

(7) Konvexní množina v top. vektor. prostoru je jednoduše souvislá

Řešení. V top. vektor. prostoru, $\emptyset \neq M \subset V$ konvexní

$x_0 \in M$ pevně, $F: M \times [0,1] \rightarrow M$, $F(x,s) := x_0 + (1-s)(x-x_0) = sx_0 + (1-s)x \in M$

F -spojitě, $F(x,0) = x$, $F(x,1) = x_0$

M -souvislá $\Leftrightarrow$ křivkově souvislá

$\gamma: [a,b] \rightarrow M$ uzavřená křivka

$H: [a,b] \times [0,1] \rightarrow M$, $H(t,s) = F(\gamma(t), s)$, H -spojitě

(i) $H(a,s) = F(\gamma(a), s) = F(\gamma(b), s) = H(b,s)$, $\forall s \in [0,1]$

(ii) $H(t,0) = F(\gamma(t), 0) = \gamma(t)$, $\forall t \in [a,b]$

(iii) $H(t,1) = F(\gamma(t), 1) = x_0$, — 4 —

(8) $U, V \subset \mathbb{C}$ otevřené, $\neq \emptyset$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $g: V \rightarrow \mathbb{C}$, $f(U) \subset V$

$z_0 \in U$, $w_0 := f(z_0) \in V$, $h := g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$

$f'(z_0)$, $g'(w_0)$ existují $\Rightarrow$ existuje $h'(z_0) = g'(w_0) f'(z_0)$

Řešení. máme: $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(U) \subset V$

$u_0 \in U$, $v_0 := F(u_0) \in V$, $H := G \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

dF_{u_0} , dG_{v_0} existují $\Rightarrow$ existuje $dH_{u_0} = dG_{v_0} \circ dF_{u_0}$

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{g}: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(U) \subset V$

$\tilde{h}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$

$z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$, $\tilde{f}(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$

předpoklady $\Rightarrow d\tilde{f}_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $d\tilde{g}_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$

$h'(z_0) \Leftrightarrow d\tilde{h}_{(x_0, y_0)}$ je tvaru $\begin{pmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{pmatrix}$

$d\tilde{h}_{(x_0, y_0)} = d\tilde{g}_{(u_0, v_0)} \circ d\tilde{f}_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\delta & -\beta\gamma - \alpha\delta \\ \alpha\delta + \beta\gamma & -\beta\delta + \alpha\gamma \end{pmatrix}$

$\xi = \alpha\gamma - \beta\delta$, $\eta = \alpha\delta + \beta\gamma$

(9) Příklady (i) $f(z) := z^m$, $m \in \mathbb{N}_0$, $f \in H(\mathbb{C})$ celá funkce

$f'(z) = m z^{m-1}$

(ii) $f(z) := z^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, $f'(z) = -m z^{-m-1}$

(iii) $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konverguje absolutně, lokálně stejnoměrně