(30) $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,-3,\dots\}$, $\Gamma \in H(\Omega)$

(i) typy singularit $\Gamma(z)$

(ii) — " — $\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$

(iii) $f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)$, $\forall z \in \Omega$

zdůvodnit, že $f \in H(\Omega)$

Řešení. $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ pro $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

lze prodloužit na Ω jako holomorfní funkci (jednoznačně - proč?)

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

(i) $z=0$: $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ $\qquad \Gamma(z+1) = \Gamma(1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, poloměr konv. = ?

$$= 1 + O(z)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \frac{O(z)}{z} = \frac{1}{z} + O(1)$$

$\Rightarrow$ v $z=0$ má Γ pól řádu 1, $\operatorname{res}_0(\Gamma) = 1$

$n \in \mathbb{N}$: $\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\cdots z\,\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)\underbrace{(z+n-1)\cdots z}_{h(z)}} = \frac{h(z)}{z+n}$$; h je holomorf. na okolí bodu $z=-n$

$$h(z) = h(-n) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z+n)^k = \frac{\Gamma(1)}{(-1)\cdot(-2)\cdots(-n)} + O((z+n))$$

poloměr. konv. = ?

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)} + O(1)$$

v $z=-n$ má Γ pól řádu 1, $\operatorname{res}_{-n}(\Gamma) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$

(ii) $n \in \mathbb{N}_0$, $z=-n$: $\qquad \Gamma(z) = \dfrac{(-1)^n}{n!\,(z+n)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z+n)^k$

$$\Gamma'(z) = -\frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} k\, b_k (z+n)^{k-1}$$

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{\frac{1}{(z+n)^2} + O(1)}{\frac{1}{z+n} + O(1)} = \frac{1}{z+n}\, \frac{1 + O((z+n)^2)}{1 + O((z+n))} = \frac{1}{z+n}\left(1 + O((z+n))\right)$$

$\uparrow$ proč?

v $z=-n$ má $-\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ pól řádu 1, $\operatorname{res}_{-n}\left(-\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}\right) = 1$

(iii) $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)}_{\sim \frac{1}{n^2}}$, $z \in \Omega$

$f \in H(\Omega) \leftarrow$ samostatně

DODATEK $-\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - f(z)$ - celá funkce, platí $-\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)$

Eulerova konst. $\gamma = -\Gamma'(1)$