$$\underset{\sim}{-z} = f(z) - f(-z) = 2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}} \implies -1 = 2\,B_1 \qquad B_1 = -\tfrac{1}{2}$$

$B_{2n+1} = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$

(iii) $$\frac{B_0}{n!\,0!} + \frac{B_1}{(n-1)!\,1!} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{1!\,(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$n = 1$: $\dfrac{B_0}{1!\,0!} = 1$ ✓ ; nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$z = f(z)(e^z - 1) = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} z^j}_{\text{poloměr. konv. } 2\pi} \cdot z \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}}_{\text{poloměr. konv. } \infty} \qquad / \cdot \frac{1}{z}$$

$\Rightarrow$ obě řady konverg. absolutně na $\overline{D(0, r)}$ pro $0 < r < 2\pi$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!\,(k+1)!} z^{j+k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j,k \in \mathbb{N}_0 \\ j+k=n}} \frac{B_j}{j!\,(k+1)!} \right) z^n$$

$$n \in \mathbb{N}_0, \quad \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{B_j}{j!\,(n-j+1)!} = \delta_{n,0}}$$

(16) $a \in \mathbb{C}$, $f(z) := \dfrac{1}{z-a}$, $f \in H(\Omega)$, kde $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{a\}$

f je analytická na Ω - explicitní vyjádření mocnin. řadou + poloměr konvergence

<u>Řešení</u>. $z_0 \in \Omega$ lib., $z_0 \neq a$, tj. $|z_0 - a| > 0$

$$f(z) = -\frac{1}{a - z_0 - (z - z_0)} = -\frac{1}{(a - z_0)\left(1 - \underset{\sim}{\dfrac{z - z_0}{a - z_0}}\right)} = \underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty} (a - z_0)^{-n-1} (z - z_0)^n}_{-\frac{1}{a - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (a - z_0)^{-n} (z - z_0)^n}$$

pro $|z - z_0| < |a - z_0|$ $\quad |\cdot| < 1$

R = poloměr. konv. $\quad \dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{n \to \infty} \left(|a - z_0|^{-n} \right)^{1/n} = \dfrac{1}{|a - z_0|}$

$R = |a - z_0|$ = vzdálenost z_0 do nejbližší singularity

(17) Totéž jako v (16) pro $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$

$z^2 + 1 = 0 \iff z = \pm i$, $f \in H(\Omega)$, kde $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, $i = \sqrt{-1}$

<u>Řešení</u>. $z_0 \in \Omega$ lib. $(z_0 \neq \pm i)$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right); \quad \frac{1}{z \mp i} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\pm i - z_0)^{-n-1} (z - z_0)^n$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(i - z_0)^{-n-1} - (-i - z_0)^{-n-1}}{2i}}_{\frac{1}{2i(z_0^2+1)} \left((-i - z_0)^{n+1} - (i - z_0)^{n+1} \right)} (z - z_0)^n$$

poloměr konvergence = vzdálenost do nejbližší singularity = $\min\{|z_0 - i|, |z_0 + i|\}$