t) - \tilde{f}_{k-1}(t)| < \varepsilon$, pro všechna $k \in \hat{n}$
 Bud' $k \in \hat{n}$ libovolně první:

pro $t \in [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ platí:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k(t) - \tilde{f}_{k-1}(t) &= \left[H\left(\frac{i-1}{m}, \frac{k}{m}\right) - H\left(\frac{i-1}{m}, \frac{k-1}{m}\right) \right] (i - mt) + \\ &+ \left[H\left(\frac{i}{m}, \frac{k}{m}\right) - H\left(\frac{i}{m}, \frac{k-1}{m}\right) \right] (mt - i + 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}_k(t) - \tilde{f}_{k-1}(t)| \leq \varepsilon (i - mt) + \varepsilon (mt - i + 1) = \varepsilon$$

3) $\forall t \in [0, 1]: |\tilde{f}_k(t) - f_k(t)| < |w - f_k(t)|$, pro všechna $k \in \hat{n}$

již máme dokázány, ch bodů ① a ②:

$$|\tilde{f}_k(t) - f_k(t)| < \varepsilon < 2\varepsilon < |w - f_k(t)|$$

A konečně podle lemmatu máme:

$$\text{ind}_{f_{k-1}}(w) = \text{ind}_{f_k}(w), \text{ pro všechna } k \in \hat{n}$$

$$\text{a podle ④: } \text{ind}_{f_0}(w) = \text{ind}_{f_1}(w) = \text{ind}_f(w) = \text{ind}_g(w)$$

Důsledek:

Bud' γ regulární uzavřená křivka, která je $\sim \Omega$ homotopická 0.
Potom pro každou funkci $f \in H(\Omega)$ platí:

①

$$\int_{\gamma} f = 0$$

$$\textcircled{2} \forall z \in \Omega \setminus \gamma: \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \text{ind}_{\gamma}(z) f(z)$$

Důkaz:

Stačí ověřit, že jsou splněny předpoklady Cauchyovy věty.

Přitom kládeme $\Gamma = \{\gamma\}$, γ je homotopická 0 a tedy

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega: \text{ind}_{\gamma}(z) = 0.$$

Důsledek:

Bud' Ω jednoduše souvislá oblast.

Potom pro každou regulární uzavřenou křivku $\gamma \sim \Omega$
a každou funkci $f \in H(\Omega)$ platí:

$$\textcircled{1} \int_{\gamma} f = 0$$

$$\textcircled{2} \forall z \in \Omega \setminus \gamma: \frac{2\pi i}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \text{ind}_{\gamma}(z) f(z)$$

Důkaz

Je-li Ω jednoduše souvislá oblast, pak každá uzavřená křivka $\sim \Omega$ je homotopická 0.

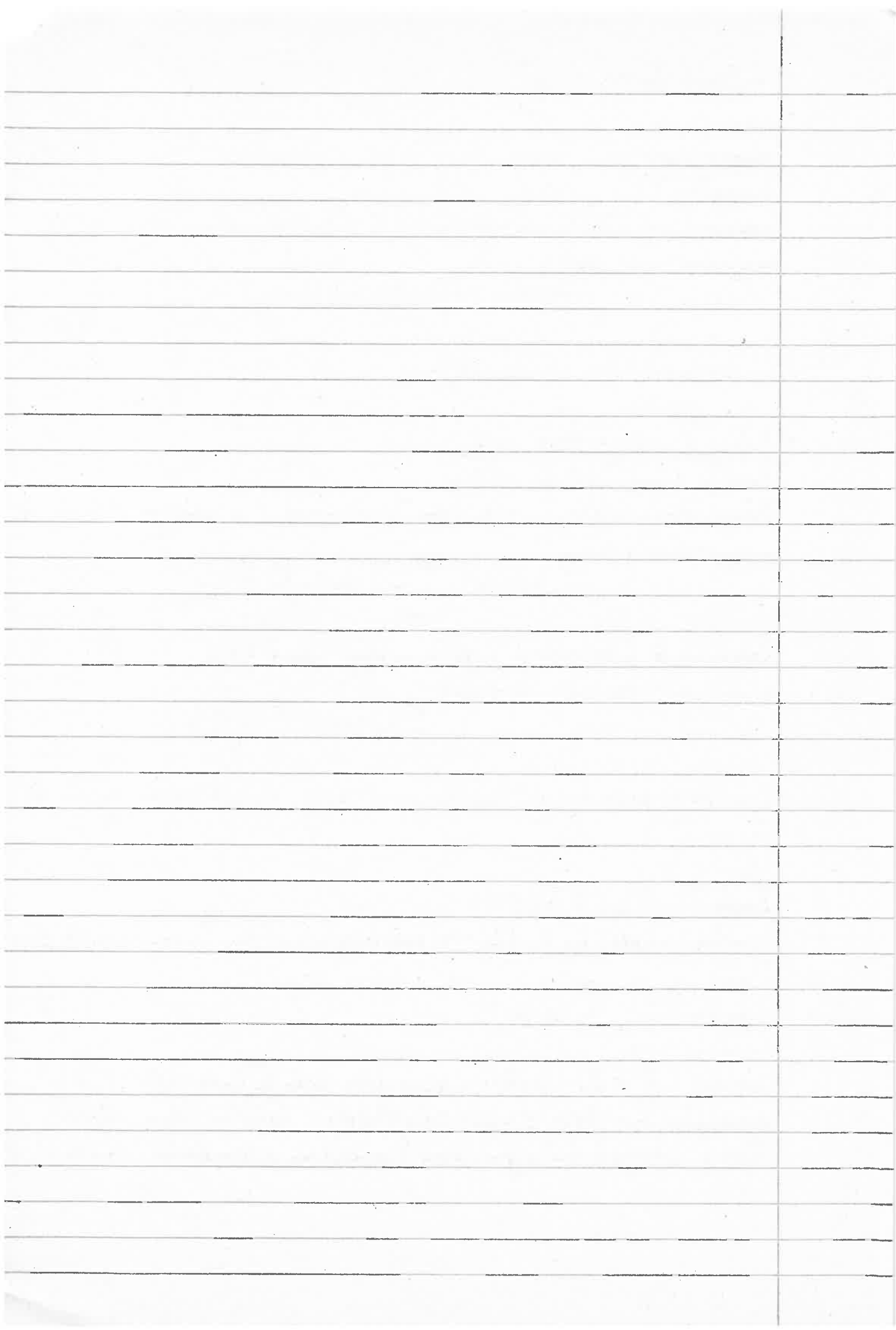
Definice: Homotopie křivek s pevnými konci

Bud' $\gamma_0, \gamma_1: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ dvě křivky (spojité, ale ne nutně regulární), které splňují: $\gamma_0(\alpha) = \gamma_1(\alpha)$ a $\gamma_0(\beta) = \gamma_1(\beta)$.

Řekneme, že křivky γ_0, γ_1 jsou homotopické s pevnými konci, jestliže existuje spojitá funkce $H: [\alpha, \beta] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ s vlastnostmi:

$$\textcircled{1} \forall t \in [\alpha, \beta]: H(t, 0) = \gamma_0(t) \text{ a } H(t, 1) = \gamma_1(t)$$

$$\textcircled{2} \forall s \in [0, 1]: H(\alpha, s) = \gamma_0(\alpha) \text{ a } H(\beta, s) = \gamma_0(\beta)$$



Laurentovy řady

Poznámka:

Značení:

Otvírejte 'mexikánské' o středu $a \in \mathbb{C}$ s poloměry $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$,
označíme symbolem

$$P(a, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\}$$

$$D: P(a, 0, r) = B(a, r) \setminus \{a\} = B'(a, r)$$

Definice: Laurentova řada

Bud' $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$.

Laurentova řada α komplexní proměnné z se středem α bodě a je definována jako:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Řekneme, že Laurentova řada konverguje, právě když konvergují obě mocninové řady

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

Tyto řady se nazývají regulární a hlavní část Laurentovy řady.

Věta:

Bud' $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$.

Označme po řadě $R_+, R_- \in [0, +\infty]$ poloměry konvergence mocninových řad

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} w^n.$$

Je-li $\frac{1}{R_-} < R_+$, potom Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje na $P(a, \frac{1}{R_-}, R_+)$ absolutně a lokálně stejnoměrně (což je ekvivalentní stejnoměrné konvergenci na kompaktních podmnožinách).

Věta:

Při stejném značení a předpokladech jako v předchozí větě,
nechť $\frac{1}{R_-} < R_+$:

Položíme $\forall z \in P(a, \frac{1}{R_-}, R_+)$: $f(z) := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m (z-a)^m$.

Potom $f \in H(P(a, \frac{1}{R_-}, R_+))$.

Dále pro libovolné $r, \frac{1}{R_-} < r < R_+$, platí:

$$\forall m \in \mathbb{Z}: C_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz,$$

kde $\gamma_r(t) = a + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Důkaz:

I. f je na $P(a, \frac{1}{R_-}, R_+)$ rovna lokálně stejnoměrně limitě funkcí f_m ,
které definujeme jako:

$$f_m(z) := \sum_{n=-m}^m C_n (z-a)^n$$

Zřejmě pro každé $m \in \mathbb{N}$ je f_m holomorfní všude na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$,
a tím spíše $f_m \in H(P(a, \frac{1}{R_-}, R_+))$ a tedy i $f \in H(P(a, \frac{1}{R_-}, R_+))$

II. Nejprve pro $m \in \mathbb{Z}$ vypočteme:

$$\int_{\gamma_r} (z-a)^m dz = \int_0^{2\pi} (\gamma_r(t)-a)^m \gamma_r'(t) dt = i r^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = 2\pi i \delta_{m,-1}$$

Vzhledem ke stejnoměrné konvergenci Laurentovy řady na $\langle \gamma_r \rangle$
můžeme upravit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k (z-a)^{k-m-1} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \int_{\gamma_r} (z-a)^{k-m-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \delta_{k,m} = C_m \end{aligned}$$

Poznámka:

Bud' $f \in H(P(a, r_1, r_2))$ pro $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$.

Nechť f lze na $P(a, r_1, r_2)$ vyjádřit jako konvergentní Laurentovu řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n.$$

To také znamená, že při stejném značení je $\frac{1}{R_-} \leq r_1$, $R_+ \geq r_2$.
Z předchozí věty rovněž vyplývá, že koeficienty C_n jsou funkcí f určeny jednoznačně.

Lemma:

Bud' $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a necht' γ_r nadále značí kladně orientovanou kružnici se středem v bodě a , o poloměru r .

Dále bud' $f \in C(\langle \gamma_r \rangle)$ a položme:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \langle \gamma_r \rangle : g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} : C_m := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}} dw.$$

Pakom platí:

$$\forall z \in B(a, r) : g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-a)^n$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, r)} : g(z) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$$

Důkaz:

I. ~~Pro~~ Necht' $|z-a| < r$, pro $w \in \langle \gamma_r \rangle$:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)(1 - \frac{z-a}{w-a})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

Při pervením z této řady konvergence stejnoměrně v poměru w .
Díky tomu můžeme psát:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} (z-a)^n \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-a)^n$$

I. Necht $|z-a| > r$, pak pro $w \in \langle \gamma_R \rangle$ platí:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(z-a)(1 - \frac{w-a}{z-a})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

Ze stejného důvodu lze psát:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z} dw = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-a)^n f(w)}{(z-a)^{n+1}} dw =$$

$$= - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w-a)^n} dw = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{-n-1}}{(z-a)^{n+1}} =$$

$$= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$$

Věta:

Bud' $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ a $f \in H(P(a, r_1, r_2))$.

Pak f lze na $P(a, r_1, r_2)$ vyjádřit a přitom jednoznačně jako konvergentní Laurentovu řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$$

Důkaz:

Existence řady:

Zvolme libovolně, ale pevně $\rho_1, \rho_2: r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$.

Pak platí:

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = C_n$$

Definujme funkce: $f^+(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw$, pro $z \in B(a, \rho_2)$

$$f^-(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw, \text{ pro } z \in B(a, \rho_1)$$

$z \in \mathbb{C} \setminus B(a, \rho_1)$

Podle lemmatu máme:

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B(a, \rho_2)$$

$$f^-(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, \rho_1)}$$

Dále použijeme Cauchyův integrální vzorec pro $\Omega = P(a, r_1, r_2)$
a $\Gamma := (-\gamma_{r_1}, \gamma_{r_2})$.

(Předpoklad je splněn, neboť $\text{ind}_{\gamma_{r_1}}(z) = \text{ind}_{\gamma_{r_2}}(z) = 0$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus B(a, r_2)$
a $\text{ind}_{\gamma_{r_1}}(z) = \text{ind}_{\gamma_{r_2}}(z) = 1$ pro $z \in B(a, r_1)$).

Kromě toho pro $z \in P(a, r_1, r_2)$ je:

$$\text{ind}_\Gamma(z) = -\text{ind}_{\gamma_{r_1}}(z) + \text{ind}_{\gamma_{r_2}}(z) = 0 + 1 = 1$$

Cauchyův integrální vzorec tedy na rovnost:

$$\begin{aligned} \forall z \in P(a, r_1, r_2): f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= f^-(z) + f^+(z). \end{aligned}$$

Laurentovy řady - pokračování

Poznámka:

Bud' f funkce holomorfní na $B'(a, r) = P(a, 0, r)$ pro $a \in \mathbb{C}, r > 0$.
Potom f má rozvoj do Laurentovy řady na okolí bodu a :

$$\forall z \in B'(a, r): f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

Typ izolované singularity funkce f v bodě a je určen touto Laurentovou řadou:

1) Izolovaná singularita je odstranitelná, právě když
 $C_n = 0$ pro všechna $n < 0$.
(Hlavní část Laurentovy řady je nulová)

2) Izolovaná singularita je pól řádu $m \in \mathbb{N}$,
právě když $C_n = 0$ pro všechna $n < -m$ a $C_{-m} \neq 0$.

3) Izolovaná singularita je podstatná, právě když
 $C_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$

Poznámka:

Mějme dané funkci $f \in H(P(a, r_1, r_2))$ pro $a \in \mathbb{C}, 0 \leq r_1 \leq r_2 \leq +\infty$,
s Laurentovým rozvojem

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

Označme pro řadě $R_-, R^+ \in [0, +\infty]$ poloměry konvergence
mocninových řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} w^n, \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^n.$$

Ú konvergence Laurentovy řady plyne, že $R_- \geq \frac{1}{r_1}, R_+ \geq r_2$

→ Pro hlavní část Laurentovy řady platí: $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$ platí:
 $g \in H(P(a, r_1, +\infty))$, zatímco regulární část je holomorfní na $B(a, r_2)$.
Speciálně pro $f \in H(B(a, r))$ je $R_- = +\infty, g \in H(\mathbb{C} \setminus \{a\})$
 $f - g$ má v bodě a odstranitelnou singularitu

Residuová věta

Definice: Residuum

Bud' $f \in H(B'(a, r))$ pro jisté $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, a nechť

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$$

je rozvoj f do Laurentovy řady na $B'(a, r)$.

Potom číslo $\text{res}_a(f) = C_{-1}$ nazýváme residuem funkce f v bodě a .

Věta: Residuová

Bud' $A \subset \Omega$ podmnožina, která nemá v Ω hromadný bod a $f \in H(\Omega \setminus A)$. Dále bud' $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $n \in \mathbb{N}$ soubor regulárních vstříknutých křivek v $\Omega \setminus A$, který splňuje podmínku: $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega : \text{ind}_\Gamma(w) = 0$.

$$\text{Potom } \int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{ind}_\Gamma(a) \text{res}_a(f)$$

Poznámka:

Množina A může být i nekonečná, ale z předpokladů věty vyplývá, že je nejvýše spočetná.

Jak užas zdlouhavě vzhledem k tomu, nanejvýš konečné mnoho sčítanců je nenulových, a proto tato rovnice má dobrý smysl i v případě nekonečné množiny A .

Z předpokladů rovněž plyne, že každý bod $a \in A$ je izolovaná singularita funkce f . Zdlouhavě, že ve formuli ačty se nepředpokládá nic o charakteru těchto singularit

Důsledek:

Při stejných předpokladech na Ω, A a f , bud' γ kladně orientovaná regulární Jordanova křivka v $\Omega \setminus A$, $\text{int} \gamma \subset \Omega$.

$$\text{Potom } \int_\gamma f = 2\pi i \sum_{a \in \text{int}(\gamma)} \text{res}_a(f)$$

Díky sítě:

Položme $V := \{w \in \mathcal{O}(\Gamma) \mid \text{ind}_\Gamma(w) = 0\}$

$K := \mathcal{O} \setminus V = \{w \in \mathcal{O}(\Gamma) \mid \text{ind}_\Gamma(w) \neq 0\} \cup \{\Gamma\}$

I. $K \subset \Omega$ je kompaktní:

K je omezená $\Leftrightarrow K$ je uzavřená $\wedge K$ je omezená

K je uzavřená $\Leftrightarrow V$ je otevřená $\Leftarrow$ index bodu je lokálně konstantní funkce

K je omezená:

Odměňme $U := \mathcal{O}$ neomezenou souvislou komponentu $\mathcal{O} \setminus \Gamma$.

Víme, že $U \subset V$ a tedy: $K = \mathcal{O} \setminus V \subset \mathcal{O} \setminus U$

Dále podle předpokladu $\mathcal{O} \setminus \Omega \subset V \rightarrow K = \mathcal{O} \setminus V \subset \Omega$

Položme $B := \{a \in A \mid \text{ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$

II. Množina B je konečná nebo prázdna:

$$B = A \cap K$$

Ale prvek A s kompaktní množinou K nemůže být nekonečný, neboť by jinak A měla hromadný bod.

Označme body množiny B (navzájem různé) jako:

$$B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Pro každý index $k \in \hat{n}$ označme jako θ_k hlavní část Laurentovy řady funkce f na okolí bodu a_k .

Pakom $\theta_k \in H(\mathcal{O} \setminus \{a_k\})$ a funkce $f - \theta_k$ má v bodě a_k odstranitelnou singularitu.

III. Pro každý $k \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \theta_k = \text{ind}_{\Gamma}(a_k) \text{res}_{a_k}(f)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \theta_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a_k)^n} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{c_{-n}}{(z-a_k)^n} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{c_{-1}}{z-a_k} dz = \text{ind}_{\Gamma}(a_k) \text{res}_{a_k}(f) \end{aligned}$$

Nyní můžeme provést obecnou Cauchyovu větu:
Položme $\Omega_0 := \Omega \setminus (A \setminus B) = (\Omega \setminus A) \cup B$

$$\text{a } g := f - \sum_{k=1}^m \theta_k \in H(\Omega_0)$$

Ověříme předpoklady.

Keď $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega_0$ libovolně:

$$\mathbb{C} \setminus \Omega_0 = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup (A \setminus B)$$

keď $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, potom $\text{ind}_{\Gamma}(w) = 0$

nebo $w \in A \setminus B$, potom také $\text{ind}_{\Gamma}(w) = 0$.

Paž obecná Cauchyova věta pro $g \in H(\Omega_0)$ dává:

$$0 = \int_{\Gamma} g = \int_{\Gamma} f - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma} \theta_k$$

$$\rightarrow \int_{\Gamma} f = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{ind}_{\Gamma}(a_k) \text{res}_{a_k}(f)$$

Meromorfní funkce

Definice: Meromorfní funkce

Řekneme, že komplexní funkce f je meromorfní na Ω , jestliže existuje množina $A \subset \Omega$ s vlastnostmi:

- ① $f \in H(\Omega \setminus A)$
- ② v každém bodě množiny A má f izolovanou singularitu, která je pólem

Poznámka:

Připouštíme i možnost $A = \emptyset$.

Poř je f prostě holomorfní na Ω .

Značení:

Bud' f meromorfní funkce na Ω .

Uvažme jako obvykle

$$Z(f) := \{a \in \Omega \mid f(a) = 0\}$$

a

$$P(f) := \{a \in \Omega \mid f(a) = \infty\}, \text{ tj. } f \text{ má pól v bodě } a$$

