samostatně (⇒) zřejmé

(⇐) $\alpha := \inf M$, $\beta := \sup M$, vlastnost $\Rightarrow$ $(\alpha, \beta) \subset M$

$(M \neq \emptyset)$

$M = (\alpha, \beta)$ nebo $[\alpha, \beta)$ nebo $(\alpha, \beta]$ nebo $[\alpha, \beta]$

---

ukážeme: $M \neq \emptyset$ není interval $\Rightarrow$ M není souvislá

$\Downarrow$

$\exists\, a, b \in M$, $c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, $c \notin M$

$A := (-\infty, c)$, $B := (c, +\infty)$, A, B - otevřené, $M \subset A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{c\}$

$a \in A \cap M \neq \emptyset$, $b \in B \cap M \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ $\Rightarrow$ M není souvislá

(6) Lokálně křivkově souvislý top. prostor je souvislý, právě když je křivkově souvislý.

Řešení. (⇐) platí obecně

(⇒) (X, τ) souvislý, lokálně křivkově souvislý

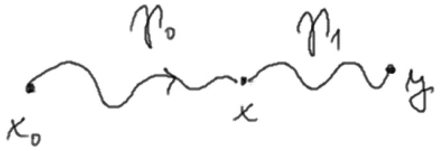
$X \neq \emptyset$, zvolíme $x_0 \in X$, $M := \{x \in X;\ x \text{ lze spojit křivkou s } x_0\}$

$x_0 \in M \neq \emptyset$

Platí: M je otevřená mn.; buď $x \in M$, existuje křivkově souvislé okolí $U \ni x$

$\forall y \in U$, y lze spojit křivkou γ_1 s x, $\gamma_1 \in C([1,2], X)$, $\gamma_1(1) = x$, $\gamma_1(2) = y$

x —— " —— γ_0 s x_0, $\gamma_0 \in C([0,1], X)$, $\gamma_0(0) = x_0$, $\gamma_0(1) = x$



γ_0, γ_1 lze "navázat"

$\to$ křivka $\gamma \in C([0,2], X)$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(2) = y$

(podrobnosti samostatně)

$\forall y \in U$, $y \in M$, tj. $U \subset M$ $\Rightarrow$ M je otevřená

Platí: M je uzavřená mn. $\Leftrightarrow$ $X \setminus M$ otevřená

$x \in X \setminus M$, existuje křivkově souvislé okolí $U \ni x$; potom

$\forall y \in U$, $y \notin M$, kdyby $y \in M$ $\Rightarrow$

y lze spojit křivkou s x_0, $\tilde{\gamma}_0 \in C([0,1], X)$, $\tilde{\gamma}_0(0) = x_0$, $\tilde{\gamma}_0(1) = y$

přitom $x, y \in U$, x —— " —— s y, $\tilde{\gamma}_1 \in C([1,2], X)$, $\tilde{\gamma}_1(1) = y$, $\tilde{\gamma}_1(2) = x$