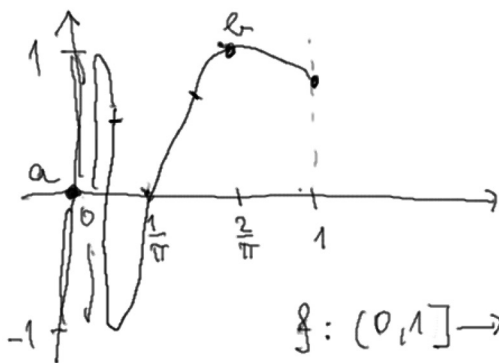


(4) Bud' $M := \{(x, \sin \frac{1}{x}) ; x \in (0, 1]\} \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$

je souvislá, ale nemá křivkově souvislá.

Řešení. $M_1 := \{(x, \sin \frac{1}{x}) ; x \in (0, 1]\}$, $M = M_1 \cup \{(0, 0)\}$



$$\overline{M}_1 = M_1 \cup \{0\} \times [-1, 1] \quad \text{samostatně}$$

$$\text{např. } z_n = (\frac{1}{n\pi}, 0) \in M_1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$z_n \rightarrow (0, 0) \Rightarrow (0, 0) \in \overline{M}_1$$

$$f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto (x, \sin \frac{1}{x}) \text{ spojitě zobr.}$$

$$M_1 = f((0, 1]) \text{ je souvislá mm.}$$

alternativně: M_1 je křivkově souvislá $\Rightarrow$ souvislá

$$(0, 0) \in \overline{M}_1 \Rightarrow M = M_1 \cup \{(0, 0)\} \text{ je souvislá}$$

$$a := (0, 0), \quad b := (\frac{2}{\pi}, 1), \quad a, b \in M \text{ nelze spojit křivkou v } M$$

$$\text{Sporem: } \gamma: [0, 1] \rightarrow M \text{ spojitě zobr. } \gamma(0) = a, \gamma(1) = b$$

$$p_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (z, \eta) \mapsto z \text{ je spojitě } (\Rightarrow p_1|_M: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ je spojitě samostatně})$$

$$g := p_1 \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ je spojitě zobr.}$$

$$\Rightarrow g([0, 1]) \subset \mathbb{R} \text{ je souvislá mm., } g(0) = 0, g(1) = \frac{2}{\pi}$$

1/2. interval

$$\Rightarrow [0, \frac{2}{\pi}] \subset g([0, 1])$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad x_n := \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} \in (0, \frac{2}{\pi}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \exists t_n \in (0, 1), \quad g(t_n) = x_n$$

$$\gamma(t_n) \in M, \quad p_1(\gamma(t_n)) = g(t_n) = x_n \neq 0 \Rightarrow \gamma(t_n) \neq (0, 0) = a$$

$$\Rightarrow \gamma(t_n) \in M_1$$

$$\Rightarrow p_1(\gamma(t_n)) = g(t_n) = x_n, \quad \gamma(t_n) = (x_n, \sin \frac{1}{x_n}) = (\frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}, 1)$$

$$\text{kdy } \gamma(t_n) \rightarrow (0, 1) =: c \text{ pro } n \rightarrow \infty$$

$$(\gamma(t_n)) \subset \langle \gamma \rangle \text{ kompaktní } \Rightarrow \text{relativně kompaktní.}$$

$$\Rightarrow c = \lim \gamma(t_n) \in \langle \gamma \rangle \subset M \text{ spor, neboť } c \notin M = M_1 \cup \{a\}$$

(5) $M \subset \mathbb{R}, M$ je souvislá $\Rightarrow M$ je interval nebo $\emptyset$

Řešení. Platí: $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ je interval $\Leftrightarrow M$ splňuje

$$\forall a, b \in M, \forall c \in \mathbb{R}, a < c < b \Rightarrow c \in M$$

$$\text{ekvivalentně } \forall a, b \in M, a < b \Rightarrow (a, b) \subset M$$