Kapitola 1

1.1 Holomorfní funkce

Úmluva 1.1.1. Ω všude značí neprázdnou otevřenou podmnožinu $\mathbb{C}$.

Věta 1.1.2. *Nechť $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uvažovaná jako funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ má (totální) derivaci $df_{(x_0,y_0)}$ v bodě $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Položme $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$. Potom derivace podle komplexní proměnné $f'(z_0)$ existuje, právě když jsou splněny* Cauchyovy-Riemannovy (CR) rovnice

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}. \tag{1.1}$$

Důsledek 1.1.3. *Buď $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Nechť $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ mají spojité (reálné) parciální derivace 1. řádu na nějakém okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Potom $f'(z_0)$ existuje, právě když jsou splněny CR rovnice (1.1).*

Poznámka 1.1.4. Pro výpočet derivací podle komplexní proměnné platí obdobná pravidla jako pro reálné funkce reálné proměnné a rovněž důkaz by byl zcela analogický.

(1) Buďte $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$. Jestliže $f'(z_0)$ existuje, pak f je spojitá v z_0.

(2) Buďte $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Jestli $f'(z_0)$, $g'(z_0)$ existují, potom existují rovněž

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)'(z_0) &= \lambda f'(z_0) + g'(z_0), && \text{(linearita)} \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). && \text{(Leibnizovo pravidlo)} \end{aligned}$$

Poznámka 1.1.5. *Buďte $U, V \subset \mathbb{C}$ neprázdné otevřené množiny, $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$, $z_0 \in U$. Nechť $f(U) \subset V$ a položme*

$$w_0 := f(z_0), \ h := g \circ f.$$

Jestliže existují $f'(z_0), g'(w_0) \in \mathbb{C}$, potom existuje také $h'(z_0) \in \mathbb{C}$ a platí

$$h'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0). \tag{1.2}$$

Ověření. Zdůvodnit „řetězové pravidlo“ (1.2) je možné dvojím způsobem. Buď ho lze dokázat vyšetřením limity definující derivaci podle komplexní proměnné – naprosto obdobně jako u reálných funkcí reálné proměnné.

Nebo se můžeme odvolat na již známá pravidla pro derivování vektorových funkcí od více reálných proměnných. Díváme-li se na f, g, h jako na funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, máme $\tilde{f}: U \to \mathbb{C}$, $\tilde{g}: V \to \mathbb{C}$, $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ a dále $\tilde{f}(U) \subset V$. Předpokládáme, že existují $\mathrm{d}\tilde{f}_{(x_0,y_0)}$, $\mathrm{d}\tilde{g}_{f(x_0,y_0)}$ a jsou splněny CR rovnice. Potom $\tilde{h} := \tilde{g} \circ \tilde{f} : U \to \mathbb{R}^2$ a existuje

$$\mathrm{d}\tilde{h}_{(x_0,y_0)} = \mathrm{d}\tilde{g}_{f(x_0,y_0)}\mathrm{d}\tilde{f}_{(x_0,y_0)}.$$

Zde totální derivace ve standardní bázi ztotožňujeme s 2×2 reálnými maticemi a na pravé straně je součin matic. Dokončení je v následujícím cvičení.

Cvičení 1.1.6. Buďte $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$ a nechť příslušné maticové prvky splňují

$$A_{11} = A_{22},\ A_{12} = -A_{21},\ B_{11} = B_{22},\ B_{12} = -B_{21}.$$

Tyto rovnice odpovídají CR rovnicím. Potom $\boldsymbol{C} := \boldsymbol{AB}$ splňuje obdobné rovnice, tj.

$$C_{11} = C_{22},\ C_{12} = -C_{21}$$

Ověřte!

Definice 1.1.7. Buď $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Řekneme, že f je *holomorfní* na Ω, jestliže $f'(z)$ existuje pro všechna $z \in \Omega$.

Množinu holomorfních funkcí na Ω označíme $H(\Omega)$.

Poznámka 1.1.8. (1) $H(\Omega)$ je vektorový prostor s obvyklým sčítáním funkcí a násobením skalárem. Vzhledem k Leibnizovu pravidlu je zřejmé, že $H(\Omega)$ je dokonce *(asociativní) komutativní algebra*, což je vektorový prostor, na kterém je navíc zavedena operace násobení, která je asociativní, komutativní a bilineární (v tom je obsažen také distributivní zákon).

(2) Složením dvou holomorfních funkcí, pokud má smysl, dostáváme opět holomorfní funkci.

Definice 1.1.9. Je-li f holomorfní na $\mathbb{C}$, říkáme, že f je *celá funkce*.

Příklad 1.1.10. (1) $f(z) := z^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ je celá funkce, $f'(z) = nz^{n-1}$.

(2) $f(z) := z^{-n}$ pro $n \in \mathbb{N}$ je funkce holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f'(z) = -nz^{-n-1}$.

(3) Exponenciální funkce

$$f(z) = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

je celá funkce, $f'(z) = f(z)$.

I v komplexním oboru platí

$$\forall w, z \in \mathbb{C},\ \exp(w)\exp(z) = \exp(w+z). \tag{1.3}$$

Cvičení 1.1.11. *Ověřte rovnost (1.3) přímým výpočtem!*

Cvičení 1.1.12. Funkce $f(z) := \bar{z}$ je definovaná všude na $\mathbb{C}$. Jestliže ji uvažujeme jako zobrazení $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, dostáváme

$$\tilde{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x+iy) \\ \operatorname{Im} f(x+iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Potom $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte přímým výpočtem limity, která definuje derivaci, že $f'(z)$ neexistuje pro žádné $z \in \mathbb{C}$!

Poznámka 1.1.13. Přepsání parciálních derivací 1. řádu na $\mathbb{R}^2$ v komplexních souřadnicích. Ztotožníme $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ a místo reálných souřadnic x, y na $\mathbb{R}^2$ použijeme komplexní souřadnice

$$z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy. \tag{1.4}$$

Inverzní transformace má tvar

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \tag{1.5}$$

Formální výpočet parciálních derivací vede na vztahy

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}},\ \ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = i\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

a v opačném směru

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Definice 1.1.14. Buďte x, y souřadnice na $\mathbb{R}^2$ ve standardní bázi a $z := x + iy$ komplexní souřadnice na $\mathbb{C}$. Z definice pokládáme

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Tvrzení 1.1.15. *Buď $f : U \to \mathbb{C}$, kde $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená podmnožina, $(x_0, y_0) \in U$. Označme*

$$\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x,y) \\ \operatorname{Im} f(x,y) \end{pmatrix}$$

(což je přepsaná funkce f po ztotožnění $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$). Nechť existuje (totální) derivace $d\tilde{f}_{(x_0,y_0)}$ (kterou ztotožňujeme ve standardní bázi s 2×2 reálnou maticí). Potom pro všechna $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \cdot d\tilde{f}_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} f(x_0, y_0)\, \zeta + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x_0, y_0)\, \bar{\zeta}, \tag{1.6}$$

kde $\zeta := \xi + i\eta$.

Důkaz. Označme $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$. V následujících výrazech se všechny parciální derivace berou v bodě (x_0, y_0). Pro levou stranu dostáváme výraz

$$LS = \frac{\partial u}{\partial x}\, \xi + \frac{\partial u}{\partial y}\, \eta + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\, \xi + \frac{\partial v}{\partial y}\, \eta \right).$$

Pro pravou stranu máme

$$PS = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) \right) (\xi + i\eta) + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) \right) (\xi - i\eta).$$

Po roznásobení pravé strany a porovnání reálných a imaginárních částí obou stran zjistíme, že platí rovnost. □

Cvičení 1.1.16. *Dokončete důkaz tvrzení pomocí samostatného výpočtu!*

Věta 1.1.17. *Buď $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Nechť f uvažovaná jako funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ má na Ω spojité parciální derivace 1. řádu. Potom f je holomorfní na Ω, právě když je splněna rovnost*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0 \ \text{ identicky na } \Omega. \tag{1.7}$$

Je-li tomu tak, potom platí

$$\forall z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega, \ \ f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f(x_0, y_0) \tag{1.8}$$

(kde na levé straně f chápeme jako komplexní funkci od komplexní proměnné a na pravé straně jako komplexní funkci od dvou reálných proměnných).

Důkaz. Jestliže rovnici (1.7) rozložíme na reálnou a imaginární část, dostaneme přesně CR rovnice.

Jestliže platí (1.7), potom (1.8) je okamžitým důsledkem (1.6), uvážíme-li, že $d\tilde{f}_{(x_0,y_0)}$ přejde v $f'(z_0)$ po ztotožnění $\mathbb{R}^2$ s $\mathbb{C}$. □

Cvičení 1.1.18. *Doplňte podrobnosti v důkazu věty 1.1.17!*

Poznámka 1.1.19. Transformační vztahy (1.4), (1.5) mají dobrý smysl jako substituce proměnných v případě polynomiálních funkcí. Buď $\tilde{p} \in \mathbb{C}[x, y]$ polynom od dvou reálných proměnných, ale obecně s komplexními koeficienty. Definujme polynom od dvou komplexních proměnných $p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ vztahem

$$p(z, \bar{z}) := \tilde{p}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right).$$

Pokud $\bar{z}$ chápeme jako komplexně sdruženou proměnnou k z, tak p představuje komplexní funkci. Tato funkce bude holomorfní, právě když p po roznásobení bude záviset pouze na z a nikoliv na $\bar{z}$.

Cvičení 1.1.20. Na $\mathbb{R}^2$ bez uzavřené záporné x-ové poloosy máme polární souřadnice $(r, \phi) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$, přičemž platí

$$x = r \cos \phi, \;\; y = r \sin \phi.$$

Vyjádřete parciální diferenciální operátory $\partial/\partial z$ a $\partial/\partial \bar{z}$ v polárních souřadnicích!

Poznámka 1.1.21. Na oblasti $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$ se zavádí logaritmus jako funkce od komplexní proměnné z. Použijeme polární souřadnice $(r, \phi) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$, pro které

$$z = r\, e^{i\phi}, \;\; \text{a tedy } r = |z|.$$

Pokládáme

$$\ln z := \ln r + i\phi.$$

Cvičení 1.1.22. *Dokažte*

$$\begin{aligned} \exp(\ln z) &= z \qquad \text{na } \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,], \\ \ln(\exp z) &= z \qquad \text{pro } |\operatorname{Im} z| < \pi\,! \end{aligned}$$

Cvičení 1.1.23. *S využitím věty 1.1.17 ukažte, že logaritmus je holomorfní funkce na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$ a spočtěte její derivaci!*

Poznámka. Z pozdějších výsledků bude zřejmé, že takto zavedený logaritmus na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$ je jednoznačně určen následujícími dvěma vlastnostmi:

(i) logaritmus v komplexní proměnné se na kladné reálné polopřímce shoduje s již dříve zavedeným logaritmem v reálné proměnné (který se zavádí standardně jako ve středoškolské matematice),

(ii) logaritmus je holomorfní funkce na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$.

Poznámka 1.1.24. Buď $a \in \mathbb{C}$ libovolné komplexní číslo. Na oblasti $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\,]$ definujeme funkci

$$f_a(z) := \exp(a \ln z).$$

Tuto funkci můžeme vyjádřit v polárních souřadnicích (které zůstávají stejné jako při definici logaritmu):

$$f_a(z) = \exp(a \ln r + ia\phi), \ z = r\, e^{i\phi}.$$

Speciálně pro $a \in \mathbb{R}$ máme

$$f_a(z) = r^a e^{ia\phi}$$

a pro $a = n \in \mathbb{Z}$ je $f_n(z) = z^n$. Dále pro $a, b \in \mathbb{C}$ platí $f_a(z) f_b(z) = f_{a+b}(z)$.

Funkci $f_a(z)$ můžeme interpretovat jako z^a. Tato funkce je určitě holomorfní, protože vznikla složením dvou holomorfních funkcí.

Cvičení 1.1.25. *Spočtěte* $f_a'(z)$ *!*

1.2 Analytické funkce

Připomenutí 1.2.1. Buď u_n, $n \in \mathbb{N}_0$, posloupnost (obecně komplexních) funkcí na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, která splňuje podmínky:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $u_n \in C^1(I)$,

(ii) řada

$$u(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{1.9}$$

konverguje alespoň v jednom bodě $x_0 \in I$,

(iii) řada

$$v(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$$

konverguje stejnoměrně na I.

Potom řada (1.9) konverguje lokálně stejnoměrně na I (tj. stejnoměrně na každém kompaktním podintervalu v I), $u \in C^1(I)$ a $u'(x) = v(x)$ pro všechna $x \in I$.

Připomenutí 1.2.2. Buďte $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, číselná posloupnost, $a \in \mathbb{C}$. Poloměr konvergence $R \in [\,0, +\infty\,]$ mocninné řady

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{1.10}$$

lze spočítat podle vzorce

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}.$$

Poloměr konvergence má vlastnosti:

(i) $\forall r \in [\,0, R)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\, r^n < \infty$,

(ii) pro žádné $z \in \mathbb{C}$, $|z-a| > R$, řada (1.10) nekonverguje, dokonce ani nemůže platit rovnost

$$\lim_{n\to\infty} c_n (z-a)^n = 0.$$

Z bodu (i) plyne, že mocninná řada (1.10) konverguje absolutně na $D(a,R)$ a stejnoměrně na $\overline{D(a,r)}$ pro každé $r \in [\,0, R)$.

Odtud pak dále plyne, že součet řady (1.10) definuje funkci $f \in C\big(D(a,R)\big)$.

Cvičení 1.2.3. Derivováním řady (1.10) člen po členu dostaneme řadu

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}. \tag{1.11}$$

Ukažte, že řady (1.10) a (1.11) mají stejné poloměry konvergence!

Definice 1.2.4. Buď $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je *analytická* na Ω, jestliže pro každý bod $z_0 \in \Omega$ existuje poloměr $r > 0$ takový, že $D(z_0, r) \subset \Omega$ a f lze na $D(z_0, r)$ vyjádřit jako konvergentní mocninnou řadu se středem v z_0.

Poznámka 1.2.5. Pro funkce (obecně komplexní) od reálné proměnné se zcela obdobně zavádí pojem reálně analytické funkce. Buďte $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval, f funkce definovaná na I. Řekneme, že f je *reálně analytická* na I, jestliže pro každé $x_0 \in I$ existuje $\epsilon > 0$ tak, že $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$ a f lze na $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ vyjádřit jako konvergentní mocninnou řadu.

V dalším ale tento pojem nebudeme používat.

Věta 1.2.6. *Nechť mocninná řada*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

má poloměr konvergence $R > 0$. Potom $f \in H\big(D(a,R)\big)$ a

$$\forall z \in D(a,R), \;\; f'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

Důkaz. Podle připomenutí 1.2.2 je f dobře definovaná a spojitá funkce od komplexní proměnné $z \in D(a,R)$. Funkci f můžeme také uvažovat jako funkci od dvou reálných proměnných x, y, když píšeme $z = x + iy$. Ukážeme, že v tom případě má f spojité parciální derivace 1. řádu.

Bez újmy na obecnosti můžeme položit $a = 0$. Pro pevné $y \in \mathbb{R}$, $|y| < R$, zaveďme funkci reálné proměnné:

$$\forall x \in I_y := \big(-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}\,\big), \;\; h_y(x) := f(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+iy)^n.$$

Vezmeme-li v úvahu cvičení 1.2.3, snadno zjistíme, že podmínky (i), (ii), (iii) z připomenutí 1.2.2 jsou splněny (pro $u_n(x) := c_n(x+iy)^n$; *doplňte podrobnosti!*). Zjišťujeme tak, že $h_y \in C^1(I_y)$ a na $D(a,R)$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = h_y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x+iy)^{n-1}. \tag{1.12}$$

Obdobně lze zdůvodnit, že na $D(a,R)$ rovněž platí

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = i \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x+iy)^{n-1}. \tag{1.13}$$

Z (1.12), (1.13) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x+iy) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+iy) = 0 \ \text{ na } D(a,R).$$

Podle věty 1.1.17 odtud plyne, že f je holomorfní na $D(a,R)$. Podle té samé věty spočteme derivaci f podle komplexní proměnné:

$$f'(z)\big|_{z=x+iy} = \frac{\partial}{\partial z} f(x+iy) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+iy) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x+iy)^{n-1}.$$

To dokazuje větu. □

Tuto větu jsme mohli alternativně dokázat také tak, že bychom komplexní derivaci vypočítali přímo jako limitu. Nejprve odvodíme jako cvičení jeden pomocný výsledek.

Cvičení 1.2.7. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a pro $w, z \in \mathbb{C}$, $w \neq z$, platí rovnost

$$\frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} = (w-z) \sum_{j=0}^{n-2} (n-j-1) w^j z^{n-j-2}. \tag{1.14}$$

Dokažte! Návod: Jedním možným postupem, ne jediným, je vyjádřit obě strany jako polynomy od dvou komplexních proměnných w, z, to jest ve tvaru konečné sumy $\sum_{j,k} \alpha_{j,k} w^j z^k$ pro jisté koeficienty $\alpha_{j,k} \in \mathbb{C}$, a poté porovnat koeficienty na obou stranách.

Poznámka 1.2.8. Jiný důkaz věty 1.2.6. Přímým výpočtem limity ukážeme, že pro každé $z \in D(a,R)$ existuje $f'(z) = g(z)$, kde g je dáno v (1.11).

Opět bez újmy na obecnosti pokládáme $a = 0$. Nechť je dáno $z \in D(0,R)$. Zvolme r tak, že $|z| < r < R$. Nechť dále $w \in D(0,r)$. Upravíme

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1}\right).$$

Vzhledem k identitě (1.14) odhadneme

$$\left|\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z)\right| \leq |w-z| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \sum_{j=0}^{n-2} (n-j-1) r^{n-2} = \frac{|w-z|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) r^{n-2}.$$

Dokončení je v dalším cvičení.

Cvičení 1.2.9. Za daných předpokladů je $\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) r^{n-2} < \infty$, a proto

$$\lim_{w \to z} \left(\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z)\right) = 0.$$

To znamená, že existuje $f'(z) = g(z)$. *Zdůvodněte!*

Věty 1.2.6 má několik důsledků.

Důsledek 1.2.10. *Za stejných předpokladů jako ve větě 1.2.6 má funkce f na $D(a,R)$ komplexní derivace všech řádů (značíme je, jak je obvyklé, $f^{(k)}(z)$, $k \in \mathbb{N}_0$). Přitom platí*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k} \tag{1.15}$$

pro $z \in D(a,R)$ a $k \in \mathbb{N}_0$. Speciálně

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, \;\; f^{(k)}(a) = k!\, c_k. \tag{1.16}$$

Důkaz. Matematickou indukcí lze dokázat, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $f^{(k)} \in H\big(D(a,R)\big)$ a platí (1.15). Případ $k = 0$ je dán předpoklady věty 1.2.6 a sama věta pak zaručuje indukční krok.

Pro odvození rovnosti (1.16) stačí v (1.15) položit $z = a$. □

Důsledek 1.2.11. *Buďte $R > 0$, $a \in \mathbb{C}$ a nechť je dána funkce $f\colon D(a,R) \to \mathbb{C}$, kterou lze vyjádřit na $D(a,R)$ ve tvaru mocninné řady s komplexními koeficienty*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Potom

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \;\; c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,.$$

To znamená, že vyjádření funkce ve tvaru mocninné řady, pokud existuje, je určeno jednoznačně.

Důkaz. Jestliže f lze vyjádřit na $D(a,R)$ ve tvaru mocninné řady, pak f splňuje předpoklady věty 1.2.6, a tedy pro f platí důsledek 1.2.10. Podle tohoto důsledku jsou koeficienty řady dány vztahem (1.16). □

Důsledek 1.2.12. *Každá funkce, která je analytická na Ω, je na Ω holomorfní.*

Důkaz. Pro danou analytickou funkci f na Ω zvolme libovolný bod $z_0 \in \Omega$. Kombinace definice analytické funkce a věty 1.2.6 zaručuje existenci poloměru $r > 0$ takového, že $f \in H\big(D(z_0,r)\big)$. To speciálně znamená, že $f'(z_0)$ existuje. □

Cvičení 1.2.13. *Doplňte podrobnosti v důkazech všech tří důsledků!*

Cvičení 1.2.14. Buď $c \in \mathbb{C}$ a na $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{c\}$ definujeme

$$\forall z \in \Omega, \;\; f(z) := \frac{1}{z-c}\,.$$

Potom f je analytická funkce na Ω.

Pro libovolné $z_0 \in \Omega$ *vyjádřete* f *ve tvaru mocninné řady na nějakém kruhovém okolí bodu* z_0 *a nalezněte poloměr konvergence* R_{z_0} *této řady v závislosti na* z_0*!*

Odpověď: $R_{z_0} = |z_0 - c|$.

Cvičení 1.2.15. Na $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ definujeme

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) := \frac{1}{z^2 + 1}\,.$$

Potom f je analytická funkce na Ω.

Pro libovolné $z_0 \in \Omega$ *vyjádřete* f *ve tvaru mocninné řady na nějakém kruhovém okolí bodu* z_0 *a nalezněte poloměr konvergence* R_{z_0} *této řady v závislosti na* z_0*!*

Odpověď: $R_{z_0} = \min\{|z_0 - i|, |z_0 + i|\}$.

Pojem, který nyní zavedeme, má pouze pomocný charakter, ale poslouží nám velmi dobře při dalším studiu vztahu mezi analytickými a holomorfními funkcemi. Nejedná se však o běžně známý a používaný pojem.

Definice 1.2.16. Buď $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Řekneme, že funkci f lze *vyjádřit mocninnou řadou* na Ω, jestliže na každém (!) kruhu s kladným poloměrem $D(a, r) \subset \Omega$ lze f vyjádřit ve tvaru mocninné řady se středem v bodě a.

Poznámka 1.2.17. Porovnáme-li tuto definici s definicí analytické funkce, vidíme, že první z obou pojmů představuje silnější požadavek na funkci f. Jestliže f lze vyjádřit mocninnou řadou na Ω, potom f je na Ω analytická. Jak vyplyne z dalšího výkladu, platí i opačná implikace. Je-li f analytická na Ω, potom f lze vyjádřit mocninnou řadou na Ω. Druhá implikace ale není v žádném případě zřejmá a je třeba ji dokázat.

1.3 Křivkový integrál

Připomeňme, že křivka $\gamma\colon [\,\alpha, \beta\,] \to \mathbb{C}$ spojitě zobrazující kompaktní interval $[\,\alpha, \beta\,] \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$, je *regulární*, je-li po částech z C^1. *Geometrický obraz* křivky γ je kompaktní podmnožina $\langle\gamma\rangle \subset \mathbb{C}$, která je rovna oboru hodnot zobrazení γ.

Značení 1.3.1. Buďte $[\,\alpha, \beta\,] \subset \mathbb{R}$ kompaktní interval, $\gamma \in C([\,\alpha, \beta\,])$ regulární křivka a $f \in C(\langle\gamma\rangle)$. Pokládáme

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\alpha^\beta f\bigl(\gamma(t)\bigr)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Takto zavedený symbol (nebo takto vypočtené číslo) nazveme *integrálem funkce* f *podél křivky* γ.

Poznámka 1.3.2. (1) Je třeba rozlišovat mezi integrálem funkce podél křivky γ a integrálem téže funkce přes jednorozměrnou varietu $\langle\gamma\rangle$. Jestliže $\gamma\colon [\,\alpha,\beta\,] \to \mathbb{C}$ představuje parametrizaci variety $\langle\gamma\rangle \subset \mathbb{C}$, pak

$$\int_{\langle\gamma\rangle} f = \int_\alpha^\beta f\big(\gamma(t)\big)\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Jako jednoduchý ilustrativní příklad můžeme uvést funkci f identicky rovnou 1 na $\mathbb{C}$ a křivku

$$\gamma(t) := e^{it} \text{ pro } t \in [\,0, 2\pi\,].$$

Tedy γ je kladně orientovaná jednotková kružnice a $\langle\gamma\rangle = S^1 \subset \mathbb{R}^2$, pokud ztotožníme $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$. Snadno zjistíme, že

$$\int_\gamma 1 = 0, \quad \int_{S^1} 1 = 2\pi.$$

(2) Uvedené předpoklady ohledně f a γ zaručují existenci křivkového integrálu, přičemž jeho hodnota je konečné komplexní číslo. Tyto předpoklady by však bylo možné zeslabit. Například existenci křivkového integrálu by zaručoval i předpoklad: $f \circ \gamma$ je měřitelná a omezená funkce.

(3) Připomeňme si, že regulární křivka γ má konečnou *variaci*

$$V_\alpha^\beta(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

která má význam délky křivky. Při zavedení křivkového integrálu by stačilo požadovat, aby křivka γ měla konečnou variaci a nemusela by být nutně regulární. Potom pro $f \in C(\langle\gamma\rangle)$ by definiční vztah vypadal následovně:

$$\int_\gamma f := \int_\alpha^\beta f \circ \gamma \,\mathrm{d}\gamma,$$

kde napravo je Riemannův-Stieltjesův integrál.

Nicméně v dalším výkladu se již ve svých úvahách omezíme pouze na regulární křivky.

(4) Pro regulární křivku $\gamma \in C([\,\alpha,\beta\,])$ a $f \in C(\langle\gamma\rangle)$ jsme již dříve odvodili odhad

$$\Big|\int_\gamma f\,\Big| \le \|f\|_{C(\langle\gamma\rangle)}\, V_\alpha^\beta(\gamma), \tag{1.17}$$

kde $\|f\|_{C(\langle\gamma\rangle)} := \max_{z\in\langle\gamma\rangle} |f(z)|$.

Poznámka 1.3.3. *Závislost regulární křivky na substituci.* Mějme dánu regulární křivku $\gamma \in C([\,\alpha,\beta\,])$. Dále buď $\varphi \in C^1([\,\alpha_1,\beta_1\,])$ reálná funkce, která splňuje

(i) $\forall t \in [\,\alpha_1,\beta_1\,],\ \varphi'(t) > 0$,

(ii) $\varphi(\alpha_1) = \alpha$, $\varphi(\beta_1) = \beta$.

Potom φ zobrazuje vzájemně jednoznačně interval $[\,\alpha_1, \beta_1\,]$ na $[\,\alpha, \beta\,]$ a existuje $\varphi^{-1} \in C^1([\,\alpha, \beta\,])$. Položme

$$\gamma_1 := \gamma \circ \varphi \in C([\,\alpha_1, \beta_1\,]).$$

Křivka γ_1 je opět regulární a $\langle \gamma_1 \rangle = \langle \gamma \rangle$. Naopak $\gamma = \gamma_1 \circ \varphi^{-1}$. Pro libovolnou funkci $f \in C(\langle \gamma \rangle)$ máme, vzhledem ke standardní větě o substituci,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f\big(\gamma_1(t)\big)\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f\big(\gamma(\varphi(t))\big)\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_\gamma f. \end{aligned}$$

Vzhledem k rovnosti $\int_{\gamma_1} f = \int_\gamma f$ pro všechny funkce $f \in C(\langle \gamma \rangle)$ považujeme křivky γ a γ_1 za *ekvivalentní*.

Speciálně vhodnou lineární substitucí můžeme převést interval $[\,\alpha, \beta\,]$ na jiný, standardně volený interval. Standardní volbou bývají často intervaly $[\,0, 1\,]$ nebo $[\,0, 2\pi\,]$.

Poznámka 1.3.4. *Opačná křivka.* Buď $\gamma \in C([\,\alpha, \beta\,])$ regulární křivka. Položme

$$\forall t \in [\,\alpha, \beta\,], \;\; \gamma_1(t) := \gamma(\alpha + \beta - t).$$

Potom $\gamma_1 \in C([\,\alpha, \beta\,])$ je také regulární křivka a $\langle \gamma_1 \rangle = \langle \gamma \rangle$. Pro libovolnou funkci $f \in C(\langle \gamma \rangle)$ máme

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f &= \int_\alpha^\beta f\big(\gamma_1(t)\big)\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f\big(\gamma(\alpha+\beta-t)\big)\gamma'(\alpha+\beta-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\beta^\alpha f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_\alpha^\beta f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= -\int_\gamma f. \end{aligned}$$

Řekneme, že γ_1 je *opačná křivka* ke γ. Někdy ji značíme $-\gamma$.

Věta 1.3.5. *Buďte $\gamma \in C([\,\alpha, \beta\,])$ regulární křivka, $\varphi, \psi \in C(\langle \gamma \rangle)$. Položme $\Omega := \mathbb{C} \setminus \varphi(\langle \gamma \rangle)$ (množiny $\langle \gamma \rangle$, $\varphi(\langle \gamma \rangle)$ jsou kompaktní). Potom funkce*

$$f(z) := \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{\varphi(\zeta) - z}\, d\zeta \tag{1.18}$$

je dobře definovaná na Ω a lze ji zde vyjádřit mocninnou řadou.

Důkaz. Pro libovolné pevné $z \in \Omega$ je integrand v (1.18) spojitou funkcí v proměnné $\zeta \in \langle \gamma \rangle$ a proto integrál existuje a hodnota $f(z)$ je dobře definována.

Nechť $D(a, r) \subset \Omega$ pro kladný poloměr r a $z \in D(a, r)$. Potom podle definice Ω je

$\varphi(\langle\gamma\rangle) \cap D(a,r) = \emptyset$, a proto

$$\forall\zeta \in \langle\gamma\rangle,\ \ |\varphi(\zeta) - a| \geq r \implies \frac{|z-a|}{|\varphi(\zeta)-a|} \leq \frac{|z-a|}{r} < 1. \tag{1.19}$$

Pro $\zeta \in \langle\gamma\rangle$ upravíme

$$\frac{1}{\varphi(\zeta) - z} = \frac{1}{\big(\varphi(\zeta) - a\big)\Big(1 - \frac{z-a}{\varphi(\zeta)-a}\Big)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{\big(\varphi(\zeta)-a\big)^{n+1}}\,.$$

Vzhledem k odhadu (1.19) řada konverguje stejnoměrně pro $\zeta \in \langle\gamma\rangle$. Dosadíme do integrálu (1.18), přičemž můžeme zaměnit integrál a sumu. Dostáváme

$$\int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{\varphi(\zeta) - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_\gamma \psi(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{\big(\varphi(\zeta)-a\big)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{\big(\varphi(\zeta)-a\big)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Zjistili jsme, že

$$\forall z \in D(a,r),\ \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,\ \text{kde } c_n := \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{\big(\varphi(\zeta)-a\big)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{1.20}$$

To dokazuje větu. $\square$

Poznámka. Odhadněme koeficienty c_n v (1.20). Vzhledem k (1.17) dostáváme

$$|c_n| \leq \|\psi\|_{C(\langle\gamma\rangle)}\, V_\alpha^\beta(\gamma) \max_{\zeta\in\langle\gamma\rangle} \frac{1}{|\varphi(\zeta)-a|^{n+1}} \leq \frac{C_\gamma}{r^{n+1}}\,,\ \text{kde } C_\gamma := \|\psi\|_{C(\langle\gamma\rangle)}\, V_\alpha^\beta(\gamma).$$

To znamená, že mocninná řada v (1.20) konverguje alespoň tak rychle, jako geometrická řada s kvocientem

$$\frac{|z-a|}{r} < 1.$$

1.4 Index bodu vzhledem k uzavřené křivce

Nejprve uvedeme příklady jednoduchých, ale často používaných křivek. Současně s tím zavádíme značení, které budeme dále používat.

Příklad 1.4.1. (1) Kladně orientovaná kružnice se středem v bodě $a \in \mathbb{C}$ a poloměrem $r > 0$:

$$\gamma(t) := a + re^{it},\ t \in [\,0, 2\pi\,].$$

Pro $f \in C(\langle\gamma\rangle)$ je

$$\int_\gamma f = ir \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})e^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Záporně orientovaná kružnice je opačná křivka ke kladně orientované kružnici:

$$\gamma(t) := a + re^{-it},\ t \in [\,0, 2\pi\,].$$

(2) Orientovanou úsečku označíme $[\,a, b\,]$, kde $a, b \in \mathbb{C}$ jsou po řadě počáteční a koncový bod. Parametrizace má tvar

$$\gamma(t) := (1 - t)a + tb = a + (b - a)t,\ t \in [\,0, 1\,].$$

Pro $f \in C(\langle\gamma\rangle)$ je

$$\int_{[\,a,b\,]} f = (b - a) \int_0^1 f\big(a + (b - a)t\big)\,\mathrm{d}t.$$

Křivka $[\,b, a\,]$ je opačná ke křivce $[\,a, b\,]$.

(3) Orientovanou hranici trojúhelníku $\triangle(a, b, c)$ zavedeme následovně. Podle definice trojúhelník

$$\triangle(a, b, c) := \text{ konvexní obal množiny } \{a, b, c\},$$

kde $a, b, c \in \mathbb{C}$ jsou jeho vrcholy. Jedná se tedy o kompaktní, konvexní množinu. Přitom připouštíme i degenerovaný případ, kdy body a, b, c jsou kolineární nebo dokonce když některé vrcholy splývají. Orientovanou hranici trojúhelníku označíme $\partial\triangle(a, b, c)$. Orientace je dána posloupností orientovaných úseček tvořících hranici: $a \to b \to c \to a$. To znamená, že pro funkci f spojitou na hranici trojúhelníku pokládáme

$$\int_{\partial\triangle(a,b,c)} f := \int_{[\,a,b\,]} f + \int_{[\,b,c\,]} f + \int_{[\,c,a\,]} f.$$

Křivky $\partial\triangle(a, b, c)$, $\partial\triangle(b, c, a)$, $\partial\triangle(c, a, b)$ jsou navzájem ekvivalentní. Křivky $\partial\triangle(a, b, c)$ a $\partial\triangle(a, c, b)$ jsou vzájemně opačné.

Definice 1.4.2. Buďte γ regulární uzavřená křivka, $\Omega := \mathbb{C} \setminus \langle\gamma\rangle$, $z \in \Omega$. Indexem bodu

z vzhledem ke křivce γ nazveme číslo

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\,.$$

Věta 1.4.3. *Buďte γ regulární uzavřená křivka, $\Omega := \mathbb{C} \setminus \langle\gamma\rangle$. Potom funkce*

$$\Omega \ni z \mapsto \operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{C} \tag{1.21}$$

nabývá pouze celočíselných hodnot, je konstantní na souvislých komponentách množiny Ω a na neomezené souvislé komponentě nabývá hodnotu 0.

Poznámka. Připomeňme, že je-li $M \subset \mathbb{C}$ omezená množina, potom v $\mathbb{C} \setminus M$ existuje právě jedna neomezená souvislá komponenta.

Důkaz. Vzhledem k předpokladům je γ spojitá funkce na nějakém kompaktním intervalu $[\,\alpha, \beta\,]$ a navíc je na tomto intervalu po částech spojitě diferencovatelná. Přitom $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. Podle věty 1.3.5 je funkce (1.21) analytická na Ω. Pro tento důkaz nám postačí vědět, že je spojitá. Podle definice index bodu $z \in \Omega$ vzhledem ke γ je dán rovností

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}t.$$

Položme

$$\varphi(t) := \exp\left(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\,\mathrm{d}s\right) \text{ pro } t \in [\,\alpha, \beta\,].$$

Zřejmě $\varphi \in C([\,\alpha, \beta\,])$ a φ je po částech C^1 na $[\,\alpha, \beta\,]$. Pro derivaci dostáváme

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\varphi(t),\ \ t \in [\,\alpha, \beta\,] \tag{1.22}$$

(v bodech nespojitosti mají derivace limity zprava i zleva). Všimněme si, že $\varphi(\alpha) = 1$, $\varphi(\beta) = \exp(2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z))$.

Dále položíme

$$\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} \text{ pro } t \in [\,\alpha, \beta\,]. \tag{1.23}$$

Zřejmě $\psi \in C([\,\alpha, \beta\,])$ a ψ je po částech C^1 na $[\,\alpha, \beta\,]$. Vzhledem ke vztahu (1.22) pro derivaci dostáváme

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\gamma(t) - z} - \frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0,\ \ t \in [\,\alpha, \beta\,].$$

Funkce ψ je tedy konstantní,

$$\psi(t) = \psi(\alpha) = \frac{1}{\gamma(\alpha) - z} \text{ pro všechna } t \in [\,\alpha, \beta\,].$$

Následně ze vztahu (1.23) plyne, že

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(\alpha) - z} \text{ pro všechna } t \in [\,\alpha, \beta\,].$$

Speciálně pro $t = \beta$ dostáváme

$$\exp(2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z)) = \varphi(\beta) = \frac{\gamma(\beta) - z}{\gamma(\alpha) - z} = 1.$$

Tato rovnost ale může platit pouze v případě, kde $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

V další části důkazu vezmeme v úvahu, že spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina. Proto funkce (1.21) zobrazuje souvislé komponenty Ω na souvislé podmnožiny v $\mathbb{Z}$. Ale neprázdnými souvislými podmnožinami $\mathbb{Z}$ jsou právě jednobodové podmnožiny. To znamená, že funkce (1.21) je konstantní na souvislých komponentách Ω.

Označme jako Ω_∞ neomezenou souvislou komponentu množiny Ω. Podle předešlého existuje $N \in \mathbb{Z}$ takové, že $\operatorname{ind}_\gamma(z) = N$ pro všechna $z \in \Omega_\infty$. Z definice indexu pomocí integrálu plyne odhad

$$|\operatorname{ind}_\gamma(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t) - z|}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{2\pi \operatorname{dist}(z, \langle\gamma\rangle)} \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{V_\alpha^\beta(\gamma)}{2\pi \operatorname{dist}(z, \langle\gamma\rangle)}\,.$$

Jako důsledek dostáváme

$$N = \operatorname{ind}_\gamma(z) \to 0 \text{ pro } z \in \Omega_\infty,\ z \to \infty.$$

Tím je dokázáno, že $N = 0$. □

Cvičení 1.4.4. Jednoduchým ilustrativním příkladem je kladně orientovaná kružnice

$$\gamma(t) := a + re^{it},\ t \in [\,0, 2\pi\,],$$

kde $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Jedná se o Jordanovu křivku, $\mathbb{C} \setminus \langle\gamma\rangle$ má dvě souvislé komponenty: vnitřek křivky $\operatorname{int}(\gamma) = D(a, r)$ a vnějšek křivky $\operatorname{ext}(\gamma) = \mathbb{C} \setminus \overline{D(a, r)}$. Druhá souvislá komponenta je neomezená. Pro index z vzhledem ke γ máme

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } z \in D(a, r), \\ 0 & \text{pro } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(a, r)}\,. \end{cases}$$

Podrobně zdůvodněte!

Kapitola 2

2.1 Cauchyova věta I: konvexní množiny

Poznámka 2.1.1. Dále budeme potřebovat následující pravidlo pro výpočet derivace.

Buďte $U \subset \mathbb{C}$ otevřená podmnožina, $F \in H(U)$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, $\gamma \in C^1(I)$ a nechť $\langle\gamma\rangle \subset U$. Potom

$$\forall t \in I, \ \frac{d}{dt}F\big(\gamma(t)\big) = F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$$

(F' značí derivaci podle komplexní proměnné, zatímco γ' značí derivaci podle reálné proměnné).

Opět jsou možné nejméně dva způsoby, jak pravidlo zdůvodnit. Určitě postačí, když ho ověříme pouze v jednom (ale libovolném) bodě $t_0 \in I$. Položme $z_0 := \gamma(t_0) \in U$.

(I) Můžeme postupovat úplně stejně jako při derivování funkce vzniklé složením dvou reálných funkcí od reálné proměnné. Připomeňme si tento postup. Máme

$$F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + R(z), \text{ přičemž } \lim_{z \to z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0.$$

Obdobně

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + \rho(t), \text{ přičemž } \lim_{t \to t_0} \frac{\rho(t)}{t - t_0} = 0.$$

S pomocí těchto dvou vztahů není těžké ukázat, že

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F\big(\gamma(t)\big) - F\big(\gamma(t_0)\big)}{t - t_0} = F'\big(\gamma(t_0)\big)\gamma'(t_0).$$

(II) Jiná možnost je využít známých pravidel pro derivování složených zobrazení na eukleidovských prostorech. Za tím účelem opět ztotožníme $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ a označíme x, y souřadnice na $\mathbb{R}^2$, kterým odpovídá komplexní souřadnice $z = x + iy$ na $\mathbb{C}$. Píšeme

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t), \text{ kde } \gamma_1 = \mathrm{Re} \circ \gamma, \ \gamma_2 = \mathrm{Im} \circ \gamma.$$

Potom podle zmíněných známých pravidel dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\gamma(t)\big) = \frac{\partial F}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\, \gamma_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\, \gamma_2'(t).$$

Nyní stačí uvážit, že

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right),$$

a dále, že předpoklad $F \in H(U)$ implikuje $\partial F/\partial \bar{z} = 0$, $\partial F/\partial z = F'$.

Cvičení 2.1.2. Doplňte podrobnosti v důkazu pravidla pro derivování.

Tvrzení 2.1.3. *Buďte $F \in H(\Omega)$, $\gamma\colon [\,\alpha, \beta\,] \to \Omega$ regulární křivka. Jestliže $F' \in C(\Omega)$, potom*

$$\int_\gamma F' = F\big(\gamma(\beta)\big) - F\big(\gamma(\alpha)\big).$$

Speciálně pokud je γ regulární uzavřená křivka, tak

$$\int_\gamma F' = 0.$$

Důkaz. Vypočteme

$$\int_\gamma F' = \int_\alpha^\beta F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\gamma(t)\big)\,\mathrm{d}t = F\big(\gamma(\beta)\big) - F\big(\gamma(\alpha)\big).$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Důsledek 2.1.4. *Buď γ regulární uzavřená křivka v Ω. Potom*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \int_\gamma z^n\, dz = 0.$$

Jestliže navíc $0 \notin \langle\gamma\rangle$ (křivka γ neprochází bodem 0), pak také

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \leq -2, \quad \int_\gamma z^n\, dz = 0.$$

Poznámka. Může vzniknout otázka, co nastane v případě $n = -1$, který jsme vynechali. V tomto jediném případě se integrál nemusí rovnat 0 a výsledek lze vyjádřit pomocí indexu bodu vzhledem ke křivce:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(0).$$

Důkaz. Stačí uvážit, že

$$z^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{n+1}\, z^{n+1}\right) \text{ pro } n \neq -1.$$

Zbytek již okamžitě plyne z tvrzení 2.1.3. □

Při diskuzi Cauchyovy věty se nejprve budeme zabývat speciálním případem, který se týká pouze jednoduchých uzavřených křivek, jež jsou obvodem nějakého trojúhelníku. Následující věta je připisována matematiku jménem Édouard Jean-Baptiste Goursat, který ji původně dokázal pro obvody obdélníků namísto trojúhelníků. Tento rozdíl ale není podstatný.

Připomeňme, že podle naší definice je trojúhelník uzavřená množina, viz příklad 1.4.1 ad (3).

Věta 2.1.5 (Goursatova věta)**.** *Buď $f \in H(\Omega)$. Potom pro každý trojúhelník $\triangle \subset \Omega$ platí*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0.$$

K důkazu budeme potřebovat jedno lemma.

Značení 2.1.6. Buďte (X, ϱ) metrický prostor, $K \subset X$ neprázdná kompaktní podmnožina. *Průměr množiny K* označíme

$$\operatorname{diam} K := \max_{x,y \in K} \varrho(x, y).$$

Lemma 2.1.7. *Buďte X topologický prostor a $K_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, klesající posloupnost (neostře a ve smyslu inkluze) neprázdných kompaktních množin. Potom*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

Je-li navíc X metrický prostor a

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} K_n = 0, \tag{2.2}$$

pak průnik $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ obsahuje právě jeden bod.

Důkaz. (I) Prostor K_1 je kompaktní a $\{K_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ je systém uzavřených podmnožin v K_1, který má díky monotonii vlastnost:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \bigcap_{n=1}^{N} K_n = K_N \neq \emptyset.$$

Z kompaktnosti prostoru K_1 pak plyne (2.1).

(II) Předpokládejme, že je navíc (X, ϱ) metrický prostor a je splněno (2.2). Buďte $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ dva libovolné body. Potom $x, y \in K_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a proto

$$\varrho(x, y) \leq \operatorname{diam} K_n \to 0 \ \text{ pro } n \to \infty.$$

Odtud plyne $\varrho(x,y)=0$, a tedy $x=y$. $\square$

Cvičení 2.1.8. Původní definice kompaktního prostoru využívá pojmu otevřené pokrytí. Přejde-li se k doplňkům, lze kompaktní prostor ekvivalentně charakterizovat, přičemž místo pojmů „otevřená množina“ a „sjednocení“ se používají pojmy „uzavřená množina“ a „průnik“. Tato ekvivalentní charakteristika byla využita v části (I) důkazu. *Doplňte podrobnosti nebo si je připomeňte z přednášky FA1!*

Důkaz věty 2.1.5. Je ponecháno na čtenáři, aby si rozmyslel, že věta jistě platí v degenerovaném případě, kdy vrcholy trojúhelníku jsou kolineární (leží v jedné přímce). Nadále předpokládáme, že vrcholy trojúhelníku nejsou kolineární.

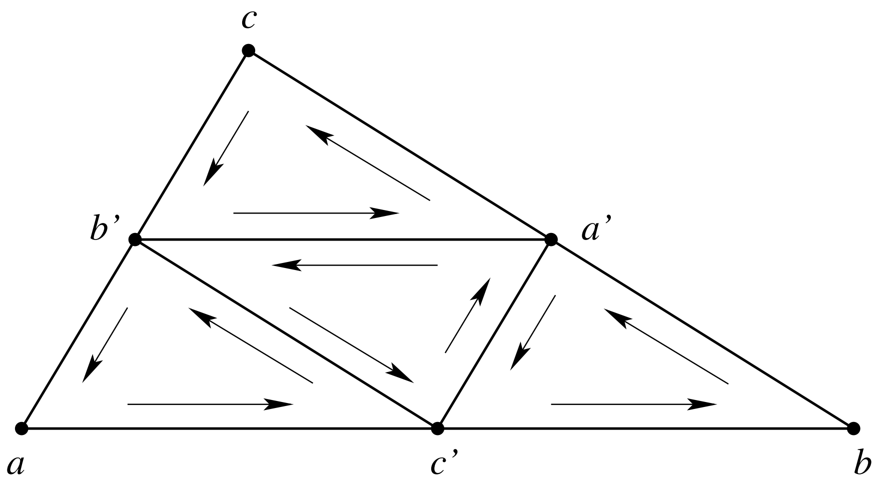
Označme $a,b,c\in\mathbb{C}$ vrcholy trojúhelníku $\triangle$, to jest podle dříve zavedeného značení $\triangle=\triangle(a,b,c)$. Položme

$$J := \int_{\partial\triangle} f\,,\quad L := \text{délka}(\partial\triangle) = |a-b|+|b-c|+|c-a|.$$

Označme po řadě a', b', c' středy úseček $[\,b,c\,]$, $[\,c,a\,]$, $[\,a,b\,]$ a dále

$$\triangle_{1,1} := \triangle(a,c',b'),\ \triangle_{1,2} := \triangle(c',b,a'),\ \triangle_{1,3} := \triangle(b',c',a'),\ \triangle_{1,4} := \triangle(b',a',c).$$

Trojúhelníky $\triangle_{1,j}$, $j=1,2,3,4$, jsou navzájem kongruentní ve smyslu, že jeden lze transformovat v druhý pomocí translací a rotací, a jsou také podobné trojúhelníku $\triangle$ s koeficientem podobnosti $1:2$. Situace je znázorněna na obrázku.



Zřejmě

$$\text{délka}(\partial\triangle_{1,j}) = \frac{1}{2}\,\text{délka}(\partial\triangle) = \frac{1}{2}\,L\ \text{ pro } j=1,2,3,4.$$

Dále je snadné se přesvědčit, že

$$\sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\triangle_{1,j}} f = \int_{\partial\triangle} f = J.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pak dostáváme

$$|J| \le \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\partial\triangle_{1,j}} f \right| \tag{2.3}$$

Nutně existuje j, $1 \le j \le 4$, takové, že

$$\left| \int_{\partial\triangle_{1,j}} f \right| \ge \frac{1}{4}\,|J|$$

(v opačném případě se okamžitě dostáváme do sporu s (2.3)). Toto j zvolíme a položíme $\triangle_1 := \triangle_{1,j}$.

Shrňme, že jsme nalezli trojúhelník $\triangle_1 \subset \triangle$ s vlastnostmi:

$$\text{délka}(\partial\triangle_1) = \frac{1}{2}\,\text{délka}(\partial\triangle), \quad \left| \int_{\partial\triangle_1} f \right| \ge \frac{1}{4} \left| \int_{\partial\triangle} f \right|.$$

Tento postup zopakujeme spočetně mnohokrát. Zcela stejným způsobem tak rekurzivně nalezneme klesající posloupnost trojúhelníků

$$\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \triangle_3 \supset \cdots$$

s vlastností

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \text{délka}(\partial\triangle_{n+1}) = \frac{1}{2}\,\text{délka}(\partial\triangle_n) \;\; \text{a} \;\; \left| \int_{\partial\triangle_{n+1}} f \right| \ge \frac{1}{4} \left| \int_{\partial\triangle_n} f \right|.$$

Odtud pak plyne, jak lze snadno dokázat matematickou indukcí, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \text{délka}(\partial\triangle_n) = 2^{-n}\, L \;\; \text{a} \;\; 4^{-n}\,|J| \le \left| \int_{\partial\triangle_n} f \right|.$$

Přitom průměr $\operatorname{diam} \triangle_n$ je roven délce nejdelší strany trojúhelníku $\triangle_n$ a ta je menší nebo rovna délce křivky $\partial\triangle_n$. Dostáváme

$$\operatorname{diam} \triangle_n \le 2^{-n}\, L \to 0 \;\text{ pro } n \to \infty.$$

Podle lemmatu 2.1.7 odtud plyne

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \triangle_n = \{z_0\} \subset \triangle.$$

Nyní využijeme předpoklad, který nám zaručuje existenci komplexní derivace $f'(z_0)$, díky čemuž můžeme funkci f dobře aproximovat lineární funkcí na okolí bodu z_0. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, ale pevné. K němu existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\forall z \in D(z_0, \delta) \cap \Omega, \quad |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon\, |z - z_0|. \tag{2.4}$$

Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ dostatečně velké tak, aby $2^{-n}L < \delta$. Potom $\operatorname{diam} \triangle_n \leq 2^{-n}\, L < \delta$ a odtud

$$\forall z \in \triangle_n, \quad |z - z_0| \leq \operatorname{diam} \triangle_n < \delta.$$

S odvoláním na důsledek 2.1.4 (pro $n = 0$ a $n = 1$) máme rovnost

$$\int_{\partial\triangle_n} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\partial\triangle_n} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)\, \mathrm{d}z.$$

Z této rovnosti a vzhledem k (2.4) dostáváme odhad

$$\begin{aligned}
4^{-n}\, |J| \leq \left| \int_{\partial\triangle_n} f(z)\, \mathrm{d}z \right| &= \left| \int_{\partial\triangle_n} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)\, \mathrm{d}z \right| \\
&\leq \max_{z \in \partial\triangle_n} \big|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big| \text{ délka}(\partial\triangle_n) \\
&\leq \varepsilon \max_{z \in \partial\triangle_n} |z - z_0| \text{ délka}(\partial\triangle_n) \\
&\leq \varepsilon \operatorname{diam}(\triangle_n) \text{ délka}(\partial\triangle_n) \\
&\leq \varepsilon\, (2^{-n}\, L)^2.
\end{aligned}$$

Po zkrácení obdržíme nerovnost $|J| \leq \varepsilon L^2$. Protože jsme $\varepsilon > 0$ volili libovolně, nutně $J = 0$. To je rovnost, kterou jsme měli dokázat. $\square$

Cauchyova věta I: konvexní množiny - pokračování

Goursatovu větu vyslovíme a dokážeme ještě jednou v mírně obecnějším znění. Připustíme existenci jednoho singulárního bodu $p \in \Omega$, ve kterém funkce f nemusí mít komplexní derivaci. Nicméně alespoň požadujeme, aby f byla v bodě p spojitá. Jak uvidíme později v části věnované izolovaným singularitám holomorfních funkcí, singularita v bodě p, kterou připouštíme, je ve skutečnosti jen zdánlivá – je odstranitelná. Proto se toto zobecnění může jevit jako poněkud umělé. Zobecněná formulace se ale ukáže být výhodnou při pozdějších aplikacích věty.

Věta 2.1.9. *Buď $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$ pro nějaký bod $p \in \Omega$ a nechť $f \in C(\Omega)$. Potom pro každý trojúhelník $\triangle \subset \Omega$ platí*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0. \tag{2.5}$$

Cvičení 2.1.10. Buďte $f \in C(\Omega)$, $a \in \Omega$. Potom funkce

$$\Omega \ni w \mapsto \int_{[a,w]} f \in \mathbb{C}$$

je spojitá. *Dokažte!*

Důkaz. I při této formulaci rovnost (2.5) určitě platí v degenerovaném případě, kdy vrcholy trojúhelníku jsou kolineární. Důkaz tohoto speciálního případu je jednoduchý a je ponechán na čtenáři. Nadále předpokládáme, že vrcholy trojúhelníku nejsou kolineární.

Toto zobecnění lze celkem snadno dokázat pomocí původní Goursatovy věty 2.1.5, jestliže využijeme spojité závislosti integrálu na integračním oboru, viz předchozí cvičení. Opět označíme $a, b, c \in \mathbb{C}$ vrcholy trojúhelníku $\triangle$, a tedy $\triangle = \triangle(a, b, c)$. Rozlišíme několik případů podle polohy bodu p vzhledem k trojúhelníku $\triangle$.

(I) Případ $p \notin \triangle$. Položme $\tilde{\Omega} := \Omega \setminus \{p\}$. Potom $f \in H(\tilde{\Omega})$ a $\triangle \subset \tilde{\Omega}$. Tento případ je zahrnut v původní Goursatově větě 2.1.5, a tak (2.5) platí.

(II) Případ p se shoduje s jedním z vrcholů a, b, c. Pro určitost předpokládejme, že $p = a$. Podle cvičení 2.1.10 je funkce g definovaná vztahem

$$\forall w \in \Omega,\ \ g(w) := \int_{\partial\triangle(w,b,c)} f = \int_{[w,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,w]} f$$

spojitá na Ω. Přitom $\int_{\partial\triangle} f = g(a)$.

Zvolme poloměr $r > 0$ dostatečně malý tak, aby uzavřený kruh $\overline{D(a, r)}$ neobsahoval vrcholy b, c. Položme ($\triangle^{\text{o}}$ značí vnitřek $\triangle$)

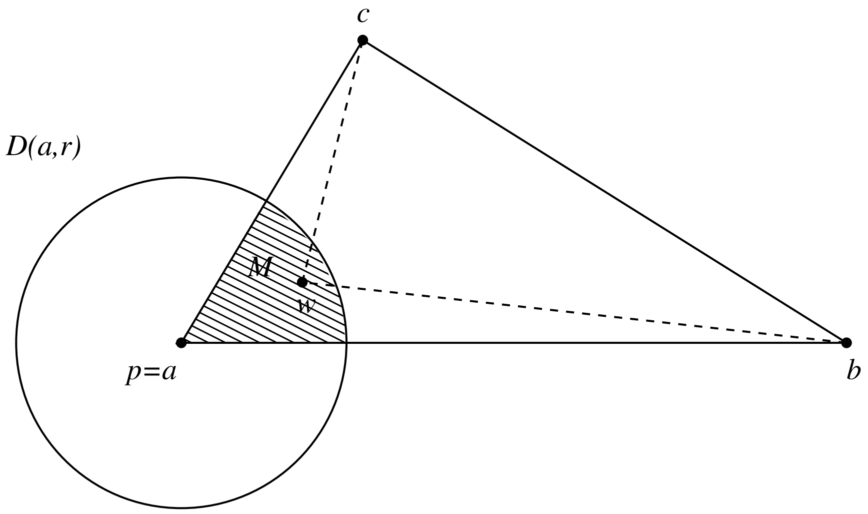
$$M := D(a, r) \cap \triangle^{\text{o}}.$$

Potom M je neprázdná otevřená množina s vrcholem a ležícím na její hranici (je jejím hromadným bodem). Kromě toho je zřejmě splněno: $\forall w \in M,\ \ p \notin \triangle(w, b, c)$. Pro trojúhelník

$\triangle(w,b,c)$ lze tedy použít případ (I) a dostáváme

$$\forall w \in M,\ \ g(w) = \int_{\partial\triangle(w,b,c)} f = 0.$$

Popsaná situace je naznačena na obrázku.



Nyní můžeme použít limitní přechod

$$\int_{\partial\triangle} f = g(a) = \lim_{\substack{w \to a \\ w \in M}} g(w) = 0.$$

(III) Případ p leží na hranici trojúhelníku $\triangle$, ale p se neshoduje s žádným z vrcholů. Pro určitost předpokládejme, že p leží na úsečce $[\,a,b\,]$, ale $p \neq a, b$. Potom $\triangle$ je sjednocením trojúhelníků $\triangle(a,p,c)$ a $\triangle(p,b,c)$. Na trojúhelníky $\triangle(a,p,c)$, $\triangle(p,b,c)$ lze aplikovat případ (II). Přitom platí (*načrtněte si obrázek!*)

$$\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle(a,p,c)} f + \int_{\partial\triangle(p,b,c)} f = 0 + 0 = 0.$$

(IV) Případ p leží ve vnitřku trojúhelníku $\triangle$. Potom $\triangle$ je sjednocením trojúhelníků $\triangle(a,b,p)$, $\triangle(b,c,p)$ a $\triangle(c,a,p)$. Pro trojúhelníky $\triangle(a,b,p)$, $\triangle(b,c,p)$ a $\triangle(c,a,p)$ lze opět použít případ (II). Přitom platí (*načrtněte si obrázek!*)

$$\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle(a,b,p)} f + \int_{\partial\triangle(b,c,p)} f + \int_{\partial\triangle(c,a,p)} f = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Věta je dokázána. $\square$

Dále směřujeme k tomu, abychom vyslovili a dokázali Cauchyovu větu a Cauchyovu formuli ve speciálním případě, který se týká holomorfních funkcí na konvexní oblasti. Nejprve jedno lemma.

Lemma 2.1.11. *Buďte $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, konvexní množina, $f \in C(\Omega)$. Nechť f splňuje podmínku:*

$$\forall \text{ trojúhelník } \triangle \subset \Omega, \quad \int_{\partial\triangle} f = 0. \tag{2.6}$$

Potom existuje funkce $F \in H(\Omega)$ taková, že $f = F'$.

Důkaz. Zvolme pevně $a \in \Omega$. Díky konvexnosti množiny Ω můžeme definovat funkci

$$\forall z \in \Omega, \;\; F(z) := \int_{[\,a,z\,]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Ukážeme, že $F' = f$.

Buďte $z, z_0 \in \Omega$ dva libovolné body. Opět díky konvexnosti je $\triangle(a, z, z_0) \subset \Omega$. Z podmínky (2.6) plyne rovnost

$$0 = \int_{\partial\triangle(a,z,z_0)} f = \int_{[\,a,z\,]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{[\,z_0,z\,]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{[\,a,z_0\,]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

což můžeme přepsat

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[\,z_0,z\,]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Zřejmě $\int_{[\,z_0,z\,]} f(z_0)\,\mathrm{d}\zeta = f(z_0)(z - z_0)$. Dostáváme vztah

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[\,z_0,z\,]} \big(f(\zeta) - f(z_0)\big)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Standardní odhad dává

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| &= \frac{1}{|z - z_0|}\left|\int_{[\,z_0,z\,]} \big(f(\zeta) - f(z_0)\big)\,\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{|z - z_0|} \max_{\zeta \in [\,z_0,z\,]} \big|f(\zeta) - f(z_0)\big|\;|z - z_0| \\ &\le \max_{\zeta,\,|\zeta - z_0| \le |z|} \big|f(\zeta) - f(z_0)\big|. \end{aligned}$$

Odtud a ze spojitosti funkce f je již zřejmé, že

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right) = 0,$$

což znamená, že $F'(z_0) = f(z_0)$. Přitom bod $z_0 \in \Omega$ byl libovolný. $\square$

Věta 2.1.12. *Buďte $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, konvexní množina, $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$ pro nějaký bod*

$p \in \Omega$ a nechť $f \in C(\Omega)$. Potom

$$\int_\gamma f = 0$$

pro každou regulární uzavřenou křivku γ v Ω.

Důkaz. Podle věty 2.1.9 funkce f splňuje předpoklad (2.6) lemmatu 2.1.11. I ostatní předpoklady lemmatu jsou splněny, a proto existuje $F \in H(\Omega)$, $F' = f$. Tvrzení 2.1.3 nám pak říká, že $\int_\gamma f = \int_\gamma F' = 0$. □

Věta 2.1.13. *Buďte $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, konvexní množina, $f \in H(\Omega)$ a γ regulární uzavřená křivka v Ω. Potom pro každé $z \in \Omega$, $z \notin \langle\gamma\rangle$, platí*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z)\,\mathrm{ind}_\gamma(z). \tag{2.7}$$

Důkaz. Zvolme $z \in \Omega \setminus \langle\gamma\rangle$ libovolné, ale pevné. Pro $\zeta \in \Omega$ definujeme

$$g(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{pro } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{pro } \zeta = z. \end{cases}$$

Z této definice a z předpokladů je zřejmé, že $g \in C(\Omega)$ a $g \in H(\Omega \setminus \{z\})$. Podle věty 2.1.12 je $\int_\gamma g = 0$. Po dosazení z definice funkce g dostáváme

$$0 = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \; - f(z)\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi i\,\mathrm{ind}_\gamma(z)\,f(z).$$

Věta je dokázána. □

2.2 Vztah mezi holomorfními a analytickými funkcemi

Nyní již máme k dispozici potřebné výsledky, abychom mohli dokončit diskuzi o vztahu mezi holomorfními a analytickými funkcemi. Zatím víme z důsledku 1.2.12, že každá analytická funkce na Ω, je na Ω také holomorfní. Naším dalším cílem je ukázat, že tuto implikaci lze obrátit. Dokonce dokážeme o něco více, s čímž také souvisí definice 1.2.16.

Věta 2.2.1. *Je-li $f \in H(\Omega)$, potom f lze na Ω vyjádřit mocninnou řadou, to jest kdykoliv $D(a, r) \subset \Omega$ pro jisté $a \in \Omega$ a $r > 0$, potom funkci f lze na $D(a, r)$ vyjádřit jako konvergentní mocninnou řadu se středem v bodě a.*

Důkaz. Důkaz se opírá o větu 1.3.5 a o větu 2.1.13, konkrétně o Cauchyův integrální vzorec (2.7).

Nechť $D(a, r) \subset \Omega$ pro jisté $a \in \Omega$ a $r > 0$. Zvolíme o něco menší poloměr r', $0 < r' < r$, který je ale jinak libovolný. Označme γ kladně orientovanou kružnici s tímto poloměrem a středem v bodě a:

$$\gamma(t) := a + r'e^{it} \quad \text{pro } t \in [\,0, 2\pi\,].$$

Potom γ je regulární uzavřená křivka v konvexní oblasti $D(a,r)$ a víme, že $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 1$ pro všechna $z \in D(a,r') = \operatorname{int}(\gamma)$. Podle (2.7) platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \quad \text{pro všechna } z \in D(a,r').$$

Dále podle věty 1.3.5 a zejména podle vztahu (1.20) z jejího důkazu máme

$$\forall z \in D(a,r'),\ \ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,\ \text{ kde } c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\big(\zeta - a\big)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Porovnáním dostáváme rovnost

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{2.8}$$

která platí pro všechna $z \in D(a,r')$.

S odvoláním na důsledek 1.2.11 můžeme koeficienty c_n také vyjádřit ve tvaru

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}_0,$$

který již nezávisí na r'. Poloměr r', $0 < r' < r$, jsme ale mohli volit libovolně, a proto vyjádření (2.8) platí pro všechna $z \in D(a,r)$. □

Poznámka 2.2.2. Tuto větu můžeme chápat následovně. Buď $f \in H\big(D(a,r)\big)$, kde $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Zvolme r', $0 < r' < r$, a uvažujme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, kde

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\big(\zeta - a\big)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,\ \ \gamma(t) := a + r'e^{it} \ \text{ pro } t \in [\,0, 2\pi\,].$$

Označme R poloměr konvergence této řady.

Potom platí: *koeficienty c_n nezávisí na konkrétní volbě r', $R \geq r$ a rovnost (2.8) je splněna pro všechna $z \in D(a,r)$.*

Můžeme připustit i možnost $r = \infty$. V tom případě $R = \infty$ a mocninná řada konverguje všude na $\mathbb{C}$.

Naše poznatky o holomorfních a analytických funkcích shrnuje následující věta.

Věta 2.2.3. *Buď $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

(1) f je holomorfní na Ω,

(2) f je analytická na Ω,

(3) f lze na Ω vyjádřit mocninnou řadou.

Důkaz. Implikace (2) $\Longrightarrow$ (1) byla dokázána v důsledku 1.2.12 a implikací (1) $\Longrightarrow$ (3) se zabývá právě dokázaná věta 2.2.1. Implikace (3) $\Longrightarrow$ (2) je zřejmá přímo z definic příslušných pojmů, viz poznámka 1.2.17. $\square$

Důsledek 2.2.4. *Je-li $f \in H(\Omega)$, pak také $f' \in H(\Omega)$.*

Důkaz. Je-li $f \in H(\Omega)$, potom je f analytická na Ω. To znamená, že f lze na Ω lokálně vyjádřit (na nějakém okolí každého bodu z Ω) ve tvaru mocninné řady. Tuto mocninnou řadu lze derivovat člen po členu, což ukazuje, že rovněž f' je analytická na Ω. Odtud plyne $f' \in H(\Omega)$. $\square$

Poznámka 2.2.5. Vycházeje z předchozí věty není těžké dokázat pomocí matematické indukce podle řádu derivace toto tvrzení:

Je-li funkce f holomorfní na Ω, pak f má na Ω komplexní derivace všech řádů.

Tento výklad ještě doplníme větou, jejímž autorem je Giacinto Morera a která vlastně obrací implikaci z Goursatovy věty 2.1.5.

Věta 2.2.6 (Morerova věta)**.** *Buď $f \in C(\Omega)$ a nechť f splňuje podmínku*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0 \tag{2.9}$$

pro všechny trojúhelníky $\triangle \subset \Omega$. Potom $f \in H(\Omega)$.

Důkaz. Buď $a \in \Omega$ libovolný bod. Zvolme $r > 0$ tak, aby $D(a,r) \subset \Omega$. Podmínka (2.9) znamená, že jsou splněny předpoklady lemmatu 2.1.11 pro konvexní oblast $D(a,r)$. Tím máme zaručenu existenci funkce $F \in H\big(D(a,r)\big)$ takové, že $F' = f$ na $D(a,r)$. Potom podle důsledku 2.2.4 je $f = F' \in H\big(D(a,r)\big)$, a tedy $f'(a)$ existuje. Protože $a \in \Omega$ bylo libovolné, zjistili jsme, že $f \in H(\Omega)$. $\square$

Kapitola 3

3.1 Kořeny holomorfních funkcí

Značení 3.1.1. Množinu *kořenů* (nebo *nul* nebo *nulových bodů*) holomorfní funkce f na Ω označíme

$$\mathcal{Z}(f) := \{a \in \Omega;\ f(a) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Poznámka. Ze spojitosti holomorfní funkce f plyne, že $\mathcal{Z}(f)$ je uzavřená podmnožina množiny Ω.

Existují silná omezení na to, jak množina $\mathcal{Z}(f)$ může vypadat. Každý kořen a holomorfní funkce f je buď izolovaný, nebo f je rovna 0 identicky na nějakém okolí bodu a. To také znamená, že jestliže Ω je oblast (tj. je souvislá), $f \in H(\Omega)$ a $\mathcal{Z}(f)$ má v Ω hromadný bod, pak f je nutně identicky rovna 0 na Ω. Naopak není-li f rovna identicky 0 na oblasti Ω, pak všechny body množiny $\mathcal{Z}(f)$ jsou izolované a je jich nejvýše spočetně mnoho. Podrobně jsou tyto výsledky zformulovány a dokázány níže.

Cvičení 3.1.2. Nechť $\Omega = U_1 \cup U_2$, kde $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ jsou neprázdné otevřené množiny, které obecně nejsou disjunktní. Buďte $g_1 \in H(U_1)$ a $g_2 \in H(U_2)$, přičemž je splněna podmínka

$$\forall z \in U_1 \cap U_2,\ \ g_1(z) = g_2(z).$$

Potom existuje právě jedna funkce $g \in H(\Omega)$ taková, že $g\big|_{U_1} = g_1$ a $g\big|_{U_2} = g_2$.

Toto tvrzení je vlastně zřejmé. *Přesto se ujistěte, že víte proč!*

Cvičení 3.1.3. Buďte $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$. Potom podmínka

$$f^{(n)}(a) = 0 \ \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}_0$$

je splněna, právě když $f = 0$ identicky na nějakém okolí bodu a. *Dokažte!*

Návod: Implikace ($\Leftarrow$) je zřejmá. Pro důkaz implikace ($\Rightarrow$) zvolíme $r > 0$ tak, že $D(a, r) \subset \Omega$, a vyjádříme f na $D(a, r)$ ve tvaru mocninné řady. Přitom víme, koeficienty mocninné řady jsou vlastně Taylorovy koeficienty.

Lemma 3.1.4. *Buďte $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$. Nechť f není identicky rovna 0 na žádném okolí bodu a. Potom existují jednoznačně určené $m \in \mathbb{N}_0$ a $g \in H(\Omega)$ takové, že*

$$\forall z \in \Omega,\ f(z) = (z-a)^m g(z) \ \text{ a současně } \ g(a) \neq 0. \tag{3.1}$$

Důkaz. Důkaz jednoznačnosti je snadný a je přenechán čtenáři. Dokážeme existenci. Zvolíme $r > 0$ tak, že $D(a,r) \subset \Omega$. Funkci f můžeme na $D(a,r)$ vyjádřit ve tvaru mocninné řady:

$$\forall z \in D(a,r),\ \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Vzhledem k předpokladu alespoň jeden koeficient c_n musí být nenulový. Položme

$$m := \min\{n \in \mathbb{N}_0;\ c_n \neq 0\},\ \ g_1(z) := \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m} \ \text{ pro všechna } z \in D(a,r).$$

Podle této volby je $g_1 \in H\big(D(a,r)\big)$, $g_1(a) = c_m \neq 0$ a rovnost $f(z) = (z-a)^m g_1(z)$ je splněna na $D(a,r)$.

Dále položme

$$U := \Omega \setminus \{a\},\ \ g_2(z) := \frac{f(z)}{(z-a)^m} \ \text{ pro všechna } z \in U.$$

Potom $D(a,r) \cup U = \Omega$, $g_2 \in H(U)$ a funkce g_1 a g_2 se shodují na $D(a,r) \cap U = D(a,r) \setminus \{a\}$. Podle cvičení 3.1.2 existuje funkce $g \in H(\Omega)$ taková, že $g\big|_{D(a,r)} = g_1$ a $g\big|_U = g_2$. Přitom je zřejmé, že takto zvolené m a g splňují (3.1). □

Definice 3.1.5. Buď $f \in H(\Omega)$ a nechť $a \in \Omega$ je izolovaný (!) kořen funkce f. Potom jsou splněny předpoklady lemmatu 3.1.4 a celé číslo m v podmínce (3.1) je nutně kladné. Číslo $m \in \mathbb{N}$ nazýváme *násobností kořene a*.

Věta 3.1.6. *Buď $f \in H(\Omega)$ a nechť Ω je oblast (je souvislá). Potom nastane právě jeden ze dvou případů:*

(1) $f = 0$ identicky na Ω (to jest $\mathcal{Z}(f) = \Omega$),

(2) množina $\mathcal{Z}(f)$ nemá v Ω hromadný bod.

Důkaz. Označme jako A množinu všech hromadných bodů $\mathcal{Z}(f)$ v Ω.

(I) Ukážeme, že A je uzavřená v Ω. Jak jsme již poznamenali, $\mathcal{Z}(f)$ je uzavřená v Ω, a obsahuje tedy všechny své hromadné body, to jest $A \subset \mathcal{Z}(f)$. Odtud pak plyne inkluze

$$\text{hromadné body } A \ \subset \ \text{hromadné body } \mathcal{Z}(f) \ = \ A.$$

Množina A tedy obsahuje všechny své hromadné body, a je tudíž uzavřená.

(II) Ukážeme, že A je otevřená v Ω. Buď $a \in A \subset \mathcal{Z}(f)$ libovolný bod. Pro spor připusťme, že f není identicky rovna 0 na žádném okolí bodu 0. Podle lemmatu 3.1.4

existují $m \in \mathbb{N}$ a $g \in H(\Omega)$ splňující (3.1). Protože $g(a) \neq 0$ a g je spojitá funkce, existuje $\delta > 0$ takové, že $D(a,\delta) \subset \Omega$ a $g(z) \neq 0$ pro všechna $z \in D(a,\delta)$. V tom případě z (3.1) je vidět, že $\mathcal{Z}(f) \cap D(a,\delta) = \{a\}$. Tedy a není hromadným bodem množiny $\mathcal{Z}(f)$, což je spor.

Dospíváme tak k závěru, že f je rovna identicky 0 na nějakém okolí $D(a,r) \subset \Omega$ pro jisté $r > 0$. To ovšem znamená, že $D(a,r) \subset A$.

(III) Zjistili jsme, že podmnožina $A \subset \Omega$ je současně uzavřená a otevřená. Protože Ω je souvislá a neprázdná, jsou možné právě dva případy, které se navzájem vylučují. Buď $A = \Omega$, a potom také $\mathcal{Z}(f) = \Omega$. V tom případě nastává možnost (1). Nebo $A = \emptyset$. To znamená, že $\mathcal{Z}(f)$ nemá v Ω hromadný bod, čili nastává možnost (2). □

Důsledek 3.1.7. *Buďte $f \in H(\Omega)$, $a \in \mathcal{Z}(f)$. Potom nastane jedna ze dvou možností:*

(1) $f = 0$ identicky na nějakém okolí bodu a,

(2) a je izolovaným kořenem funkce f.

Důkaz. Zvolme $r > 0$ tak, že $D(a,r) \subset \Omega$. Potom f je holomorfní funkce na souvislé množině $D(a,r)$. Podle věty 3.1.6 buď $f = 0$ identicky na $D(a,r)$ nebo a není hromadným bodem množiny kořenů $\mathcal{Z}(f)$. □

Cvičení 3.1.8. Buď $U \subset \mathbb{C}$ neprázdná otevřená množin. Potom existuje spočetný systém kompaktních množin $K_n \subset U$, $n \in \mathbb{N}$, pokrývající U, to jest $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Podobnými úvahami jsme se zabývali již dříve. *Rozmyslete si důkaz!*

Důsledek 3.1.9. *Buď $f \in H(\Omega)$ a nechť Ω je oblast. Dále nechť f není identicky rovna 0 na Ω. Potom pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$ je průnik $K \cap \mathcal{Z}(f)$ konečný (nebo prázdný), to jest f může mít v K pouze konečně mnoho kořenů (nebo žádný).*

Speciálně odsud plyne, že množina kořenů $\mathcal{Z}(f)$ je nejvýše spočetná.

Důkaz. Jestliže by množina $K \cap \mathcal{Z}(f)$ měla nekonečně mnoho bodů, pak by $\mathcal{Z}(f)$ nutně měla v kompaktní množině K hromadný bod. To je ve sporu s větou 3.1.6.

K důkazu, že $\mathcal{Z}(f)$ je nejvýše spočetná, stačí vzít v úvahu cvičení 3.1.8. *Doplňte podrobnosti!* □

Důsledek 3.1.10. *Buďte $f, g \in H(\Omega)$ a nechť Ω je oblast. Jestliže množina*

$$\{z \in \Omega;\ f(z) = g(z)\}$$

má v Ω hromadný bod, potom $\forall z \in \Omega,\ \ f(z) = g(z)$.

Důkaz. Zřejmé, stačí větu 3.1.6 aplikovat na funkci $f - g$. □

Příklad 3.1.11. Vraťme se k poznámce 1.1.21, ve které jsme zavedli funkci ln na $\Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Protože množina Ω je souvislá, z důsledku 3.1.10 vyplývá, že ln je jediná holomorfní funkce na Ω, která se se shoduje s logaritmickou funkcí, jež byla původně definována pouze na intervalu $(0, +\infty)$.

3.2 Izolované singularity holomorfní funkce

Definiční obor holomorfní funkce mívá často podobu otevřené množiny, ze které jsou vyjmuty izolované singulární body, ve kterých tato funkce není definována. Naším dalším úkolem je vyšetřit, jak se holomorfní funkce může chovat v okolí takového singulárního bodu.

Značení 3.2.1. Pro $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ označíme

$$D'(a,r) := D(a,r) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C};\, 0 < |z-a| < r\}.$$

$D'(a,r)$ je tedy kruh s vyjmutým středem, nebo můžeme také říci, že je to otevřené mezikruží s poloměry 0 a r.

Definice 3.2.2. Buďte $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. V tom případě řekneme, že holomorfní funkce f má v bodě a *izolovanou singularitu*.

Jestliže lze f v izolovaném singulárním bodě a dodefinovat tak, že rozšířená funkce je holomorfní všude na Ω (včetně bodu a), potom řekneme, že izolovaná singularita v bodě a je *odstranitelná*.

Nejprve ukážeme, že k tomu, aby izolovaná singularita holomorfní funkce byla odstranitelná, je nutné a stačí, aby tato funkce byla omezená na nějakém okolí singulárního bodu.

Věta 3.2.3. *Buďte $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Singularita funkce f v bodě a je odstranitelná, právě když existuje poloměr $r > 0$ takový, že $D(a,r) \subset \Omega$ a f je omezená na $D'(a,r)$.*

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$) je zřejmá, neboť funkce f holomorfní na Ω je spojitá, a tudíž lokálně omezená (tj. každý bod $a \in \Omega$ má okolí $D(a,r)$, na kterém je f omezená).

Dokážeme implikaci ($\Leftarrow$). Za tím účelem definujeme funkci $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$:

$$h(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & \text{pro } z \neq a, \\ 0 & \text{pro } z = a. \end{cases}$$

Z této definice je zřejmé, že h je holomorfní na $\Omega \setminus \{a\}$. Komplexní derivace funkce h ale existuje i v bodě a (vzhledem k předpokladu o omezenosti funkce f):

$$h'(a) = \lim_{w \to 0} \frac{h(a+w) - h(a)}{w} = \lim_{w \to 0} w f(a+w) = 0.$$

Zvolme $r > 0$ tak, že $D(a,r) \subset \Omega$. Víme, že h můžeme vyjádřit jako konvergentní mocninnou řadu:

$$\forall z \in D(a,r), \;\; h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Přitom $h(a) = h'(a) = 0$, odtud $c_0 = c_1 = 0$. Z definice funkce h je patrné, že

$$\forall z \in D'(a,r), \quad f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^{n-2}.$$

Jestliže definujeme hodnotu funkce f v bodě a jako $f(a) := c_2$, pak rozšířená funkce je analytická na $D(a,r)$, a tedy holomorfní všude na Ω. $\square$

Následující věta obsahuje klasifikaci izolovaných singularit holomorfní funkce. Jak je ve větě přesně zformulováno, existují tři různé typy takovýchto singularit.

Věta 3.2.4. *Buďte $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Potom nastane právě jedna ze tří možností:*

(1) funkce f má v bodě a odstranitelnou singularitu,

(2) existují jednoznačně určené $m \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$, takové, že funkce

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

má v bodě a odstranitelnou singularitu,

(3) pro každé $r > 0$ takové, že $D(a,r) \subset \Omega$, je množina $f\big(D'(a,r)\big)$ hustá v $\mathbb{C}$.

Definice 3.2.5. Při stejném značení jako ve větě 3.2.4 v případě (2) řekneme, že funkce f má v bodě a *pól řádu m*. Funkci

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

v proměnné $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ nazýváme *hlavní částí funkce f v bodě a*.

V případě (3) říkáme, že funkce f má v bodě a *podstatnou singularitu*.

Před vlastním důkazem ukážeme, že případy (1), (2), (3) z věty 3.2.4 lze od sebe odlišit podle toho, zda existuje či neexistuje a čemu se rovná limita $\lim_{z\to a} f(z)$.

Lemma 3.2.6. *Případy (1), (2), (3) z věty 3.2.4 lze charakterizovat také následovně:*

v případě (1)	*existuje* $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$,
v případě (2)	*existuje* $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ *(ekvivalentně* $\lim\limits_{z\to a} \lvert f(z)\rvert = +\infty$*),*
v případě (3)	$\lim\limits_{z\to a} f(z)$ *neexistuje (konečná ani nekonečná).*

Speciálně odtud vyplývá, že případy (1), (2), (3) se navzájem vylučují.

Důkaz. Případ (1) je zřejmý, neboť holomorfní funkce na Ω je spojitá v každém bodě $a \in \Omega$.

Podle toho, jak byl případ (2) popsán ve větě 3.2.4, existuje $h \in H(\Omega)$ tak, že pro všechna $z \in \Omega \setminus \{a\}$ máme

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} + h(z) = \frac{1}{(z-a)^m}\left(c_m + \sum_{k=1}^{m-1} c_k (z-a)^{m-k} + (z-a)^m h(z)\right) \\ &= \frac{g(z)}{(z-a)^m}\,. \end{aligned}$$

Zde funkce g je definována poslední rovností a zřejmě splňuje $\lim_{z\to a} g(z) = c_m$. Přitom podle předpokladu $c_m \neq 0$. Z tohoto vyjádření je již vidět, že $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.

V případě (3) předpokládáme, že množina $f\big(D'(a,r)\big)$ je hustá v $\mathbb{C}$ pro každé $r > 0$ dostatečně. Zvolme klesající posloupnost kladných čísel (poloměrů) $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$D(a,r_1) \subset \Omega \ \text{ a } \ \lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Dále zvolme zcela libovolné $w \in \mathbb{C}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ je množina $f\big(D'(a,r_n)\big)$ hustá v $\mathbb{C}$, a proto můžeme zvolit $z_n \in D'(a,r_n)$ tak, aby $|f(z_n) - w| < 1/n$. Takto nalezená posloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ splňuje

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \ \text{ a současně } \ \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

Protože w mohlo být jakékoliv komplexní číslo, limita $\lim_{z\to a} f(z)$ nemůže existovat. □

Důkaz věty 3.2.4. Podle lemmatu 3.2.6 nastane nejvýše jeden z případů (1), (2), (3). Ukážeme, že alespoň jeden z těchto případů nastane. Toto tvrzení můžeme zformulovat jako implikaci: *jestliže nenastane případ (3), pak nastane případ (1) nebo (2).*

Předpokládejme tedy, že případ (3) nenastal. To znamená, že existují $r > 0$, $w \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ tak, že

$$D(a,r) \subset \Omega, \ f\big(D'(a,r)\big) \cap D(w,\delta) = \emptyset.$$

Poslední rovnost lze přepsat:

$$\forall z \in D'(a,r), \ |f(z) - w| \geq \delta.$$

Můžeme proto definovat

$$\forall z \in D'(a,r), \ F(z) := \frac{1}{f(z) - w}\,.$$

Zřejmě $F \in H\big(D'(a,r)\big)$ a

$$\forall z \in D'(a,r), \ 0 < |F(z)| \leq \frac{1}{\delta}\,. \tag{3.2}$$

Podle věty 3.2.3 je singularity holomorfní funkce F v bodě a odstranitelná. Můžeme tedy

F dodefinovat v bodě a tak, aby $F \in H\big(D(a,r)\big)$. Nyní naopak vyjádříme f pomocí F:

$$\forall z \in D'(a,r), \;\; f(z) = w + \frac{1}{F(z)}\,. \tag{3.3}$$

Dále rozlišíme dva případy.

(i) Případ $F(a) \neq 0$. Potom $F(z) \neq 0$ na nějakém okolí bodu a, a tudíž funkce $1/F(z)$ je holomorfní na tomtéž okolí. Ze vztahu (3.3) je pak zřejmé, že f má v bodě a odstranitelnou singularitu – nastává případ (1) z věty.

(ii) Případ $F(a) = 0$. Potom z definice funkce F, případně ze vztahu (3.2) je patrné, že a je izolovaným kořenem funkce F. Buď $m \in \mathbb{N}$ násobnost tohoto kořene, viz lemma 3.1.4. Ve shodě se vztahem (3.1) zapíšeme

$$F(z) = (z-a)^m G(z), \;\text{kde } G \in H\big(D(a,r)\big), \; G(a) \neq 0.$$

Z definičního vztahu funkce F dostáváme

$$\forall z \in D'(a,r), \;\; 1 = F(z)\big(f(z) - w\big) = G(z)(z-a)^m\big(f(z)-w\big).$$

Odtud je zřejmé, že $\forall z \in D(a,r)$, $G(z) \neq 0$. Položme

$$\forall z \in D(a,r), \;\; H(z) := \frac{1}{G(z)}\,.$$

Potom H je holomorfní na $D(a,r)$ a (3.3) se přepíše

$$\forall z \in D'(a,r), \;\; f(z) = w + (z-a)^{-m}H(z). \tag{3.4}$$

Funkci F můžeme vyjádřit jako konvergentní mocninnou řadu:

$$\forall z \in D(a,r), \;\; H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n, \;\text{kde } d_0 = H(a) = \frac{1}{G(a)} \neq 0.$$

Po dosazení do (3.4) dostáváme (*doplňte mezivýpočet!*)

$$\forall z \in D'(a,r), \;\; f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} d_n (z-a)^{n-m} = w + d_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} d_n (z-a)^{n-m}.$$

Z tohoto vyjádření je již patrné, že nastává případ (2) z věty. □

Věta 3.2.4 nám zaručuje, že každá izolovaná singularita holomorfní funkce odpovídá právě jednomu z typů singularit (1), (2), (3), jež jsou popsány ve větě. Netvrdí však, že všechny tyto typy jsou reálné, že mohou skutečně nastat. U případů (1), (2) je velmi snadné nalézt konkrétní příklady, kdy nastávají. Případ (3) si možná zaslouží trochu více pozornosti. Tuto mezeru vyplňují následující příklad a cvičení.

Příklad 3.2.7. Ve všech příkladech $\Omega := \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(1) Položme $\forall z \in \Omega,\ f(z) := 0$. Potom f má v bodě 0 odstranitelnou singularitu.

Samozřejmě za f bychom stejně dobře mohli vzít jakýkoliv komplexní polynom nebo jakoukoliv jinou celou funkci (tj. funkci, která je holomorfní všude na $\mathbb{C}$).

(2) Buď $m \in \mathbb{N}$. Položme $\forall z \in \Omega,\ f(z) := z^{-m}$. Potom f má v bodě 0 pól řádu m.

(3) Položme

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) := \exp\left(\frac{1}{z}\right). \tag{3.5}$$

Potom f má v bodě 0 podstatnou singularitu. Podrobněji se tímto příkladem zabývá následující cvičení.

Cvičení 3.2.8. Stále $\Omega := \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Buď f funkce definovaná vztahem (3.5).

(1) Potom existuje posloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$, která splňuje

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \ \text{ a současně } \ \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0.$$

Nalezněte takovou posloupnost!

(2) Potom existuje posloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$, která splňuje

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \ \text{ a současně } \ \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty.$$

Nalezněte takovou posloupnost!

(3) Zvolme jakékoliv číslo $w \in \mathbb{C},\ w \neq 0$. Potom existuje posloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$, která splňuje

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \ \text{ a současně } \ \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

Nalezněte takovou posloupnost!

Návod: Číslo w zapíšeme v polárním tvaru $w = re^{i\phi}$, kde $r > 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Uvažte posloupnost

$$z_n := \frac{1}{\ln(r) + i\,(\phi + 2\pi n)}\,, \ n \in \mathbb{N}.$$

3.3 Liouvilleova věta

Známou Liouvilleovu větu a také princip maxima modulu, který bude probrán v další podkapitole, lze odvodit z identity, kterou popisuje následující věta.

Věta 3.3.1. *Buď $f \in H\big(D(a,R)\big)$ pro jisté $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ (připouští se i $R = +\infty$). Zapišme f ve tvaru konvergentní mocninné řady:*

$$\forall z \in D(a,R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{3.6}$$

Potom pro všechna r, $0 \le r < R$, platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 \, d\theta. \tag{3.7}$$

Poznámka. Rovnost (3.7) je vlastně Parsevalova identita pro Hilbertův prostor $L^2([-\pi,\pi], \mathrm{d}\theta)$ a ortonormální bázi $(u_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, kde $u_n(\theta) := e^{in\theta}/\sqrt{2\pi}$. Tuto identitu zde ale dokážeme přímo bez toho, že bychom se odvolávali na výsledky funkcionální analýzy.

Důkaz. Zvolme libovolně, ale pevně r, $0 \le r < R$. Z (3.6) dostaneme

$$f(a + re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \quad \text{pro } \theta \in \mathbb{R}.$$

Řada (3.6) konverguje stejnoměrně na $\overline{D(a,r)}$, z čehož plyne, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$ konverguje stejnoměrně v proměnné $\theta \in \mathbb{R}$. To nás opravňuje k záměně limity a integrálu při následujících úpravách:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 \, \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{N} c_m r^m e^{im\theta} \right) \left(\sum_{n=0}^{N} \overline{c_n}\, r^n e^{-in\theta} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} c_m \overline{c_n}\, r^{m+n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta} \, \mathrm{d}\theta \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} c_m \overline{c_n}\, r^{m+n} \, \delta_{m,n} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.
\end{aligned}$$

Věta je dokázána. □

Věta 3.3.2 (Liouvilleova věta)**.** *Buď f celá funkce (tj. $f \in H(\mathbb{C})$). Je-li f omezená na $\mathbb{C}$, potom f je konstantní funkce.*

Důkaz. Podle předpokladu existuje $M \geq 0$ takové, že $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq M$. Funkci f zapíšeme jako konvergentní mocninnou řadu:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Ve větě 3.3.1 položíme $a = 0$, $R = +\infty$. Identita (3.7) nám pak říká, že

$$\forall r \geq 0, \ \ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, \mathrm{d}\theta \leq M^2.$$

Jestliže tento odhad platí pro celou řadu, potom jistě platí i pro každého sčítance. Dostáváme

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall r > 0, \ \ |c_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Pro $n > 0$ zřejmě musí platit $c_n = 0$. Pro mocninnou řadu to znamená, že $f(z) = c_0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. □

Pomocí Liouvilleovy věty lze dokázat větu o kořenech komplexního polynomu, která je známá jako *základní věta algebry.*

Věta 3.3.3 (Základní věta algebry)**.** *Každý komplexní polynom stupně alespoň* 1 *má v* $\mathbb{C}$ *kořen.*

Poznámka 3.3.4. Jak je čtenáři jistě dobře známo, jsou-li P komplexní polynom stupně $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, potom a je kořenem P, právě když existuje polynom Q stupně $n-1$ takový, že $P(z) = (z-a)Q(z)$ na $\mathbb{C}$. Pomocí základní věty algebry a díky tomuto rozklady lze matematickou indukcí podle n dokázat, že P má právě n kořenů, pokud kořeny počítáme včetně jejich násobnosti.

Důkaz. Buď

$$P(z) := z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

polynom stupně $n \in \mathbb{N}$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Pro spor předpokládejme, že $P(z) \neq 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, a položme

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ f(z) := \frac{1}{P(z)}.$$

Potom f je celá funkce a jistě $f(z) \neq 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Pro $z \neq 0$ máme

$$f(z) = z^{-n} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)^{-1}.$$

Z tohoto vyjádření je patrné, že $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Odsud plyne, že funkce f je omezená na $\mathbb{C}$ (*zdůvodněte!*). Podle Liouvilleovy věty f musí být konstantní funkce. Vzhledem k limitě v nekonečnu tou konstantou musí být 0, což je spor. □

3.4 Princip maxima modulu

Modulem se zde myslí absolutní hodnota nějaké holomorfní funkce. Podle tohoto principu jestliže f je holomorfní funkce na omezené (!) oblasti a je navíc spojitá na uzávěru této oblasti (což je kompaktní množina) a současně funkce f není konstantní, potom $|f|$ může nabývat svého maxima pouze na hranici dané oblasti.

V prvním kroku rozebereme případ, kdy uvažovanou oblastí je kruh.

Věta 3.4.1. *Buď $f \in H\big(D(a,R)\big)$ pro jisté $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Potom pro všechna r, $0 < r < R$, platí*

$$|f(a)| \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|. \tag{3.8}$$

Přitom rovnost nastane, právě když f je konstantní funkce.

Důkaz. Opět zapíšeme f jako konvergentní mocninnou řadu:

$$\forall z \in D(a,R), \;\; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Zvolme libovolně, ale pevně r, $0 < r < R$. Věta bude dokázána, jestliže ukážeme, že z nerovnosti

$$|f(a)| \geq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|$$

plyne, že f je konstantní funkce. Tím je totiž vyloučena ostrá nerovnost

$$|f(a)| > \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|$$

a pokud v (3.8) platí rovnost, pak funkce f je nutně konstantní.

Předpokládejme tedy, že

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \;\; |f(a)| \geq |f(a + re^{i\theta})|.$$

Z identity (3.7) dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta \leq |f(a)|^2 = |c_0|^2.$$

Odtud plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq 0$$

a následně $c_n = 0$ pro všechna $n \geq 1$. To znamená, že $f(z) = c_0$ pro všechna $z \in D(a,R)$. □

Důsledek 3.4.2. *Za stejných předpokladů jako ve větě 3.4.1 nechť je navíc splněno*

$$\forall z \in D(a, R), \quad f(z) \neq 0.$$

Potom pro všechna r, $0 < r < R$, platí

$$|f(a)| \geq \min_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|$$

a rovnost nastane, právě když f je konstantní funkce.

Důkaz. Položme

$$\forall z \in D(a, R), \quad g(z) := \frac{1}{f(z)}.$$

Nyní stačí aplikovat větu 3.4.1 na funkci g. □

Důsledek 3.4.3 (Princip maxima modulu)**.** *Buď $f \in H(\Omega)$, kde Ω je oblast. Jestliže f není konstantní funkce, pak funkce $|f|$ nenabývá nikde na Ω lokálního maxima (myslí se neostré maximum!). Je-li navíc funkce f nenulová všude na Ω, pak $|f|$ nenabývá nikde na Ω ani lokálního minima.*

Poznámka. Předpoklad, že Ω je oblast (tj. je souvislá), je zde pouze proto, aby měl smysl i další předpoklad, a sice že f není konstantní funkce. V případě nesouvislé množiny Ω by například funkce f mohla být konstantní na každé souvislé komponentě Ω a přitom na různých komponentách by příslušná konstanta byla různá. Celkově by tak f nebyla konstantní funkcí. Je jasné, že věta by v tomto případě neplatila.

Důkaz. Připusťme, že funkce f nabývá v Ω lokálního maxima. To znamená, že existují $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ tak, že $D(a, R) \subset \Omega$ a

$$\forall z \in D(a, R), \quad |f(a)| \geq |f(z)|.$$

Potom podle věty 3.4.1 je f konstantní funkce na $D(a, R)$, to jest $\forall z \in D(a, R)$, $f(z) = c_0$ pro jisté $c_0 \in \mathbb{C}$. Vzhledem k tomu, že Ω je souvislá množina, rovnost $f(z) = c_0$ musí platit všude na Ω, viz důsledek 3.1.10.

Druhá část tvrzení týkající se lokálního minima okamžitě vyplývá z první části, jestliže se opět přejde k reciproké funkci $g := 1/f$. □

Poznámka 3.4.4. Z principu maxima modulu lze vyvodit jako bezprostřední důsledek následující tvrzení (*rozmyslete si proč!*).

Buďte Ω omezená oblast, $f \in H(\Omega)$. Nechť $f \in C(\overline{\Omega})$. Potom

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

(kde $\partial\Omega := \overline{\Omega}\setminus\Omega$ je hranice oblasti Ω). Jestliže navíc funkce f není konstantní, pak

$$\forall a \in \Omega,\ \ |f(a)| < \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|.$$

3.5 Stejnoměrná konvergence posloupnosti holomorfních funkcí

Ukážeme, že jestliže posloupnost holomorfních funkcí konverguje lokálně stejnoměrně, pak limitní funkce je také holomorfní. Navíc zderivovaná posloupnost také konverguje lokálně stejnoměrně. K důkazu tohoto výsledku budeme potřebovat *Cauchyovy odhady.*

Věta 3.5.1 (Cauchyovy odhady). *Buď $f \in H\big(D(a,R)\big)$ pro jisté $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Nechť existuje $M \geq 0$ tak, že*

$$\forall z \in D(a,R),\ \ |f(z)| \leq M.$$

Potom

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \ |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\,M}{R^n}\,.$$

Poznámka 3.5.2. Konstantu M ve znění věty můžeme optimalizovat. Je-li f holomorfní a omezená funkce na $D(a,R)$, potom

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \ |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{z\in D(a,R)} |f(z)|.$$

Důkaz. Funkci f zapíšeme jako konvergentní mocninnou řadu:

$$\forall z \in D(a,R),\ \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Přitom víme, že

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,.$$

Pro dané r, $0 < r < R$, a $n \in \mathbb{N}_0$ můžeme díky identitě (3.7) odhadnout

$$|c_n|^2 r^{2n} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta \leq M^2.$$

Po dosazení za c_n dostáváme

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{M}{r^n}\,.$$

Limitní přechod $r \uparrow R$ vede na požadovaný výsledek. □

Definice 3.5.3. Buď f_j, $j \in \mathbb{N}$, posloupnost komplexních funkcí na Ω. Řekneme, že posloupnost (f_j) konverguje k funkci $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *stejnoměrně na kompaktních podmnožinách* Ω, jestliže pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$, $f_j \rightrightarrows f$ na K.

Řekneme, že posloupnost (f_j) konverguje k f *lokálně stejnoměrně na* Ω, jestliže každý bod $a \in \Omega$ má okolí $a \in U_a \subset \Omega$ takové, že $f_j \rightrightarrows f$ na U_a.

Cvičení 3.5.4. Buď f_j, $j \in \mathbb{N}$, posloupnost komplexních funkcí na Ω a f další komplexní funkce na Ω. Potom následující výroky jsou ekvivalentní.

(1) Posloupnost (f_j) konverguje k f stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω.

(2) Posloupnost (f_j) konverguje k f lokálně stejnoměrně na Ω.

Dokažte!

Návod: Implikace (1) $\Rightarrow$ (2). Pro $a \in \Omega$ stačí zvolit $r > 0$ dostatečně malé tak, aby $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$.

Implikace (2) $\Rightarrow$ (1). Buď $K \subset \Omega$ libovolná kompaktní podmnožina. Pro každé $a \in \Omega$ zvolme otevřené (!) okolí $a \in U_a \subset \Omega$ takové, že $f_j \rightrightarrows f$ na U_a. Potom $K \subset \bigcup_{a\in K} U_a$. Nyní si stačí připomenout definici kompaktní množiny.

Věta 3.5.5. *Buďte $f_j \in H(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, a f další komplexní funkce na Ω. Jestliže posloupnost (f_j) konverguje k f stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω, potom $f \in H(\Omega)$ a posloupnost (f_j') konverguje k funkci f' stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω.*

Je zřejmé, že matematickou indukcí podle řádu derivace lze odvodit následující rozšířeni věty 3.5.5.

Důsledek 3.5.6. *Při stejných předpokladech jako ve větě 3.5.5 navíc platí: pro každé $n \in \mathbb{N}$ posloupnost $(f_j^{(n)})$ konverguje k funkci $f^{(n)}$ stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω.*

Důkaz věty 3.5.5. (I) Dokážeme, že $f \in C(\Omega)$. Buď $a \in \Omega$ libovolný bod. Zvolíme $r > 0$ dostatečně malý poloměr tak, aby $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Podle předpokladu $f_j \rightrightarrows f$ na $\overline{D(a,r)}$. Odsud plyne, že $f \in C\big(\overline{D(a,r)}\big)$. Funkce f je tedy spojitá v bodě a, a tudíž všude na Ω.

(II) Dokážeme, že $f \in H(\Omega)$. Buď $\triangle \in \Omega$ libovolný trojúhelník (uzavřený). Podle předpokladu $f_j \rightrightarrows f$ na $\triangle$. Díky tomu dostáváme (viz Goursatova věta 2.1.5)

$$\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle} \lim_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty} \int_{\partial\triangle} f_j = \lim_{j\to\infty} 0 = 0.$$

Podle Morerovy věty 2.2.6 je $f \in H(\Omega)$.

(III) Dokážeme následující pomocný mezivýsledek. Buďte $a \in \Omega$ a poloměr $r > 0$ dostatečně malý, aby $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Tvrdíme, že potom

$$f_j' \rightrightarrows f' \ \text{ na } \overline{D\Big(a, \frac{r}{2}\Big)}.$$

Na chvíli označme $K_1 := \overline{D(a,r/2)}$, $K_2 := \overline{D(a,r)}$. Pro každé $w \in K_1$ je $\overline{D(w,r/2)} \subset K_2$ (z trojúhelníkové nerovnosti). Pomocí Cauchyových odhadů (věta 3.5.1, viz též poznámka 3.5.2) dostáváme

$$\begin{aligned} |f'(w) - f_j'(w)| &\leq \frac{1!}{\frac{r}{2}} \max_{z \in D(w,r/2)} |f(z) - f_j(z)| \\ &\leq \frac{2}{r} \max_{z \in K_2} |f(z) - f_j(z)| \\ &= \frac{2}{r} \|f - f_j\|_{C(K_2)} \end{aligned}$$

(zde $\|\cdot\|_{C(K)}$ značí maximovou normu v prostoru spojitých funkcí na kompaktní množině K). Odsud plyne nerovnost

$$\|f' - f_j'\|_{C(K_1)} \leq \frac{2}{r} \|f - f_j\|_{C(K_2)}.$$

Podle předpokladu $\|f - f_j\|_{C(K_2)} \to 0$, a proto rovněž $\|f' - f_j'\|_{C(K_1)} \to 0$.

(IV) Buď $K \subset \Omega$ libovolná kompaktní podmnožina. Dokážeme, že $f_j' \rightrightarrows f'$ na K.

Pro každé $a \in K$ zvolíme poloměr $r_a > 0$ dostatečně malý, aby $\overline{D(a, r_a)} \subset \Omega$. Z části (III) důkazu víme, že

$$\forall a \in K, \quad f_j' \rightrightarrows f' \ \text{ na } D\Big(a, \frac{r_a}{2}\Big). \tag{3.9}$$

Zřejmě $K \subset \bigcup_{a \in K} D(a, r_a/2)$. Toto otevřené pokrytí má konečné podpokrytí

$$K \subset \bigcup_{a \in M} D\Big(a, \frac{r_a}{2}\Big),$$

kde $M \subset K$ je konečná množina. Z konečnosti pokrytí a z vlastnosti (3.9) již snadno plyne, že $f_j' \rightrightarrows f'$ na K (*doplňte podrobnosti!*). $\square$

Kapitola 4

4.1 Cauchyova věta II – obecný případ

V obecné formulaci Cauchyovy věty, která bude následovat, může být $\Omega \subset \mathbb{C}$ jakákoliv neprázdná otevřená množina. Dále namísto jedné regulární uzavřené křivky v Ω budeme uvažovat konečný soubor takových křivek.

Značení 4.1.1. Buďte $n \in \mathbb{N}$ a $\Gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ soubor regulárních uzavřených křivek v Ω. Označíme

$$\langle \Gamma \rangle := \bigcup_{j=1}^{n} \langle \gamma_j \rangle.$$

Dále pro každou funkci $f := C(\langle \Gamma \rangle)$ položíme

$$\int_\Gamma f := \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f. \tag{4.1}$$

Index bodu $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ vzhledem ke Γ definujeme

$$\operatorname{ind}_\Gamma(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_{\gamma_j}(a).$$

Poznámka. (1) V případě, kdy $n = 1$ a soubor Γ obsahuje jedinou křivku γ, budeme mluvit přímo o křivce γ namísto o souboru Γ.

(2) Regulární uzavřené křivce γ v Ω lze přiřadit lineární funkcionál na vektorovém prostoru $C(\Omega)$:

$$C(\Omega) \ni f \mapsto \int_\gamma f \in \mathbb{C}.$$

Vzhledem k rovnosti (4.1) se proto někdy používá zápis

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n.$$

Přitom soubor uzavřených křivek Γ se nazývá *cyklus*. My toto označení a terminologii dále používat nebudeme.

Věta 4.1.2 (Cauchy). *Buďte $n \in \mathbb{N}$ a $\Gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ soubor regulárních uzavřených křivek v Ω. Nechť je splněna podmínka*

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \ \ \mathrm{ind}_\Gamma(a) = 0. \tag{4.2}$$

Potom pro každou funkci $f \in H(\Omega)$ platí:

(1) $$\int_\Gamma f = 0, \tag{4.3}$$

(2) $$\forall z \in \Omega \setminus \langle\Gamma\rangle, \ \ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \mathrm{ind}_\Gamma(z)\, f(z). \tag{4.4}$$

Poznámka. Bod (1) je vlastní Cauchyova věta, bod (2) je Cauchyův integrální vzorec.

Důkaz. Dokážeme nejprve bod (2).

(I) Definujme funkci g na $\Omega \times \Omega$ vztahem

$$g(z,w) := \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{pro } z \neq w, \\ f'(z) & \text{pro } z = w. \end{cases}$$

Dokážeme, že $g \in C(\Omega \times \Omega)$.

Z definice funkce je vidět, že g je určitě spojitá v každém bodě $(z,w) \in \Omega \times \Omega$, $z \neq w$, Stačí tedy ověřit spojit g na diagonále kartézského součinu, to jest v bodech $(a,a) \in \Omega \times \Omega$. Zvolíme $r > 0$ dostatečně malé tak, aby $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Díky konvexnosti kruhu můžeme vyjádřit

$$\forall (z,w) \in D(a,r), \ \ g(z,w) = \int_0^1 f'\big(w + t(z-w)\big)\mathrm{d}t.$$

Skutečně, pro $z = w$ je rovnost zřejmá. Pro $z \neq w$ máme

$$f(z) - f(w) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big((1-t)w + tz\big)\mathrm{d}t = (z-w)\int_0^1 f'\big(w + t(z-w)\big)\mathrm{d}t.$$

Odtud je již rovnost patrná i v tomto případě.

Funkce f' je spojitá, a tedy omezená na kompaktní množině $\overline{D(a,r)}$. Může proto použit Lebesgueovu větu o integrální majorantě v limitním přechodu

$$\lim_{(z,w)\to(a,a)} g(z,w) = \lim_{\substack{z\to a \\ w \to a}} \int_0^1 f'\big(w + t(z-w)\big)\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(a)\,\mathrm{d}t = f'(a) = g(a,a).$$

(II) Položme

$$\forall z \in \Omega, \;\; h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)\,\mathrm{d}w.$$

Dokážeme, že $h \in H(\Omega)$.

Nejprve si všimněme, že při pevném $w \in \Omega$ je funkce $z \mapsto g(z,w)$ spojitá na Ω (plyne ze spojitosti g na $\Omega \times \Omega$). Navíc na $\Omega \setminus \{w\}$ je tato funkce dokonce holomorfní, jak je zřejmé z definice g. Vzhledem ke spojitosti je ale izolovaná singularita v bodě w odstranitelná, viz věta (3.2.3). Funkce $g(z,w)$ v proměnné z a při pevném w je tedy holomorfní všude na Ω. Z Goursatovy věty pak plyne (věta 2.1.5), že pro každý trojúhelník (uzavřený) $\triangle \subset \Omega$ platí

$$\forall w \in \Omega, \;\; \int_{\partial\triangle} g(z,w)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Nyní můžeme použít Morerovu větu (věta 2.2.6). Funkce h je určitě spojitá na Ω (*záměnu limity a integrálu v definici funkce h zdůvodněte samostatně!*). Pro libovolný trojúhelník $\triangle \subset \Omega$ dostáváme

$$\int_{\partial\triangle} h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\triangle}\left(\int_\Gamma g(z,w)\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\int_{\partial\triangle} g(z,w)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma 0\,\mathrm{d}w = 0.$$

Odtud již plyne, že h je holomorfní. Použití Fubiniovy věty (při záměně integrace) bylo oprávněné, neboť funkce g je omezená na kompaktní množině $\triangle \times \langle\Gamma\rangle$.

(III) Dokážeme, že $h = 0$ identicky na Ω.

Položíme

$$\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle; \, \mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0\}$$

a dále

$$\forall z \in \Omega_1, \;\; h_1(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Víme, že index uvažovaný jako funkce bodu při pevném Γ je lokálně konstantní funkce. Odtud plyne, že Ω_1 je otevřená množina (*zdůvodněte podrobně!*). Dále z věty 1.3.5 můžeme usoudit, že $h_1 \in H(\Omega_1)$.

Pro libovolné $z \in \Omega \cap \Omega_1$ vezmeme v úvahu, že $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0$, a upravíme

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \mathrm{ind}_\Gamma(z) f(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)\,\mathrm{d}w \\ &= h(z). \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že holomorfní funkce $h \in H(\Omega)$ a $h_1 \in H(\Omega_1)$ se shodují na průniku svých definičních oborů. Proto existuje (jednoznačně určená) funkce $\varphi \in H(\Omega \cup \Omega_1)$ taková, že $\varphi\big|_\Omega = h$, $\varphi\big|_{\Omega_1} = h_1$. Přitom předpoklad (4.2) znamená, že $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \Omega_1$, a tedy $\Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C}$.

Funkce φ je tedy celá, to jest $\varphi \in H(\mathbb{C})$.

Připomeňme si, že neomezená souvislá komponenta množiny $\mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle$ obsahuje okolí nekonečna tvaru $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)}$ pro R dostatečně velké, a přitom sama tato komponenta je obsažena v Ω_1. Proto φ na $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)}$ se shoduje s h_1. Dostáváme

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \lim_{z\to\infty} h_1(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w = 0$$

(*samostatně zdůvodněte poslední rovnost!*). Odtud speciálně plyne, že φ je omezená funkce. Podle Liouvilleovy věty je funkce φ konstantní. Vzhledem k limitě v nekonečnu tou konstantou musí být 0. Dospěli jsme tak k závěru, že $\varphi = 0$ identicky na $\mathbb{C}$, a proto $h = 0$ identicky na Ω.

(IV) Dokončení důkazu Cauchyova integrálního vzorce, to jest identity (4.4). Pro $z \in \Omega \setminus \langle\Gamma\rangle$ máme

$$0 = h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w \;-\; \mathrm{ind}_\Gamma(z)\, f(z).$$

Nyní snadno dokážeme i bod (1) z věty, to jest vlastní Cauchyovu větu (4.3). Zvolíme jakkoliv $a \in \Omega \setminus \langle\Gamma\rangle$ a položíme

$$\forall z \in \Omega,\;\; F(z) := (z-a) f(z).$$

Zřejmě $F \in H(\Omega)$. Z již dokázané identity (4.4) plyne

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(w)}{w-a}\, \mathrm{d}w = \mathrm{ind}_\Gamma(a)\, F(a) = 0.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Důsledek 4.1.3. *Buďte Γ_0, Γ_1 dva soubory regulárních uzavřených křivek v Ω. Jestliže*

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega,\;\; \mathrm{ind}_{\Gamma_0}(a) = \mathrm{ind}_{\Gamma_1}(a),$$

potom

$$\forall f \in H(\Omega),\;\; \int_{\Gamma_0} f = \int_{\Gamma_1} f.$$

Důkaz. Zapišme $\Gamma_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$, $\Gamma_1 = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Označme jako $\tilde{\eta}_j$ opačnou křivku ke křivce η_j, $1 \le j \le n$. Položme

$$\Gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_n).$$

Podle předpokladu

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega,\;\; \mathrm{ind}_\Gamma(a) = \mathrm{ind}_{\Gamma_0}(a) - \mathrm{ind}_{\Gamma_1}(a) = 0.$$

Z věty 4.1.2 pak plyne

$$\forall f \in H(\Omega),\ \ 0 = \int_\Gamma f = \int_{\Gamma_0} f - \int_{\Gamma_1} f.$$

To dokazuje tvrzení. □

Cvičení 4.1.4. Buďte $\Omega := \mathbb{C} \setminus \left(\overline{D(-2,1)} \cup \overline{D(2,1)}\right)$ a dále $\Gamma_0 := (\gamma_1)$, $\Gamma_1 := (\eta_1, \eta_2)$, kde

$$\gamma_1(t) := 4e^{it},\ \eta_1(t) := -2 + 2e^{it},\ \eta_2(t) := 2 + 2e^{it},\ \ t \in [\,0, 2\pi\,]$$

(*načrtněte si obrázek!*). Potom

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega = \overline{D(-2,1)} \cup \overline{D(2,1)},\ \ \operatorname{ind}_{\Gamma_0}(a) = \operatorname{ind}_{\Gamma_1}(a).$$

Ověřte tuto rovnost!

Následující důsledek je speciálním případem Cauchyovy věty, který se často používá.

Důsledek 4.1.5. *Buď γ regulární Jordanova křivka v Ω. Jestliže vnitřek křivky* $\operatorname{int}(\gamma) \subset \Omega$, *potom*

$$\forall f \in H(\Omega),\ \ \int_\gamma f = 0.$$

Důkaz. Víme, že vnějšek Jordanovy křivky, $\operatorname{ext}(\gamma)$, je neomezená souvislá komponenta množiny $\mathbb{C} \setminus \langle\gamma\rangle$. Proto index všech bodů z této komponenty vzhledem ke křivce γ je roven 0. Na druhé straně podle předpokladu je $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \operatorname{ext}(\gamma)$, a tedy $\operatorname{ind}_\gamma(a) = 0$ pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tím je splněn předpoklad (4.2) věty 4.1.2, z které již plyne tento důsledek. □

4.2 Cauchyova věta a homotopie

Cílem této podkapitoly je dokázat, volně řečeno, že integrál holomorfní funkce podél křivky se nemění, pokud tuto křivku spojitě deformujeme. Přesná formulaci je založena na pojmu homotopie, se kterým jsme se již setkali a který si opět připomeneme.

Definice 4.2.1. Buďte $\gamma_0, \gamma_1 : [\,\alpha, \beta\,] \to \Omega$ dvě uzavřené křivky (spojité, ale ne nutně regulární). Řekneme, že tyto křivky jsou *homotopické v* Ω (nebo Ω-*homotopické*), jestliže existuje spojitá funkce $H\colon [\,\alpha, \beta\,] \times [\,0, 1\,] \to \Omega$ s vlastnostmi
(1) $\forall t \in [\,\alpha, \beta\,]$, $H(t, 0) = \gamma_0(t)$,
(2) $\forall t \in [\,\alpha, \beta\,]$, $H(t, 1) = \gamma_1(t)$,
(3) $\forall s \in [\,0, 1\,]$, $H(\alpha, s) = H(\beta, s)$.

Poznámka. Dříve jsem potřebovali pouze speciální případ homotopických křivek, kdy jedna z křivek je konstantní.

Poznámka 4.2.2. Pro $\forall s \in [\,0,1\,]$ pevné položme $\forall t \in [\,\alpha,\beta\,]$, $\gamma_s(t) := H(t,s)$. Potom γ_s je uzavřená křivka, která je sice spojitá, ale nemusí být regulární ani v případě, kdy křivky γ_0, γ_1 regulární jsou. Tato okolnost poněkud zkomplikuje důkazy, které budou následovat, jelikož všechny naše výsledky byly odvozeny pouze pro regulární křivky.

Poznámka 4.2.3. Křivka $\gamma : [\,\alpha,\beta\,] \to \Omega$ je *konstantní*, jestliže $\langle\gamma\rangle = \{a\}$ pro nějaké $a \in \mathbb{C}$. Pro tuto křivku zřejmě platí: $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$ je $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$.

Skutečně, $\gamma'(t) = 0$ pro všechna $t \in [\,\alpha,\beta\,]$, a proto

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Zatím víme, že index bodu vzhledem k uzavřené křivce je lokálně konstantní funkce, jestliže křivka je volena pevně a bod uvažujeme jako proměnnou. Znamená to, že index se nemění, pokud příliš nezměníme polohu bodu. Nyní si všimneme opačné situace, kdy bod zůstává pevný, avšak křivka pevně volena není. Následující lemma ukazuje, že pro dvě uzavřené křivky, které se od sebe v jistém smyslu liší jen málo, jsou si příslušné indexy rovny.

Lemma 4.2.4. *Buďte $\gamma_0, \gamma_1 : [\,\alpha,\beta\,] \to \Omega$ regulární uzavřené křivky. Jestliže pro $w \in \mathbb{C}$ je splněno*

$$\forall t \in [\,\alpha,\beta\,],\ \ |\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |w - \gamma_0(t)|, \tag{4.5}$$

potom $\operatorname{ind}_{\gamma_0}(w) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(w)$.

Důkaz. Z ostré nerovnosti (4.5) zřejmě plyne $w \neq \gamma_0(t)$ a $w \neq \gamma_1(t)$ pro všechna $t \in [\,\alpha,\beta\,]$. Položme

$$\forall t \in [\,\alpha,\beta\,],\ \ \gamma(t) := \frac{\gamma_1(t)-w}{\gamma_0(t)-w}.$$

Potom γ je regulární uzavřená křivka, která splňuje

$$\forall t \in [\,\alpha,\beta\,],\ \ |\gamma(t) - 1| = \left|\frac{\gamma_1(t)-\gamma_0(t)}{\gamma_0(t)-w}\right| < 1.$$

To znamená, že $\langle\gamma\rangle \subset D(1,1)$. Odtud je vidět, že 0 leží v neomezená souvislé komponentě množiny $\mathbb{C} \setminus \langle\gamma\rangle$. Platí tedy rovnost

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{ind}_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)-w} - \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)-w}\right)\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{ind}_{\gamma_1}(w) - \operatorname{ind}_{\gamma_0}(w). \end{aligned}$$

Tím je lemma dokázáno. $\square$

Cauchyova věta a homotopie - pokračování

Dále ukážeme, že při spojité deformaci uzavřené křivky uvnitř otevřené množiny Ω se nemění index bodů, které leží mimo Ω. Metoda důkazu je založena na lemmatu 4.2.4.

Věta 4.2.5. *Buďte γ, γ_0 dvě regulární uzavřené křivky, které jsou homotopické v Ω. Potom platí*

$$\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \ \ \operatorname{ind}_\gamma(w) = \operatorname{ind}_{\gamma_0}(w).$$

Důkaz. Zvolme $w \in \mathbb{C}$, $w \notin \Omega$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že křivky γ, γ_0 jsou definovány na intervalu $[0,1]$. Podle předpokladu existuje homotopie

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to \Omega$$

s vlastnostmi:

$$\begin{aligned} &\gamma_0(t) = H(t,0), \ \gamma(t) = H(t,1) \ \text{ pro } t \in [0,1], \\ &H(0,s) = H(1,s) \ \text{ pro } s \in [0,1]. \end{aligned}$$

H je spojité zobrazení, a proto $H([0,1] \times [0,1]) \subset \Omega$ je kompaktní, a tedy uzavřená množina. Tudíž

$$\operatorname{dist}\big(w, H([0,1] \times [0,1])\big) > 0$$

a můžeme zvolit $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\forall (t,s) \in [0,1] \times [0,1], \ \ |H(t,s) - w| > 2\varepsilon. \tag{4.6}$$

Spojitá funkce H na kompaktní množině $[0,1] \times [0,1]$ je stejnoměrně spojitá. Proto můžeme zvolit $n \in \mathbb{N}$ dostatečně velké takové, aby

$$\forall (t,s), (t',s') \in [0,1] \times [0,1], \ \ |s - s'| + |t - t'| \le \frac{1}{n} \implies |H(t,s) - H(t',s')| < \varepsilon \tag{4.7}$$

(pro pozdější pohodlí jsme zvolili neostrou nerovnost).

Homotopii H nahradíme konečným souborem křivek, který začíná křivkou γ_0 a končí křivkou γ, a přitom dvě po sobě jdoucí křivky se liší jen málo (s ohledem na aplikaci lemmatu 4.2.4). Pokládáme

$$\gamma_k(t) := H\left(t, \frac{k}{n}\right) \ \text{ pro } t \in [0,1], \ k = 0,1,2,\ldots,n$$

(γ_0 má svůj původní význam, $\gamma_n = \gamma$).

Jak bylo zmíněno v poznámce výše, křivky γ_k, $1 \le k \le n-1$, jsou zaručeně spojité a uzavřené, ale nemusí být regulární. Abychom tento nedostatek překonali, aproximujeme křivky γ_k po částech lineárními křivkami, které označíme $\tilde{\gamma}_k$. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ položíme

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_k(t) &:= \left(\gamma_k\left(\frac{j-1}{n}\right)\left(\frac{j}{n} - t\right) + \gamma_k\left(\frac{j}{n}\right)\left(t - \frac{j-1}{n}\right)\right) n \\ &= H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(j - nt) + H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)(nt - j + 1) \quad \text{pro } t \in \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right], \\ &\quad j = 1, 2, \ldots, n.\end{aligned}$$

Tuto aproximaci jsme tedy volili tak, aby platilo

$$\tilde{\gamma}_k\left(\frac{j}{n}\right) = \gamma_k\left(\frac{j}{n}\right) \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Dále odvodíme několik odhadů, které nám nakonec umožní použit lemma 4.2.4.

(i) Pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\forall t \in [\,0, 1\,], \ \ |\tilde{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t)| < \varepsilon. \tag{4.8}$$

Skutečně, pro $t \in [\,(j-1)/n, j/n\,]$ vyjádříme

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t) &= H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(j - nt) + H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)(nt - j + 1) - H\left(t, \frac{k}{n}\right) \\ &= \left(H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(t, \frac{k}{n}\right)\right)(j - nt) \\ &\quad + \left(H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(t, \frac{k}{n}\right)\right)(nt - j + 1).\end{aligned}$$

Vzhledem k (4.7) máme

$$\left|H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(t, \frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon, \ \left|H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(t, \frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon.$$

Navíc pro t z uvedeného intervalu jsou faktory $(j - nt)$ a $(nt - j + 1)$ nezáporné. Nyní již pomocí trojúhelníkové nerovnosti snadno dostaneme (4.8).

(ii) Pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\forall t \in [\,0, 1\,], \ \ |w - \tilde{\gamma}_k(t)| > \varepsilon. \tag{4.9}$$

Skutečně, podle (4.6) je $|w - \gamma_k(t)| > 2\varepsilon$ a vzhledem k (4.8) dostáváme

$$|w - \tilde{\gamma}_k(t)| \geq |w - \gamma_k(t)| - |\tilde{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

(iii) Pro $k = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\forall t \in [\,0, 1\,], \;\; |\tilde{\gamma}_k(t) - \tilde{\gamma}_{k-1}(t)| < \varepsilon \tag{4.10}$$

a vzhledem k (4.9) také

$$\forall t \in [\,0, 1\,], \;\; |\tilde{\gamma}_k(t) - \tilde{\gamma}_{k-1}(t)| < |w - \tilde{\gamma}_k(t)|. \tag{4.11}$$

Skutečně, pro $t \in [\,(j-1)/n, j/n\,]$ po dosazení z definičních vztahů dostáváme

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_k(t) - \tilde{\gamma}_{k-1}(t) \;\; = \;\; & \left(H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k-1}{n}\right) \right)(j - nt) \\ & + \left(H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(\frac{j}{n}, \frac{k-1}{n}\right) \right)(nt - j + 1). \end{aligned}$$

Přitom podle (4.7) máme odhady

$$\left| H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k-1}{n}\right) \right| < \varepsilon, \;\; \left| H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(\frac{j}{n}, \frac{k-1}{n}\right) \right| < \varepsilon.$$

Odtud již snadno plyne (4.10).

(iv) Pro $k = 0, 1, 2, \dots, n$ platí

$$\forall t \in [\,0, 1\,], \;\; |\tilde{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t)| < |w - \gamma_k(t)|. \tag{4.12}$$

Tato nerovnost nás ale zajímá pouze pro $k = 0$ a $k = n$ (neboť $\gamma_n = \gamma$). Vzhledem k (4.8) a (4.6) odhadneme

$$|\tilde{\gamma}_k(t) - \gamma_k(t)| < \varepsilon < 2\varepsilon < |w - \gamma_k(t)|.$$

Nyní se můžeme odvolat na lemma 4.2.4, které nám s ohledem na nerovnost (4.11) říká, že

$$\mathrm{ind}_{\tilde{\gamma}_k}(w) = \mathrm{ind}_{\tilde{\gamma}_{k-1}}(w) \;\text{ pro } k = 1, 2, \dots, n.$$

Podobně vzhledem k (4.12) máme

$$\mathrm{ind}_{\tilde{\gamma}_0}(w) = \mathrm{ind}_{\gamma_0}(w), \; \mathrm{ind}_{\tilde{\gamma}_n}(w) = \mathrm{ind}_{\gamma_n}(w) = \mathrm{ind}_{\gamma}(w).$$

Můžeme shrnout, že

$$\mathrm{ind}_{\gamma_0}(w) = \mathrm{ind}_{\tilde{\gamma}_0}(w) = \mathrm{ind}_{\tilde{\gamma}_1}(w) = \; \cdots \; = \mathrm{ind}_{\tilde{\gamma}_n}(w) = \mathrm{ind}_{\gamma}(w).$$

Tím je věta dokázána. □

Tato věta má některé důležité důsledky.

Důsledek 4.2.6. *Buď γ regulární uzavřená křivka, která je v Ω homotopická* 0 *(tj. konstantní křivce). Potom pro každou funkci $f \in H(\Omega)$ platí*

$$(1) \qquad \int_\gamma f = 0,$$

$$(2) \qquad \forall z \in \Omega \setminus \langle\gamma\rangle, \ \ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \operatorname{ind}_\gamma(z)\, f(z).$$

Důkaz. Stačí ověřit, že je splněn předpoklad (4.2) věty 4.1.2, z které pak už tvrzení okamžitě plyne. Přitom pokládáme $\Gamma := (\gamma)$. Podle předpokladu je ale γ homotopická v Ω konstantní křivce γ_0, a tak podle věty 4.2.5 je $\operatorname{ind}_\gamma(a) = \operatorname{ind}_{\gamma_0}(a) = 0$ pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. □

Speciálním případem je situace, kdy Ω je jednoduše souvislá oblast. To znamená, že každá uzavřená křivka v Ω je homotopická 0.

Důsledek 4.2.7. *Buď Ω jednoduše souvislá oblast. Potom pro každou regulární uzavřenou křivku γ v Ω a každou funkci $f \in H(\Omega)$ platí*

$$(1) \qquad \int_\gamma f = 0,$$

$$(2) \qquad \forall z \in \Omega \setminus \langle\gamma\rangle, \ \ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \operatorname{ind}_\gamma(z)\, f(z).$$

Dalším důsledkem je, že pro funkci, která je holomorfní na množině Ω a kterou integrujeme podél křivky (ne nutně uzavřené) ležící v Ω, se integrál nemění, pokud tuto křivku spojitě deformujeme uvnitř množiny Ω. Abychom tento důsledek mohli přesně formulovat, rozšíříme pojem homotopie i na křivky, které nejsou uzavřené. V tom případě ale budeme požadovat, aby koncové body křivky byly voleny pevně a neměnily se ani během spojité deformace.

Definice 4.2.8. Buďte $\gamma_0, \gamma_1 : [\,\alpha, \beta\,] \to \Omega$ dvě křivky (spojité, ale ne nutně regulární), které splňují $\gamma_0(\alpha) = \gamma_1(\alpha)$, $\gamma_0(\beta) = \gamma_1(\beta)$. Řekneme, že *křivky γ_0, γ_1 s pevnými koncovými body jsou homotopické v Ω*, jestliže existuje spojitá funkce $H\colon [\,\alpha,\beta\,] \times [\,0,1\,] \to \Omega$ s vlastnostmi
(1) $\forall t \in [\,\alpha,\beta\,]$, $H(t,0) = \gamma_0(t)$,
(2) $\forall t \in [\,\alpha,\beta\,]$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$,
(3) $\forall s \in [\,0,1\,]$, $H(\alpha,s) = \gamma_0(\alpha)$ a $H(\beta,s) = \gamma_0(\beta)$.

Cvičení 4.2.9. Buď $\gamma : [\,0,1\,] \to \Omega$ křivka (ne nutně uzavřená a ne nutně regulární). Definujme křivku $\eta\colon [\,0,2\,] \to \Omega$ vztahem

$$\eta(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{pro } t \in [\,0,1\,], \\ \gamma(2-t) & \text{pro } t \in [\,1,2\,] \end{cases}$$

(křivka η nejprve sleduje křivku γ na intervalu $[0,1]$ a poté pokračuje podél opačné křivky ke γ na intervalu $[1,2]$). Potom křivka η je uzavřená a je homotopická 0. Je-li křivka γ regulární, pak rovněž η je regulární. *Dokažte!*

Návod: Uvažte zobrazení $H : [0,2] \times [0,1] \to \Omega$ definované pro každé $s \in [0,1]$ vztahem

$$H(t,s) := \begin{cases} \gamma\big((1-s)t\big) & \text{pro } t \in [0,1], \\ \gamma\big((1-s)(2-t)\big) & \text{pro } t \in [1,2]. \end{cases}$$

Cvičení 4.2.10. Buďte $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dvě křivky s pevnými koncovými body, které jsou homotopické v Ω. Definujme křivku $\eta_0 : [0,2] \to \Omega$ vztahem

$$\eta_0(t) := \begin{cases} \gamma_0(t) & \text{pro } t \in [0,1], \\ \gamma_1(2-t) & \text{pro } t \in [1,2] \end{cases} \tag{4.13}$$

Potom křivka η_0 je uzavřená a je homotopická 0. Jsou-li křivky γ_0, γ_1 regulární, pak rovněž η_0 je regulární. *Dokažte!*

Návod: Podle předpokladu existuje spojité zobrazení $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ s vlastnostmi:

$$\gamma_0(t) = H(t,0),\ \gamma_1(t) = H(t,1) \ \text{ pro } t \in [0,1],$$
$$H(0,s) = \gamma_0(0),\ H(1,s) = \gamma_0(1) \ \text{ pro } s \in [0,1].$$

Uvažte zobrazení $\tilde{H} : [0,2] \times [0,1] \to \Omega$ definované pro každé $s \in [0,1]$ vztahem

$$\tilde{H}(t,s) := \begin{cases} H(t,s) & \text{pro } t \in [0,1], \\ \gamma_1(2-t) & \text{pro } t \in [1,2]. \end{cases}$$

$\tilde{H}$ je homotopie mezi křivkami η_0 a η_1, kde $\eta_1 : [0,2] \to \Omega$ je definována

$$\eta_1(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pro } t \in [0,1], \\ \gamma_1(2-t) & \text{pro } t \in [1,2]. \end{cases}$$

Podle předcházejícího cvičení lze na tuto homotopii navázat další homotopií, která převede křivku η_1 na konstantní křivku.

Důsledek 4.2.11. *Buďte $\gamma_0, \gamma_1 : [\alpha,\beta] \to \Omega$ dvě regulární křivky s pevnými koncovými body, které jsou homotopické v Ω. Potom pro každou funkci $f \in H(\Omega)$ platí*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $[\alpha,\beta] = [0,1]$. Buď η_0 regulární uzavřená křivka definovaná vztahem (4.13). Potom platí (*přesvědčte se o tom!*)

$$\int_{\eta_0} f = \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_1} f.$$

Současně podle důsledku 4.2.6 a cvičení 4.2.10 máme $\int_{\eta_0} f = 0$. □

Cvičení 4.2.12. Buďte $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, $a \in \mathbb{C}$, M uzavřené mezikruží definované

$$M := \{z \in \mathbb{C};\, r_1 \leq |z-a| \leq r_2\},$$

$\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina obsahující M a $f \in H(\Omega)$. Pro $r > 0$ položme

$$\gamma_r(t) := a + re^{it} \text{ pro } t \in [\,0, 2\pi\,].$$

Potom

$$\int_{\gamma_{r_1}} f = \int_{\gamma_{r_2}} f.$$

Dokažte!

Kapitola 5

5.1 Laurentovy řady

Značení 5.1.1. Otevřené mezikruží o středu $a \in \mathbb{C}$ a s poloměry $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ označíme symbolem

$$P(a, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C};\, r_1 < |z - a| < r_2\}.$$

Speciálně při porovnání se dříve zavedeným značením máme pro $r > 0$

$$P(a, 0, r) = D(a, r) \setminus \{a\} = D'(a, r).$$

Poznámka. Nejedná se o běžně používané značení. Nezdá se, že by existoval standardní symbol pro mezikruží.

Definice 5.1.2. Buďte $c_n \in \mathbb{C}$, kde $n \in \mathbb{Z}$, oboustranně nekonečná posloupnost koeficientů, $a \in \mathbb{C}$. *Laurentova řada* v komplexní proměnné z a se středem v bodě a je definována

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}\,.$$

Řekneme, že Laurentova řada konverguje, právě když konvergují obě mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}\,.$$

Tyto řady se nazývají *regulární* a *hlavní část* Laurentovy řady.

Následující větu není třeba dokazovat, protože je okamžitým důsledkem dobře známých vlastností mocninných řad (*Připomeňte si je!*).

Věta 5.1.3. *Buďte* $c_n \in \mathbb{C}$, *kde* $n \in \mathbb{Z}$, *a dále* $a \in \mathbb{C}$. *Označme po řadě* $R_+, R_- \in [\,0, +\infty\,]$ *poloměry konvergence mocninných řad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n, \ \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n.$$

Je-li

$$\frac{1}{R_-} < R_+,$$

potom Laurentova řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

konverguje na $P(a, 1/R_-, R_+)$ *absolutně a lokálně stejnoměrně (což je ekvivalentní stejnoměrné konvergenci na kompaktních podmnožinách).*

Věta 5.1.4. *Při stejném značení a předpokladech jako ve větě 5.1.3 nechť*

$$\frac{1}{R_-} < R_+.$$

Položme

$$\forall z \in P\left(a, \frac{1}{R_-}, R_+\right), \ f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Potom $f \in H\big(P(a, 1/R_-, R_+)\big)$. *Dále pro libovolné* r, $1/R_- < r < R_+$, *platí*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz, \tag{5.1}$$

kde

$$\gamma_r(t) := a + re^{it}, \ t \in [\,0, 2\pi\,]. \tag{5.2}$$

Důkaz. (I) f je na $P(a, 1/R_-, R_+)$ rovna lokálně stejnoměrné limitě funkcí f_m, $m \in \mathbb{N}$, které definujeme

$$f_m(z) := \sum_{k=-m}^{m} c_k (z-a)^k.$$

Zřejmě pro každé m je f_m holomorfní všude na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, a tím spíše $f_m \in H\big(P(a, 1/R_-, R_+)\big)$. Podle věty 3.5.5 je $f \in H\big(P(a, 1/R_-, R_+)\big)$.

(II) Nejprve pro $m \in \mathbb{Z}$ vypočteme

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} (z-a)^m \,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \big(\gamma_r(t) - a\big)^m \gamma_r'(t)\,\mathrm{d}t = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi i\, \delta_{m,-1}. \end{aligned}$$

Vzhledem ke stejnoměrné konvergenci Laurentovy řady na $\langle\gamma_r\rangle$ můžeme upravit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^{k-n-1}\Big)\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\int_{\gamma_r}(z-a)^{k-n-1}\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,\delta_{k,n}\\ &= c_n.\end{aligned}$$

Tím je věta dokázána. □

Poznámka 5.1.5. Buď $f\in H\big(P(a,r_1,r_2)\big)$ pro $a\in\mathbb{C}$ a poloměry $0\le r_1<r_2\le+\infty$. Nechť f lze na $P(a,r_1,r_2)$ vyjádřit jako konvergentní Laurentovu řadu,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

To také znamená, že při stejném značení jako ve větě 5.1.4 je $1/R_-\le r_1$, $R_+\ge r_2$. Z věty 5.1.4 rovněž vyplývá, že koeficienty c_n jsou funkcí f určeny jednoznačně, neboť splňují rovnice (5.1), (5.2), kde r je libovolný poloměr z intervalu $r_1<r<r_2$. Nezávislost integrálu (5.1) na r lze také vyvodit ze cvičení 4.2.12 bez nutnosti přímého výpočtu.

Obecněji platí, že

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,$$

kde γ je libovolná regulární uzavřená křivka s vlastností: $\mathrm{ind}_\gamma(w)=1$ pro všechny body $w\in\overline{D(a,r_1)}$ (a kromě toho víme, že $\mathrm{ind}_\gamma(w)=0$ pro všechna $w\in\mathbb{C}\backslash D(a,r_2)$). Například γ může být kladně orientovaná regulární Jordanova křivka v $D(a,r_2)$, která obsahuje $\overline{D(a,r_1)}$ ve svém vnitřku.

Následuje hlavní věta o Laurentově řadě. Před ní ale ještě provedeme jeden pomocný výpočet.

Lemma 5.1.6. *Buďte $a\in\mathbb{C}$, $r>0$ a nechť γ_r nadále značí kladně orientovanou kružnici se středem v bodě a, o poloměru r jako v (5.2). Dále buď $f\in C(\langle\gamma_r\rangle)$. Položme*

$$\forall z\in\mathbb{C}\backslash\langle\gamma_r\rangle,\ \ g(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

a

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \ c_n:=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw.$$

Potom platí

$$\forall z \in D(a,r), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{5.3}$$

a

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(a,r)}, \quad g(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{5.4}$$

(tím se myslí, že obě mocninné řady v (5.3), (5.4) jsou konvergentní na daném oboru).

Důkaz. (I) Z věty 1.3.5 víme, že g je holomorfní funkce na $\mathbb{C}\setminus\langle\gamma_r\rangle$. V důkazu této věty je také uveden vzorec (1.20) pro koeficienty v rozvoji do mocninné řady funkce g na kruhu $D(a,r) \subset \mathbb{C}\setminus\langle\gamma_r\rangle$. Jistě neuškodí, když výpočet v tomto speciálním případě provedeme ještě jednou. Nechť $|z-a| < r$. Pro $w \in \langle\gamma_r\rangle$ upravíme

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)\left(1 - \frac{z-a}{w-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,.$$

Při pevném z tato řada konverguje stejnoměrně v proměnné $w \in \langle\gamma_r\rangle$. Díky tomu dostáváme

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \end{aligned}$$

To dokazuje rovnost (5.3).

(II) Podobně lze postupovat pro $|z-a| > r$. Tentokrát provedeme úpravu

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,.$$

Opět platí, že při pevném z tato řada konverguje stejnoměrně v proměnné $w \in \langle\gamma_r\rangle$. Dostáváme

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n f(w)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n}}\,\mathrm{d}w \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n-1}}{(z-a)^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

To dokazuje rovnost (5.4). $\square$

Věta 5.1.7. *Buďte $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r_1 < r_2 \le +\infty$ a $f \in H\big(P(a, r_1, r_2)\big)$. Potom f lze na $P(a, r_1, r_2)$ vyjádřit a přitom jednoznačně jako konvergentní Laurentovu řadu*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{5.5}$$

Důkaz. Jednoznačnost Laurentovy řady jsme již rozebrali dříve v poznámce 5.1.5. Věnujme se nyní existenci. Symbol γ_r opět značí kladně orientovanou kružnici se středem v a a o poloměru r, viz (5.2). Dále c_n, $n \in \mathbb{Z}$, značí koeficienty zavedené v (5.1), kde r může být jakékoliv číslo z intervalu $r_1 < r < r_2$. Z diskuze jednoznačnosti víme, že pokud rozvoj (5.5) existuje, tak koeficienty c_n musí mít právě tento tvar.

Zvolme libovolně, ale pevně ϱ_1, ϱ_2 tak, aby

$$r_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < r_2. \tag{5.6}$$

Platí tedy

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ \ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho_1}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = c_n.$$

Definujeme funkce

$$\forall z \in D(a, \varrho_2), \ \ f_+(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

a

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(a, \varrho_1)}, \ \ f_-(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Podle lemmatu 5.1.6 máme

$$\forall z \in D(a, \varrho_2), \ \ f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{5.7}$$

a

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(a, \varrho_1)}, \ \ f_-(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}\,. \tag{5.8}$$

Dále použijeme Cuchyův integrální vzorec (4.4) z věty 4.1.2 pro $\Omega := P(a, r_1, r_2)$ a $\Gamma := (-\gamma_{\varrho_1}, \gamma_{\varrho_2})$, kde $-\gamma_{\varrho_1}$ značí opačnou křivku ke γ_{ϱ_1}. Předpoklad věty (4.2) je splněn, neboť $\operatorname{ind}_{\gamma_{\varrho_1}}(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_{\varrho_2}}(z) = 0$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus D(a, r_2)$ a $\operatorname{ind}_{\gamma_{\varrho_1}}(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_{\varrho_2}}(z) = 1$ pro $z \in \overline{D(a, r_1)}$. Kromě toho pro $z \in P(a, \varrho_1, \varrho_2)$ je

$$\operatorname{ind}_\Gamma(z) = -\operatorname{ind}_{\gamma_{\varrho_1}}(z) + \operatorname{ind}_{\gamma_{\varrho_2}}(z) = 0 + 1 = 1.$$

Cauchyův integrální vzorec vede na rovnost $\forall z \in P(a, \varrho_1, \varrho_2)$,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho_1}} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w \\
&= f_-(z) + f_+(z).
\end{aligned}
$$

Vzhledem k (5.7), (5.8) to znamená, že funkce f má rozvoj do Laurentovy řady (5.5) na mezikruží $P(a, \varrho_1, \varrho_2)$. Protože volba poloměrů ϱ_1, ϱ_2 byla omezena pouze vztahem (5.6), rozvoj f do Laurentovy řady existuje i na $P(a, r_1, r_2)$. $\square$

Laurentovy řady - pokračování

Ještě poznámka o vztahu izolované singularity funkce f v bodě a k Laurentově řadě funkce f na okolí bodu a.

Poznámka 5.1.8. Buď f funkce holomorfní na $D'(a,r) = P(a,0,r)$ pro jisté $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Potom f má rozvoj do Laurentovy řady na okolí bodu a:

$$\forall z \in D'(a,r), \;\; f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Typ izolované singularity funkce f v bodě a je určen touto Laurentovou řadou:

(1) Izolovaná singularita je odstranitelná, právě když $c_n = 0$ pro všechna $n < 0$ (tj. hlavní část Laurentovy řady je nulová).

(2) Izolovaná singularita je pólem řádu $m \in \mathbb{N}$, právě když $c_n = 0$ pro všechna $n < -m$ a $c_{-m} \neq 0$.

(3) Izolovaná singularita je podstatná, právě když $c_n \neq 0$ pro pro nekonečně mnoho $n < 0$.

Poznámka 5.1.9. Mějme dánu funkci $f \in H\big(P(a,r_1,r_2)\big)$ pro $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, s Laurentovým rozvojem

$$\forall z \in P(a,r_1,r_2)\big), \;\; f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \,.$$

Označme po řadě $R_-, R_+ \in [\,0,+\infty\,]$ poloměry konvergence mocninných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n, \;\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n.$$

Z konvergence Laurentovy řady na $P(a,r_1,r_2)$ plyne, že

$$R_- \geq \frac{1}{r_1}\,, \;\; R_+ \geq r_2.$$

To znamená, že pro hlavní část Laurentovy řady

$$Q(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

platí $Q \in H\big(P(a,r_1,+\infty)\big)$, zatímco regulární část je holomorfní na $D(a,r_2)$.

Speciálně je-li $f \in H\big(D'(a,r)\big)$ pro $r > 0$, to jest $r_1 = 0$ a $r_2 = r$, pak $R_- = +\infty$ a $Q \in H(\mathbb{C} \setminus \{a\})$. Přitom je zřejmé, že funkce $f - Q$ má v bodě a odstranitelnou singularitu.

5.2 Reziduová věta

Reziduová věta představuje velice efektivní nástroj pro výpočet křivkových integrálů v komplexní rovině. Nejprve zavedeme pojem rezidua.

Definice 5.2.1. Buď $f \in H\big(D'(a,r)\big)$ pro jisté $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, a nechť

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

je rozvoj f do Laurentovy řady na $D'(a,r)$. Označíme

$$\operatorname{res}_a(f) := c_{-1}$$

a toto číslo nazveme *reziduem funkce f v bodě a.*

Věta 5.2.2 (Reziduová věta)**.** *Buďte $A \subset \Omega$ podmnožina, která nemá v Ω hromadný bod, a $f \in H(\Omega \setminus A)$. Dále buď $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $n \in \mathbb{N}$, soubor regulárních uzavřených křivek v $\Omega \setminus A$, který splňuje podmínku*

$$\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \ \operatorname{ind}_\Gamma(w) = 0.$$

Potom

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{ind}_\Gamma(a) \operatorname{res}_a(f). \tag{5.9}$$

Poznámka. Množina A může být i nekonečná, ale z předpokladů věty vyplývá, že je nejvýše spočetná. Jak však zdůvodníme v rámci důkazu, nanejvýše konečně mnoho sčítanců na pravé straně (5.9) je nenulových, a proto tato rovnice má dobrý smysl i v případě nekonečné množiny A. Z předpokladů rovněž plyne, že každý bod $a \in A$ je izolovanou singularitou funkce f. Zdůrazněme, že ve formulaci věty se nepředpokládá nic o charakteru těchto singularit.

Ještě před tím, než přikročíme k důkazu, můžeme jako okamžitý důsledek reziduové věty popsat speciální případ, kdy soubor Γ se sestává z jediné křivky, kterou je regulární Jordanova křivka.

Důsledek 5.2.3. *Při stejných předpokladech na Ω, A a f jako ve větě 5.2.2 buď γ kladně orientovaná regulární Jordanova křivka v $\Omega \setminus A$, která splňuje* $\operatorname{int}(\gamma) \subset \Omega$*. Potom*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{a \in \operatorname{int}(\gamma) \cap A} \operatorname{res}_a(f).$$

Důkaz věty 5.2.2. (I) Položme

$$V := \{w \in \mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle;\, \operatorname{ind}_\Gamma(w) = 0\}, \ K := \mathbb{C} \setminus V = \{w \in \mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle;\, \operatorname{ind}_\Gamma(w) \neq 0\} \cup \langle\Gamma\rangle.$$

Tvrdíme, že $K \subset \Omega$ je kompaktní množina.

Množina V je určitě otevřená, neboť index jako funkce bodu je lokálně konstantní. Tudíž K je uzavřená množina. Abychom ukázali, že K je také omezená, označíme jako U neomezenou souvislou komponentu množiny $\mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle$. Víme, že $U \subset V$, a tedy naopak $K = \mathbb{C} \setminus V \subset \mathbb{C} \setminus U$. Množina $\mathbb{C} \setminus U$ je ale omezená (U obsahuje doplněk kruhu $D(0, r)$ pro r dostatečně velké).

Dále podle předpokladu $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset V$, a proto $K = \mathbb{C} \setminus V \subset \Omega$.

(II) Položme

$$B := \{a \in A;\ \mathrm{ind}_\Gamma(a) \neq 0\}.$$

Množina B je konečná nebo prázdná. Skutečně, protože množiny A a $\langle\Gamma\rangle$ jsou disjunktní, $B = A \cap K$. Ale průnik A s kompaktní množinou K nemůže být nekonečný, jinak by A měla v $K \subset \Omega$ hromadný bod.

Označme body množiny B (navzájem různé) jako

$$B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Zde pokládáme $n = 0$ pro $B = \emptyset$, jinak $n \in \mathbb{N}$. Dále pro každý index j, $1 \leq j \leq n$, označme jako Q_j hlavní část Laurentovy řady funkce f na okolí bodu a_j ve smyslu poznámky 5.1.9. Potom $Q_j \in H(\mathbb{C} \setminus \{a_j\})$ a funkce $f - Q_j$ má v bodě a_j odstranitelnou singularitu.

Navíc pro každý index j platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma Q_j = \mathrm{ind}_\Gamma(a_j)\, \mathrm{res}_{a_j}(f).$$

K ověření této rovnosti si stačí uvědomit, že $Q_j(z)$ je mocninná řada v proměnné $(z-a_j)^{-1}$, která konverguje stejnoměrně na $\langle\Gamma\rangle$, a proto můžeme změnit řadu a integrál. Přitom, jak jsme již dříve poznamenali při odvozování Cauchyovy věty,

$$\int_\Gamma (z - a_j)^{-n}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{-n+1} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (z - a_j)^{-n+1}\, \mathrm{d}z = 0 \ \text{ pro } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Proto

$$\int_\Gamma \left(Q_j(z) - \frac{\mathrm{res}_{a_j}(f)}{z - a_j} \right) \mathrm{d}z = 0.$$

Kromě toho

$$\int_\Gamma (z - a_j)^{-1}\, \mathrm{d}z = 2\pi i\, \mathrm{ind}_\Gamma(a_j).$$

(III) Nyní můžeme použít obecnou Cauchyovu větu 4.1.2. Položme

$$\Omega_0 := \Omega \setminus (A \setminus B) = (\Omega \setminus A) \cup B$$

a

$$g := f - \sum_{j=1}^{n} Q_j \in H(\Omega_0).$$

Povšimněme si, že dvojice Ω_0 a Γ splňuje předpoklady věty 4.1.2, to jest podmínku (4.2). Skutečně, nechť $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega_0 = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup (A \setminus B)$. Potom buď $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, a v tom případě $\operatorname{ind}_\Gamma(w) = 0$ podle předpokladu. Nebo $w \in A \setminus B$, a v tom případě $\operatorname{ind}_\Gamma(w) = 0$ vzhledem k tomu, jak jsme zavedli množinu B.

Obecná Cauchyova věta pro $g \in H(\Omega_0)$ dává

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Gamma g = \int_\Gamma f - \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma Q_j \\ &= \int_\Gamma f - 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_\Gamma(a_j) \operatorname{res}_{a_j}(f). \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána. □

5.3 Meromorfní funkce

Obecnější třídou funkcí než jsou holomorfní funkce, se kterou se přitom často pracuje, jsou meromorfní funkce. U těchto funkcí se požaduje, aby byly holomorfní na dané otevřené množině s výjimkou izolovaných bodů, ve kterých funkce může mít singularity typu pól. To znamená, že podstatné singularity nejsou přípustné. Typickým příkladem meromorfní funkce na celé komplexní rovině je podíl dvou polynomů. Přitom samozřejmě polynom ve jmenovateli musí být nenulový.

Definice 5.3.1. Řekneme, že komplexní funkce f je *meromorfní* na Ω, jestliže existuje množina $A \subset \Omega$ s vlastnostmi

(1) $f \in H(\Omega \setminus A)$,

(2) v každém bodě množiny A má f má izolovanou singularitu, která je pólem.

Poznámka. Podle definice má množina A pouze izolované body. Připouští se i možnost $A = \emptyset$. V tom případě je f prostě holomorfní funkce na Ω. Hodnoty meromorfní funkce v bodech, které jsou póly, můžeme chápat jako rovny komplexnímu nekonečnu.

Značení 5.3.2. Buď f meromorfní funkce na Ω. Označme (jako dříve)

$$\mathcal{Z}(f) := \{a \in \Omega;\ f(a) = 0\}$$

a

$$\mathcal{P}(f) := \{a \in \Omega;\ f(a) = \infty \text{ (tj. } f \text{ má pól v bodě } a)\}.$$

Poznámka 5.3.3. Buďte $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $M \subset U$. Nechť M nemá v U hromadný bod. Je-li U souvislá množina, potom množina $U \setminus M$ je také souvislá.

Zdůvodnění bude pouze neformální, ale snad intuitivně přijatelné. Víme, že otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ je souvislá, právě když je křivkově souvislá. Tvrdíme, že množina $U \setminus M$ je křivkově souvislá. Mějme dva libovolné body v $U \setminus M$. Potom v U existuje křivka, která tyto dva body spojuje. Přitom tato křivka může procházet nejvýše konečně mnoha body množiny M vzhledem k tomu, že M nemá v U hromadný bod (geometrický obraz křivky je kompaktní množina). Dále tvrdíme, ale již bez dalších podrobností, že v dimenzi $n \geq 2$ lze uvažovanou křivku „mírně deformovat“ uvnitř množiny U tak, aby se deformovaná křivka vyhnula bodům z M, kterými původní křivka procházela, a přitom aby neprotínala žádný nový bod z M.

Poznámka 5.3.4. Je-li f meromorfní funkce na Ω, potom množina pólů $\mathcal{P}(f)$ nemá v Ω hromadný bod. To také znamená, že množina $\mathcal{P}(f)$ je lokálně konečná, a tudíž nejvýše spočetná.

Skutečně, pokud by $a \in \Omega$ byl hromadným bodem množiny $\mathcal{P}(f)$, potom f nemůže být holomorfní na žádném okolí bodu a. Bod a nemůže být ani pólem, protože podle definice je pól izolovanou singularitou. Tím jsou vyčerpány všechny možnosti a dostáváme spor.

Je-li navíc Ω oblast (je souvislá) a f není identicky rovna 0, pak množina kořenů $\mathcal{Z}(f)$ také nemá v Ω hromadný bod.

Skutečně, takový hromadný bod by nemohl být pólem, a ležel by tedy v $\Omega \setminus \mathcal{P}(f)$. Přitom $f \in H\big(\Omega \setminus \mathcal{P}(f)\big)$ a podle poznámky 5.3.3 je $\Omega \setminus \mathcal{P}(f)$ také souvislá množina. Jak však víme, pokud funkce f je holomorfní na nějaké oblasti a kořeny f zde mají hromadný bod, pak f je na této oblasti identicky rovna 0. To by ovšem znamenalo spor s předpokladem.

Přímo z definice je patrné, že součet nebo součin dvou meromorfních funkcí na Ω je také meromorfní funkce.

Cvičení 5.3.5. Buď f meromorfní funkce na oblasti Ω (Ω je otevřená a souvislá). Jestliže f není identicky rovna 0, pak reciproká funkce $1/f$ je také meromorfní na Ω. *Dokažte!*

Návod: Funkce $1/f$ je definována všude na Ω s výjimkou podmnožiny $\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{Z}(f)$. Přímo z definice pólu plyne, že množina $\mathcal{P}(f)$ je diskrétní (každý její bod je izolovaný). Z poznámky 5.3.4 dále vyplývá, že každý kořen funkce f je izolovaný, a tedy množina $\mathcal{Z}(f)$ je také diskrétní.

Pro $a \in \mathcal{P}(f)$ platí

$$\lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

To znamená, že funkce $1/f$ má v a odstranitelnou singularitu a nabývá zde hodnotu 0. Naopak ukažte, že jestliže $a \in \Omega$ je izolovaným kořenem funkce f, pak funkce $1/f$ má v bodě a pól.

Odtud již plyne, že $1/f$ je meromorfní funkce. Navíc jsme zjistili, že

$$\mathcal{Z}\left(\frac{1}{f}\right) = \mathcal{P}(f), \ \mathcal{P}\left(\frac{1}{f}\right) = \mathcal{Z}(f).$$

Jako okamžitý důsledek tohoto cvičení dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 5.3.6. *Předpokládejme, že $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Potom množina všech meromorfních funkcí na Ω vzhledem k běžným operacím sčítání a násobení funkcí je tělesem.*