

(1) $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y), f: X \rightarrow Y, M \subset X$

M souvislá mn., f spojitá zobr. $\Rightarrow f(M) \subset Y$ je souvislá

Řešení. Máme ukázat: pokud $U, V \in \tau_Y, f(M) \subset U \cup V, f(M) \cap U \cap V = \emptyset$,
pak $f(M) \cap U = \emptyset$ nebo $f(M) \cap V = \emptyset$

Ověření: f spojitá $\Rightarrow f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \tau_X$,

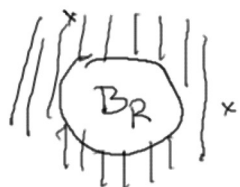
$$M \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V), M \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$$

M souvislá $\Rightarrow M \cap f^{-1}(U) = \emptyset$ nebo $M \cap f^{-1}(V) = \emptyset$

$$\Rightarrow f(M) \cap U = \emptyset \text{ nebo } f(M) \cap V = \emptyset$$

(2) $\overline{M} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2 \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus M$ má právě jednu neomezenou souvislou komponentu

Řešení. $\exists R > 0, M \subset B_R \Rightarrow C_0 := \mathbb{R}^n \setminus B_R$ neomezená, souvislá dokonce křátkově souvislá



$C_0 \subset \mathbb{R}^n \setminus M$, buď C souvislá komp. mn. $\mathbb{R}^n \setminus M$,
 $C_0 \subset C$

C_0 neomezená $\Rightarrow C$ je neomezená

C' souvislá komp. $\mathbb{R}^n \setminus M, C' \neq C \Rightarrow C' \cap C = \emptyset$, tj. $C' \subset \mathbb{R}^n \setminus C \subset \mathbb{R}^n \setminus C_0 = B_R$
 $\Rightarrow C'$ je omezená

(3) Bud' (X, τ) lokálně souvislý top. pr. (např. $\mathbb{R}^2$), $\emptyset \neq U \subset X$ otevřená. Potom každá souvislá komp. U je otevřená v X , a tedy i v U .

Řešení. relativní topologie $\tau_U = \{G \subset U; G \in \tau\}$

(U, τ_U) je lokálně souvislý top. pr.

C - lib. souvislá komp. mn. $U, x \in C$ lib. bod

$\exists$ souvislé okolí $W \ni x, W \subset U$

C, W souvislé, $x \in C \cap W \Rightarrow C \cup W$ souvislá mn.

maximalita $C \Rightarrow C \cup W = C$, tj. $W \subset C$

tedy $x \in W \subset C, C$ je otevřená v U , tedy i v X